数理解析研究所講究録
第696巻1989年26-31

Gibbs測度の一般化について
(On the ergodic decomposition of hyperbolic measure)

京大・理 D1 辻井 正人

論文[P]の中で、Ya.B. Pesinは測度の双曲性の概念を導入し、多様体上のリーマン体積に対して絶対連続な双曲型の測度(後述)について非常に強いエルゴード的性質を示した。この論文の目的は論文[T]の中で述べてある上記の結果の拡張を示すことである。最初に全体を通じての設定とPesinの結果について述べる。

設定

M: C^2 コンパクト リーマン多様体

$f: M \to M$ C^2 微分同相

μ: f-不変な確率測度

定義 μが双曲型であるとは、リヤプノフ指数が、μについてほとんどいたるところ、全てnon-zeroであることを言う。ただし、ここでリヤプノフ指数とは各点$x \in M$に対し

て、

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|df^n v\| \qquad v\in T_xM$$

のとる値の集合で、その値の個数はMの次元以下である。

$\boxed{\text{定理}}$ (Pesin [P])

μ が双曲型でリーマン体積に対して絶対連続であるとする。

そのとき、次の a), b), c) が成り立つ。

a) μ についてほとんど致るところの $x\in M$ について

$$W^{ss}(x)=\{y\in M \mid \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log d(f^n x, f^n y)<0\}$$

$$W^{su}(x)=\{y\in M \mid \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log d(f^{-n}x, f^{-n}y)<0\}$$

は injectively immersed manifold になる。

b) 互いに交わらない可算個の Borel set Λ_i^k $(0\leq i\leq n_k,$ $k\in\mathbb{N})$ が存在して

$\mu(\bigcup_{i,k}\Lambda_i^k)=1$

$f|_{\bigcup_i\Lambda^k}$ は ergodic

さらに

$f(\Lambda_i^k)=\Lambda_{i+1}^k$, $f(\Lambda_{n_k}^k)=\Lambda_0^k$

$f^{n_k}|_{\Lambda_i^k}$ は Bernoulli

c) $h_\mu = \int_M \chi^{(u)}(x)\, d\mu(x)$

ここで$\chi^{(u)}(x)$は正のリヤプノフ指数の重複度をこめた和である（[M, pp.265] 参照）

(注) c)には測度が双曲型である必要はないが、ここでは双曲型の測度のみを考える。

そこで次のようなことを考えるのは自然である。

『上の定理でμの絶対連続性の仮定を取り除いたとき 結果 a), b), c) は成立するだろうか。』

a)は一般の場合に成り立つことが知られている。しかし、b), c) は測度μの分布の様子を反映していて一般には成立しない。（このことについては[L-Y] 参照。）次のような例を考えれば明らかである。

例 $F: R^2 \to R$ を Horse shoe map, KをFの双曲型不変集合とする。$F|_K$は$\{0, 1\}$をsymbolとする両側無限列の集合 $B(2)$上のshift mapとtopologically conjugateであることはよく知られている。μ_pを$\{0\}$に確率pを与えるBernoulli測度とし、μを

$$\mu = \int_{[0,1]} \mu_p \, dp$$

で定義する。Kはattractorではないからc)をみたさない。

([B], 定理1.22と4.11を参照)。また、エルゴード分解の一意性よりμは可算個のエルゴード測度に分解されない。

そこで、我々は以下で双曲測度の1つのclassを定義し、そのclassについてはb), c)が(b)のBernoulli性を除いて)成立することを示す。

$\boxed{\text{定義}}$ μが双曲型であるとする。μがS-絶対連続とは$\mu(X)>0$なるBorel集合Xに対し常に$W^{ss}(X)\equiv\bigcup_{x\in X}W^{ss}(x)$は正のリーマン体積をもつことである。

$\boxed{\text{定理}}$ μが双曲型でS-絶対連続とする。このとき次のb), c)が成立する。

b) 互いに交わらない可算個のBorel set Λ_i^k $(0\leq i\leq n_k,\ k\in\mathbb{N})$が存在して

$\mu(\bigcup_{i,k}\Lambda_i^k)=1$

$f|_{\bigcup_i\Lambda_i^k}$ はergodic

さらに、

$f(\Lambda_i^k)=\Lambda_{i+1}^k$, $f(\Lambda_{n_k}^k)=\Lambda_0^k$

$f^{n_k}|_{\Lambda_i^k}$ はKolmogorov

c) $h_\mu = \int_M \chi^{(u)}(x)\, d\mu(x)$

注意 1

$f^{n_k}|\Delta^k_i$ は Bernoulli であることが期待されるが、現在のところは、よくわからない。

注意 2

研究集会の後で気付いたことであるが，双曲型の測度については S-絶対連続の条件は、[L-Y] の中の " μ has absolutely continuous measures on unstable manifold " と同値である。[L-Y] の中で上の条件と c) が同値であることが示されているので、双曲型の測度について

$$S\text{-絶対連続} \Leftrightarrow \text{c)} \quad 。$$

よって、双曲測度については、Pesin formula (c)) がその測度の Kolmogorov 性の意味することになる。([T2])

Reference

[B] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism. Lect. Notes. on Math 470

[L-Y] F. Ledrappier and L.-S. Young, The metric entropy of diffeomorphism I, Ann of Math. 122, 509-539

[M] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer-Verlag (1987)

[P] Ya. B. Pesin, Lyapunov exponent and Smooth Ergodic Theory, Russian Math Surveys 32 No4 (1977) 55-114

[T1] Tsujii, M., On the ergodic decomposition of hyperbolic measures, Preprint

[T2] Tsujii, M., Hyperbolic measures satisfying Pesin's entropy formula, in preparation.