数理解析研究所講究録
第 696 巻 1989 年 32-37

S^1上の群作用の位相的エントロピーについて

早大 教育学部 渡辺展也
Nobuya Watanabe

葉層構造のエントロピーの定義が Ghys, Langevan, Walczak によって [G-L-W] で与えられた。葉層構造が suspension で得られている場合は，それは群作用のエントロピーと関係している。ここでは 曲面の基本群のS^1への作用について，エントロピーと作用のオイラー数の関係を調べた。

Σ_g を 向きづけ可能閉曲面で ジーナスが g個のものとする。Σ_gの基本群をΓ^gとする。Γ^gの生成集合Γ_0^gを

$$\Gamma_0^g = \{\alpha_i, \beta_i, \alpha_i^{-1}, \beta_i^{-1} \ ; \ 1 \leqq i \leqq g\}$$

とする。ここで Γ_0^gはΓ^gを次のように表現するとする。

$$\Gamma^g = \langle \alpha_i, \beta_i, 1 \leqq i \leqq g \ ; \ \prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \rangle$$

G^+をS^1の向きを保つ同相写像のなす群とする。準同型写像 $\phi : \Gamma^g \longrightarrow G^+$ に対して，$\chi(\phi)$ を ϕに付随したS^1-bundle の Euler 数とする。すると Milnor [Mi] と Wood [Wo] によって $|\chi(\phi)| \leqq |\chi(\Sigma_g)|$ という不等式が成り立つ。

次に $gr(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$をΓ^gのΓ_0^gに関する指数的成長度とする。

$h(\phi, \Gamma_0^g)$ を ϕ の Γ_0^g に関する位相的エントロピーとする。

定理は次の2つである。

定理1　$\phi : \Gamma^g \to G^+$ を準同型写像とする。$\chi(\phi) \neq 0$ なら $h(\phi, \Gamma_0^g) > 0$。

定理2　$\phi : \Gamma^g \to G^+$ を準同型写像とする。$|\chi(\phi)| = |\chi(\Sigma_g)|$ なら，$h(\phi, \Gamma_0^g) = g r(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$。

1　準備　Γ を有限生成群とし Γ_0 を Γ の対称生成集合とする。(X, d) を compact 距離空間とし $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$ を準同型とする。Γ は Γ_0 に関する語ノルムを $\|\cdot\|$ とする。

$B_n(\Gamma, \Gamma_0) = \{\gamma \in \Gamma ; \|\gamma\| \leqq n\}$ とおく。

X の新しい距離 d_n を次で定義する。$d_n(x, y) = \max_{\gamma \in B_n} d(\phi(\gamma)x, \phi(\gamma)y)$。次に n を自然数 ε を正の数とする。$E \subset X$ が (n, ε)-separated set とは，任意の $x, y \in E$ $(x \neq y)$ に対して $d_n(x, y) > \varepsilon$ となるときにいう。

$$t(n, \varepsilon) = \mathrm{Max}\{\# E \mid E \text{ は } (n, \varepsilon)\text{-separated set}\}$$

とおく。すると ϕ の Γ_0 に関するトポロジカルエントロピーが次で定義される。

$$h(\phi, \Gamma_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log t(n, \varepsilon)。$$

命題1　$\phi, \psi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$ を準同型とする。もし連続な全射 $f : X \to X$ があって $f \circ \phi = \psi \circ f$ なら $h(\phi) \geqq h(\psi)$。

$\phi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Homeo}(S^1)$ に対しては位相的エントロピーは常に

0だが，同じようにして次が証明される。

命題2 $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(S^1)$を準同型とする。すると
$h(\phi, \Gamma_0) \leqq gr(\Gamma, \Gamma_0) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# B_n(\Gamma, \Gamma_0)$.

次にKを一次元多様体として $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(K)$を準同型とする。$z \in K$の軌道が<u>resilient軌道</u>であるとは，$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$が存在して $\phi(\gamma_1)z \neq z$，$\lim_{n\to\infty} \phi(\gamma_2^n \gamma_1) z = z$となること。

命題3 ([G-L-W]) もしresilient軌道が存在するならϕの位相的エントロピーは正。

2. 定理1の証明　定理1の証明には，次の命題を使う。

命題4 ([Ma-1]) 次は同値。$\phi : \Gamma \to G^+$を準同型とする。

(1) $\phi^*(e_R) \neq 0$

(2) ϕの極小集合Mと$\gamma \in \Gamma$があって$\phi(\gamma)|M \neq id$，$\phi(\gamma)$はMに固定点を持つ。ここでe_RはG^+の有界オイラー類。

定理1の証明をする。$\phi^*(e_R) \neq 0$としてよい。$S_\gamma = \{ x \in S^1 ; \phi(\gamma)x \neq x \}$とおく。命題4より$\phi$の極小集合Mと$\gamma \in \Gamma$があって$S_\gamma \cap M \neq \emptyset$，$S_\gamma \neq S^1$となる。$x \in S_\gamma \cap M$とする。$x$を含む$S^\gamma$の連結成分は開区間である。$y = \lim_{n\to\infty} \phi(\gamma^n)x$は上の開区間の端点となる。$M \ni y$となる。$\phi$の軌道はMで稠密なので，$y$の軌道は開区間と交わる。よって$y$はresilient軌道である。

3 定理2の証明　Σ_g には負の定曲率の Riemann 計量が入る。すると Σ_g の universal covering は Poincare 円板 Δ と同一視され Γ^g は Δ に covering transformation として作用し これは $\partial\Delta = S^1$ の作用を定める。この作用は Fuchsian 作用と呼ばれる。Goldman は [G] で $\phi : \Gamma^g \to PSL(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\Delta)$ が Fuchsian であるためには $\chi(\phi) = \chi(\Sigma_g)$ であることを示した。よって定理2を証明するには Fuchsian 作用 $\hat{\phi}$ に対してやればよい。なぜなら $\phi : \Gamma^g \to G^+$ を準同型で $|\chi(\phi)| = |\chi(\Sigma_g)|$ なるものとすると 松本氏 [Ma-2] により ϕ と $\hat{\phi}$ は semi conjugate する。すると $h(\hat{\phi}; \Gamma_0^g) \leqq h(\phi, \Gamma_0^g) \leqq gr(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$ だからである。

$M_n = \#(B_n(\Gamma^g, \Gamma_0^g) - B_{n-1}(\Gamma^g, \Gamma_0^g))$ とおく。すると $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n = gr(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$ となる。又，Γ^g を Fuchsian 群 $\phi(\Gamma^g)$ と同一視する。Γ^g による S^1 の点の境界展開を考える。([B], [S])。各 $\gamma \in \Gamma_0^g$ に対して $C(\gamma) = \{ z \in \Delta ; |D\gamma(z)| = 1 \}$ とおく。すると $\gamma C(\gamma) = C(\gamma^{-1})$ である。$C(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma_0^g$) で囲まれる $4g$ 角形 R は Γ^g の基本領域である。Γ_0^g の元を $C(\gamma_1), \cdots C(\gamma_{4g})$ が反時計回りに R を囲うように $\gamma_1, \cdots, \gamma_{4g}$ と名前をつける。P_i と Q_i を反時計回りの順で $C(\gamma_i)$ の端点とする。$f : \partial\Delta \to \partial\Delta$ を $f|[P_i, P_{i+1})(x) = \gamma_i x$ で定義する。$x \in \partial\Delta$ の f-展開とは 列 $x_f =$

$\gamma_{i_0}\gamma_{i_1}\cdots,\ \gamma_{i_j}\in\Gamma_0^g$ のことで $f^n(x)\in[P_{i_n},P_{i_n+1})$ となっているもののことである。$\Sigma^+=\{x_f : x\in\partial\Delta\}$ とする。この対応は1対1である。$F(\Sigma^+)$ を Σ^+ の元によこる有限列の集合とする。C. Series は[S]の中で各 γ は $F(\Sigma^+)$ の中に唯一の一番短かい代表元 ω_γ を持つことを示している。$\omega=e_1e_2\cdots e_k\in F(\Sigma^+)$ に対して $Z(\omega)=\{x\in\partial\Delta\ ;\ x_f=e_1e_2\cdots e_k\cdots\}$ とおく。すると $Z(\omega)$ は区間となる。a_i を $[P_i,P_{i+1})$ の中点とし $\varepsilon=\frac{1}{3}\operatorname{Min}_i|[P_i,P_{i+1})|$ とおく。$E_n=\{\gamma^{-1}a_{i_n} : \omega_\gamma=\gamma_{i_0}\cdots\gamma_{i_n},\ \gamma\in B_n-B_{n-1}\}$ とおく。各 $\gamma\in B_n-B_{n-1}$ に対して、γ は $Z(\omega_\gamma)$ を $[P_{i_n},P_{i_n+1})$ に写す。ここで $\omega_\gamma=\gamma_{i_0}\cdots\gamma_{i_n}$。よって E_n は (n,ε)-separated set である。$t(n,\varepsilon)\geq\#E=M_n$ だから定理2の証明が終った。

参考文献

[B] R. Bowen, Hausdorf dimension of quasi-circles, Publ. Math. I.H.E.S, 50 (1970), 11-25.

[G-L-W] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak, Entropie geometrique des feuilletages, Acta Math. 168 (1988), 105-142.

[Go] W.M. Goldman, Discontinuous groups and the Euler class, Thesis, Berkley.

[Ma-1] S. Matsumoto, Numerical invariants for semiconjug acy of homeomorphisms of the circle, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 163–168.

[Ma-2] S. Matsumoto, Some remarks on foliated S^1-bundle, Invent. Math. 90, (1987) 343–358.

[Mi] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, Comment. Math. Helv. 32 (1958), 215–223

[S] C. Series, Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 6 (1986), 601–625.

[Wo] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 257–273.