数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 47-69

可微分写像の無限小安定性について

早大 理工　池田 宏　(Hiroshi Ikeda)

要約　Mをコンパクトで連結で境界なしの滑らかな多様体とする。Mの微分同相写像の理論において、次のことはよく知られている。もし微分同相写像が無限小安定ならば、それはAxiom A とno-cycle 条件を満足する。これと似た性質がMからMへの可微分写像（endomorphism）についても成立することを示す。その結果は次のようなものである：
無限小安定な可微分写像はweak Axiom A と no-cycle 条件を満足する。

0. 序説

Mをコンパクトで連結で境界なしの滑らかな多様体とする。$\mathrm{End}^r(M)$, $r \geq 1$, をMのC^r級写像全体の空間とする。$\mathrm{End}^r(M)$にはC^r-位相が入っている。同様に$\mathrm{Diff}^r(M)$はMのC^r級同相写像全体の空間とする。可微分写像fがC^r構造安定であるとは、次のようなfの$\mathrm{End}^r(M)$における近傍ひが存在することで

ある。U内の任意のgについて$fh=hg$となるMの同相写像が存在する。さらに、次のことを定義する。$f\in End^r(M)$について$Per(f)=f$のすべての周期点の集合、$\Omega(f)=$非遊走点全体の集合、$S(f)=f$の特異点全体の集合$=\{x\in M \mid Tf|T_xM$ is not injective$\}$。$\bar{L}^+(f)=$ the closure of $L^+(f)=\{\omega(x) \mid x\in M\}$。

微分同相写像について、Mañéは次のことを証明した。

$f\in Diff^r(M)$は無限小安定である。

$\Updownarrow$

$f\in Diff^r(M)$はAxiom Aと強横断性条件を満足する。[6]

この結果と[9], [11], [12]の結果を使って、次のような定理は容易に示せる。

定理A. $f\in Diff^r(M)$が無限小安定ならば、fはAxiom Aとno-cycle条件を満足する。

この定理Aに似た性質が可微分写像についても成立することを本稿では示す。それは次のものである。

定理B. $f\in End^r(M)$が無限小安定ならば、fはweak Axiom Aとno-cycle条件を満足する。

さらに、次のような結果[7], [4]を一般化できる。

定理C[7]. 絶対安定なC^r可微分写像はAxiom Aとno-cycle条件を満足する。

定理D[4]. $f\in End^r(M)$が無限小かつ構造安定ならば、fはAxiom Aとno-cycle条件を満足する。

一般化は次のようなものである：

定理E. $f \in End^r(M)$が無限小安定であり$\Sigma^+(f)$が非特異であるならば、fはAxiom Aとno-cycle条件を満足する。

定理Bの証明は次のstepに分けられる。

命題2.1. fが無限小安定ならば、$\Sigma^+(f)$はprehyperbolicである。

補題3.1. fが無限小安定ならば、$\Sigma^+(f)$についてのfiltrationが存在する。

§1でMañéによって導入された可微分写像のAxiom Aを定義する。さらに可微分写像についてweak Axiom Aを定義する。§2では無限小安定な可微分写像や可微分写像のpre-hyperbolic setを定義する。そして、命題2.1.を証明するために使われる一連の補題を説明する。§3ではFiltration Lemmaと定理Bを証明する。最後に§4で定理C, D, Eを関係づける。

1. 準備

この章では微分同相写像のものと類似の概念を可微分写像についても定義する。

定義 1．$f \in End^r(M)$ が Axiom A を満足する。

$\Updownarrow$

次のような条件を満足する continuous splitting $TM|\Omega(f) = E^s \oplus E^u$，リーマン計量 $\|\cdot\|$，定数 $K > 0$，$0 < \lambda < 1$ が存在する。

a) $(Tf)E^s \subset E^s$ $\quad (Tf)E^u = E^u$

b) $\|(Tf)^n v\| \leq K\lambda^n \|v\|$ for $x \in \Omega(f)$, $v \in E^s_x$, $n > 0$

$\|(Tf)^n v\| \geq K\lambda^{-n} \|v\|$ for $x \in \Omega(f)$, $v \in E^u_x$, $n > 0$

c) If $x_1 \neq x_2 \in \Omega(f)$ and $f(x_1) = f(x_2) = x$ then $E^s_x = \{0\}$

d) $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$

e) $S(f) \cap \Omega(f) = \phi$ 。

定義 2．$f \in End^r(M)$ が weak Axiom A を満足する。

$\Updownarrow$

Axiom A の条件 a), b), c), d) を満足する $TM|\Omega(f) = E^s \oplus E^u$，リーマン計量 $\|\cdot\|$，定数 $K > 0$，$0 < \lambda < 1$ が存在する。

$f \in End^r(M)$ が Axiom A を満足するならば、$\Omega(f)$ は disjoint compact sets $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ に分解できる[10],[14]。

2．無限小安定な可微分写像

この章では、$f \in End^r(M)$ を固定して取り扱う。$\Lambda \subset M$ をコンパクト部分集合とする。このとき、$\Gamma^b(\Lambda)$ = the space of bounded sections of $TM|\Lambda$ with norm $\|\eta\| = \sup\{\|\eta(x)\| \mid x \in \Lambda\}$，$\Gamma^0(\Lambda)$ = the closed subspace of continuous sections とする。

$f(\Lambda)\subset\Lambda$ のとき、$T_fM|\Lambda$ = the vector bundle on Λ consisting of couples (p, v) with $p\in\Lambda$, $v\in T_{f(p)}M$ とする。$\Gamma_f^b(\Lambda)$ $(\Gamma_f^0(\Lambda))$ を $T_fM|\Lambda$ の有界（連続）sectionsの空間とする。

線型作用素 $L_f : \Gamma^b(\Lambda)\to\Gamma_f^b(\Lambda)$ を

$$L_f(\eta)=(Tf)\circ\eta-\eta\circ f \quad \text{for} \quad \eta\in\Gamma^b(\Lambda)$$

によって定義する。

定義 2.1. $f\in End^r(M)$ が無限小安定である。

$\Updownarrow$

線型作用素 $L_f : \Gamma^0(M)\to\Gamma_f^0(M)$ が surjective である。

定義 2.2. コンパクト f-不変部分集合 Λ が prehyperbolic であるとは、次のような条件を満足する continuous splitting $TM|\Lambda=E^s\oplus E^u$, リーマン計量 $\|\cdot\|$, 定数 $K>0$, $0<\lambda<1$ が存在することである。

a) $(Tf)E^s\subset E^s$ $\qquad$ $(Tf)E^u=E^u$

b) $\|(Tf)^n v\|\leq K\lambda^n\|v\|$ for $x\in\Lambda$, $v\in E_x^s$, $n>0$

$\|(Tf)^n v\|\geq K\lambda^{-n}\|v\|$ for $x\in\Lambda$, $v\in E_x^u$, $n>0$

c) If $x_1\neq x_2\in\Lambda$ and $f(x_1)=f(x_2)=x$ then $E_x^s=\{0\}$ 。

定義 2.3. コンパクト f-不変部分集合 Λ が quasi-prehyperbolic であるとは、prehyperbolic の定義の条件 a), b) を満足する $TM|\Lambda=E^s\oplus E^u$, リーマン計量 $\|\cdot\|$, 定数 $K>0$, $0<\lambda<1$ が存在することである。

Λ_i を a prehyperbolic set with $\dim E_x^u = i$ for all $x \in \Lambda_i$ とする。d をあるリーマン計量から導入された M 上の metric とする。$x \in \Lambda_i$, $\varepsilon > 0$ について local stable and unstable sets を次のように定義する。

$$W_\varepsilon^s(x) = \{ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ for } n \geq 0 \text{ and } d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ as } n \to +\infty \}$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{ y \in M \mid \text{there exists a sequence } \{y_{-n} \mid n \geq 0\} \text{ s.t. } y_0 = y,\ f(y_{-n}) = y_{-n+1} \text{ and } d(y_{-n}, x_{-n}) \leq \varepsilon \text{ for } n \geq 0 \text{ and } d(y_{-n}, x_{-n}) \to 0 \text{ as } n \to +\infty \text{ where } \{x_{-n} \mid n \geq 0\} \text{ is a sequence in } \Lambda_i \text{ that } x_0 = x \text{ and } f(x_{-n}) = x_{-n+1} \}.$$

[1], [2] のよく知られた結果より、$W_\varepsilon^\sigma(x)$ は x で E_x^σ に接していて、$W_\varepsilon^\sigma(x)$ は disc になっている ($\sigma = s, u$)。

stable set $W^s(x)$ や unstable set $W^u(x)$ は次のように定義する。$x \in \Lambda_i$ について、

$$W^s(x) = \{ y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) \to 0 \text{ as } n \to +\infty \}$$

$$W^u(x) = \{ y \in M \mid \text{there exists a sequence } \{y_{-n} \mid n \geq 0\} \text{ s.t. } y_0 = y,\ f(y_{-n}) = y_{-n+1} \text{ and } d(y_{-n}, x_{-n}) \to 0 \text{ as } n \to +\infty \text{ where } \{x_{-n}\} \subset \Lambda_i \text{ is a sequence such that } x_0 = x,\ f(x_{-n}) = x_{-n+1} \}.$$

$W^u(\Lambda_i)=\bigcup_{p\in\Lambda_i}W^u(p)$ を the unstable set of Λ_i と呼び $W^s(\Lambda_i)=\bigcup_{p\in\Lambda_i}W^s(p)$ を the stable set of Λ_i と呼ぶ。さらに、$\hat{W}^u(\Lambda_i)=W^u(\Lambda_i)-\Lambda_i$, $\hat{W}^s(\Lambda_i)=W^s(\Lambda_i)-\Lambda_i$ とする。

この章では次のことを証明する。

命題2.1. fが無限小安定ならば、$\Gamma^+(f)$ はprehyperbolicである。

命題2.1.の証明は本質的にMañé[6]によるものである。ここでは、その証明の概略を示す。証明のためには一連の補題を必要とする。

補題2.2. Λ is a prehyperbolic set for f.

$\Updownarrow$

$L_f:\Gamma^0(\Lambda)\to\Gamma_f^0(\Lambda)$ is an isomorphism.

補題2.3. If Λ is a minimal set for f then $L_f:\Gamma^0(\Lambda)\to\Gamma_f^0(\Lambda)$ is injective.

補題2.2, 2.3の証明は[6, 7]を見よ。

補題2.2, 2.3より a minimal set はprehyperbolicである。よってLemma 2[6]と同様の議論で次の補題が証明できる。

補題2.4. Given constants $0 < K_1 < K_2$; there exists a positive integer $N(K_1, K_2)$ such that if $v \in TM$ and $K_1\|v\| \le \|(Tf)^j v\| \le K_2\|v\|$ for $0 \le j \le N(K_1, K_2)$, then $v = 0$.

補題2.5. fを無限小安定な可微分写像とする。

$E_x^s = \{v \in T_xM \mid \sup_{n\ge 0}\|(Tf)^n v\| < +\infty\}$,

$E_x^u = \{v \in T_xM \mid$ if $\{x_{-n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ is a sequence satisfying $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ there exists a sequence $\{v_{-n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ such that $v_{-n} \in T_{x_{-n}}M$, $(Tf)v_{-n} = v_{-n+1}$, $v_0 = v$, $\{\|v_{-n}\| \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ is bounded $\}$. とする。

このとき、 $E_x^s + E_x^u = T_xM$ for all $x \in M$ 。

証明. $v \in T_xM$とする。もしxが無限な負の軌道をもたなければ、$E_x^u = T_xM$ である。そこで、xは少なくとも一つは無限な負の軌道をもつと仮定する。

Case 1. xはpreperiodicでないとき。

$\xi \in \Gamma_f^b(M)$ を $\xi(x_{-1}) = v$, $\xi(y) = 0$ if $y \ne x_{-1}$ where $x_{-1} \in f^{-1}(x)$ で定義する。$\eta \in \Gamma^b(M)$ を $L_f(\eta) = \xi$ となるものとする。よって $(Tf)\eta(x_{-1}) - \eta(x) = \xi(x_{-1}) = v$ 。このとき、$(Tf)^m\eta(x) = \eta(f^m(x))$, $m \ge 0$, だから$\eta(x) \in E_x^s$ である。さらに、$(Tf)\eta(x_{-1}) \in E_x^u(\{x_{-n}^{(\alpha)}\})$, ここで$\{x_{-n}^{(\alpha)}\}$は$x_{-1}^{(\alpha)} = x_{-1}$ なるxの無限な負の軌道とし $E_x^u(\{x_{-n}^{(\alpha)}\}) = \{v \in T_xM \mid$ there exists a sequence $\{v_{-n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ such that $v_{-n} \in T_{x_{-n}^{(\alpha)}}M$, $(Tf)v_{-n} = v_{-n+1}$, $v_0 = v$, $\{\|v_{-n}\| \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ is bounded.$\}$。よって $v \in E_x^s + E_x^u(\{x_{-n}^{(\beta)}\})$

したがって、$E_x^s + E_x^u(\{x_{-n}^{(\beta)}\}) = T_xM$ となる。ここで、$\{x_{-n}^{(\beta)}\}$ は x の無限な負の軌道である。$E_x^u = \bigcap_\beta E_x^u(\{x_{-n}^{(\beta)}\})$ であることに注意せよ。$E_x^s + E_x^u \neq T_xM$ と仮定する。$E_1 = E_x^s + E_x^u$ とし E_2 を $E_1 \oplus E_2 = T_xM$ となるようにとる。$\pi : T_xM \to E_1$ を E_2 にそった射影とする。$\pi(w) = 0$ となる $0 \neq w \in T_xM$ をとる。このとき $w \notin E_x^s + E_x^u$ それで $w \notin E_x^u = \bigcap_\beta E_x^u(\{x_{-n}^{(\beta)}\})$。よって $w \notin E_x^u(\{x_{-n}^{(\gamma)}\})$ なる γ が存在する。したがって $\pi(w) \neq 0$。

これは $\pi(w) = 0$ に矛盾する。

Case 2.　x が proper preperiodic、すなわち x は周期点ではないが $f^m(x)$ (m はある正整数) が周期点であるとき。

これも Case 1 と同じ議論で示せる。

Case 3.　x が周期点であり周期軌道が唯一の無限な負の軌道であるとき。

f の無限小安定性より $(Tf)^p | T_xM : T_xM \circlearrowleft$ は絶対値 1 の固有値をもたない（ここで p は x の周期である）。よって、

$E_x^s \oplus E_x^u = T_xM$ が分る。

Case 4.　x が周期点であり、いくつか無限な負の軌道をもつとき。

x が次のような負の軌道 $\{x_{-n} \mid n \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 = x$, $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$,

$x_{-1}\notin O^+(x)\}$ （ここで$O^+(x)$はxの正の軌道とする）をもつと仮定する。周期点のprehyperbolicityより $0\neq v\in T_xM$ は$v=v^s\oplus v^u$, $v^s\in E_x^s$ に分解できる。$\{x_{-n}^{(\alpha)}\}$を$x_{-1}^{(\alpha)}=x_{-1}$なるxの無限な負の軌道とすると$v^u\in E_x^s+E_x^u(\{x_{-n}^{(\alpha)}\})$となることを示す。$\xi\in\Gamma_f^b$を $\xi(x_{-1})=v^u$, $\xi(y)=0$ if $y\neq x_{-1}$ で定義する。$L_f(\eta)=\xi$となる$\eta\in\Gamma^b$をとる。このとき$\eta(x_{-1})\in E_{x_{-1}}^u$ かつ$\eta(x)\in E_x^s$。よって $v^u=(Tf)\eta(x_{-1})-\eta(x)\in E_x^s+\bigcap_\alpha E_x^u(\{x_{-n}^{(\alpha)}\})$。それゆえ $v\in E_x^s+\bigcap_\beta E_x^u(\{x_{-n}^{(\beta)}\})$ ，ここで$\{x_{-n}^{(\beta)}\}$は$x_{-1}^{(\beta)}\notin O^+(x)$なる$x$の無限な負の軌道である。同様の議論の繰返しによって $v\in E_x^s+E_x^u$ 。

補題2.6. fを無限小安定な可微分写像とする。$\lambda^\sigma(x)=\dim E_x^\sigma-\dim(E_x^s\cap E_x^u)$, $\sigma=s,u$，ここでE_x^σは補題2.5.のものとする。$\Delta=\{x\in M\mid x$ has at least one infinitely negative orbit under $f\}$。このとき、次のような条件を満足する定数$L>0$が存在する。

(a) 各$x\in\Delta$について $\|(Tf)^n|S_x^s\|\leq L$ for $n\in\mathbb{Z}^+$, $\dim S_x^s=\lambda^s(x)$ なる部分空間$S_x^s\subset T_xM$ が存在する。

(b) $x\in\Delta$の各負の軌道$\{x_{-n}\}$について次のような部分空間列$\{S_{x_{-n}}^u\}$が存在する。$S_{x_{-n}}^u\subset T_{x_{-n}}M$, $(Tf)|S_{x_{-n}}^u$ は an isomorphism from $S_{x_{-n}}^u$ to $S_{x_{-n+1}}^u$, $\dim S_x^u=\lambda^u(x)$

$\|T^{-n}(x_{-n})|S^u_x\| \le L$ for $n \in \mathbb{Z}^+$ ，ここで，

$T(x_{-n}) = Tf|S^u_{x_{-n}}$ ，$T^k(x_{-n}) = T(x_{-n+k-1})\circ\cdots\circ T(x_{-n})$

for $k \in \mathbb{Z}^+$ ， $T^{-k}(x_{-n}) = [T^k(x_{-n})]^{-1}$ 。

証明．Lemma 5[6]の証明と同様の議論で示せる。

補題2.7. $\Lambda = \{x \in \Delta \mid E^s_x \cap E^u_x = \{0\}\}$，ここで$\Delta$は補題2.6のものである。このとき、$\Sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} f^n(\Lambda)$ はprehyperbolic for f である。

証明．補題2.2, 2.3よりΛとΣはnon-empty である。補題2.6やΣの定義より$E^s_x = S^s_x$，$E^u_x = S^u_x$ さらに$(Tf)E^s_x \subset E^s_{f(x)}$ $(Tf)E^u_x = E^u_{f(x)}$ for all $x \in \Sigma$。補題2.4，2.6より正整数n_0が存在する。すべての$x \in \Sigma$ についての$\|(Tf)^n|E^s_x\| \le \frac{1}{2}$ となる$0 \le n(x) \le n_0$が存在する。よって$\|(Tf)^n|E^s_x\| \le C\lambda^n$ for all $x \in \Sigma$，$n \in \mathbb{Z}^+$ となる定数$C>0$，$0<\lambda<1$ の存在が示せる。同様にして$m((Tf)^n|E^u_x) \ge \bar{C}(\bar{\lambda})^{-n}$ for all $x \in \Sigma$，$n \in \mathbb{Z}^+$なる定数$\bar{C}>0$，$0<\bar{\lambda}<1$の存在も証明できる。ここで$m(\cdot)$はminimum norm of linear map である。ΣがコンパクトでありE^s, E^uが連続であることは容易に示せる。よって、Σがquasi-prehyperbolic set であることが分る。それゆえ$x_1, x_2 \in \Sigma$，$x_1 \ne x_2$かつ$f(x_1) = f(x_2) = x$ のとき$E^s_x = \{0\}$であることを示せば十分である。$L_f : \Gamma^0(\Sigma) \to \Gamma^0_f(\Sigma)$ はsurjectiveだから、

$L_f:\Gamma^b(\Sigma)\to\Gamma_f^b(\Sigma)$ も surjectiveである。$x_1, x_2\in\Sigma$，$x_1\neq x_2$ かつ $f(x_1)=f(x_2)=x$ と仮定する。$v\in E_x^s$ について $\xi\in\Gamma_f^b(\Sigma)$ を $\xi(x_1)=v$，$\xi(x_2)=2v$，$\xi(x)=0$ if $x\neq x_1, x_2$ で定義する。$\eta\in L_f^{-1}(\xi)$ とする。このとき．

(1) $(Tf)\eta(x_1)=v+\eta(x)$

(2) $(Tf)\eta(x_2)=2v+\eta(x)$

(3) $(Tf)^n\eta(y_i)=\eta(x_i)$ if $f^n(y_i)=x_i$, $i=1,2$

(4) If $f^n(x)\neq x_1, x_2$ for all $n\geq 0$ then $(Tf)^n\eta(x)=\eta(f^n(x))$。

次の2つの場合がある。

Case 1. $f^n(x)\neq x_1, x_2$ for all $n\geq 0$ 。このとき、(4)より $\eta(x)\in E_x^s$。よって、$\eta(x)+v$，$\eta(x)+2v\in E_x^s$。したがって、(1), (2)から $\eta(x_i)\in E_{x_i}^s$ for $i=1,2$。しかし(3)より $\eta(x_i)\in E_{x_i}^u$, $i=1,2$。それゆえ $v=0$。

Case 2. x_1はxの周期軌道の中にあるとき。このとき、x_2は無限な負の軌道をもち、それは周期軌道ではない。周期点、xのprehyperbolicityより $v=0$ を示すことは容易である。

$\Sigma_j=\{x\in\Sigma\mid\lambda^u(x)=j\}$ とおくと、Σ_jはコンパクトであり f-不変である。

補題2.8. Σ_j は local product structure をもつ。

証明．Σ_jがisolatedであることを示せばよい。Σ_jがisolatedであると仮定する。このときΣ_jのコンパクトな近傍Uで$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)=\Sigma_j$となるものが存在する。このとき、十分小さい$\varepsilon>0$について、$x\in W^s_\varepsilon(y)\cap W^u_\varepsilon(z)$, $y,z\in\Sigma_j$ならば$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)=\Sigma_j$である。したがって、$\Sigma_j$がisolatedであることを示す。$TM|\Sigma_j=E^s\oplus E^u$をprehyperbolic splitting with $\dim E^u_x=j$ for all $x\in\Sigma_j$とする。Σ_jの近傍Uとcontinuous subbundles E_1, E_2 of $TM|U$を$E_1\oplus E_2=TM|U$, $E_1|\Sigma_j=E^s$, $E_2|\Sigma_j=E^u$となるようにとる。$\pi_i: TM|U\to E_i$, $i=1,2$, をこのsplittingに関する標準射影とする。

$x\in U$, $\varepsilon>0$について、

$$C_\varepsilon(x)=\{v\in T_xM \mid \|\pi_2 v\|\le\varepsilon\|\pi_1 v\|\}$$

$$S_\varepsilon(x)=\{v\in T_xM \mid \|\pi_1 v\|\le\varepsilon\|\pi_2 v\|\}$$

とする。

今、$\|(Tf)|E^s_x\|\le\lambda$, $\|(Tf)v\|\ge\lambda^{-1}\|v\|$ for $v\in E^u_x$, $x\in\Sigma_j$を満足するリーマン計量$\|\cdot\|$と$0<\lambda<1$が存在すると仮定してよい。$\varepsilon>0$が十分小さいとき、次の条件を満足する$\lambda<\bar\lambda<1$がとれる。$x\in\Sigma_j$について、$v\in C_\varepsilon(x)$, $w\in S_\varepsilon(x)$は

$$\|(Tf)v\|\le\bar\lambda\|v\| \quad , \quad \|(Tf)w\|\ge\bar\lambda^{-1}\|w\|$$

$$(Tf)(S_\varepsilon(x))\subset S_{\bar\lambda^2\varepsilon}(f(x)) , \quad (Tf)^{-1}(C_\varepsilon(f(x)))\subset C_{\bar\lambda^2\varepsilon}(x)$$

を満足する。ここで、$(Tf)^{-1}(C_\varepsilon(f(x)))$は$C_\varepsilon(f(x))$の逆像と$T_xM$との交わりである。

連続性より次のような性質を満足する$\bar{\lambda} < \mu < 1$が存在する近傍がとれる。

(1) $\|(Tf)v\| \leq \mu \|v\|$

(2) $\|(Tf)w\| \geq \mu^{-1} \|w\|$

(3) $(Tf)S_\varepsilon(x) \subset S_{\mu^2\varepsilon}(f(x))$

(4) $(Tf)^{-1}(C_\varepsilon(f(x))) \subset C_{\mu^2\varepsilon}(x)$

for all $x \in U$, $v \in C_\varepsilon(x)$, $w \in S_\varepsilon(x)$。

$\Sigma_j^s = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$, $E_1^{(n)} = (Tf)^{-n}(E_1)/\Sigma_j^s$ とする。ここで、$E_{1,x}^{(n)} = (Tf)^{-n}(E_{1,f^n(x)})$ である。Tichonoffの定理より、数列 $\{n_j \mid j \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{Z}^+$ と subbundle $\widetilde{E}_1$ of $TM|\Sigma_j^s$ ですべての$x \in \Sigma_j^s$について$\widetilde{E}_{1,x} = \lim_{j \to \infty} E_{1,x}^{(n_j)}$となるものが存在する。

各点で $(Tf)\widetilde{E}_1 \subset \lim_{j \to +\infty} (Tf)^{-n_j+1}(E_1)/\Sigma_j^s$ かつ

$$(Tf)^{-n_j+1}(E_1)/\Sigma_j^s \subset \bigcup_{x \in \Sigma_j^s} C_\varepsilon(x) \quad \text{である。}$$

よって $(Tf)\widetilde{E}_1 \subset \bigcup_{x \in \Sigma_j^s} C_\varepsilon(x)$ かつ(1)より

$\|(Tf)v\| \leq \mu \|v\|$ for all $v \in \widetilde{E}_1$ である。

同じ議論の繰返しから

(5) $\|(Tf)^n v\| \leq \mu^n \|v\|$ for all $v \in \widetilde{E}_1$, $n \in \mathbb{Z}^+$。

それゆえ $\widetilde{E}_{1,x} \subset E_x^s$ for all $x \in \Sigma_j^s$ である。もし $0 \neq v \in E_x^s$ かつ $v \notin \widetilde{E}_{1,x}$ ならば、$v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \widetilde{E}_{1,x}$, $v_2 \in S_\varepsilon(x)$, $v_2 \neq 0$ と書ける。(1), (2) より

(6) $\|(Tf)^n v\| \geq \big| \|(Tf)^n v_2\| - \|(Tf)^n v_1\| \big|$

$$\geq \mu^{-n}\|v_2\| - \mu^{n}\|v_1\| \quad \text{for all } n \geq N ,$$

ここでNは十分大きい。$v_2 \neq 0$だから、$\lim_{n\to+\infty}\|(Tf)^n v\| = +\infty$ となる。これは$v \in E_x^s$ に矛盾する。それゆえ、

(7) $\tilde{E}_{1,x} = E_x^s \quad \text{for all } x \in \Sigma_j^s$ 。

写像$\Sigma_j^s \ni x \mapsto E_x^s$ の連続性を証明するために$E_{x_n}^s$がある部分空間$E \subset T_xM$に収束するように点列$\{x_n\}$をとる。(5), (6)より

$\|(Tf)^n|E\| \leq \mu^n \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}^+$ 。よって$E \subset E_x^s$。

ところで $\dim E_x^s = \dim \tilde{E}_{1,x} = \dim \tilde{E}_{1,x_n} = \dim E$ 。したがって $E = E_x^s$。 $\Sigma_j^0 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ とする。(7)と補題2.5, 2.6より $E_x^s \oplus E_x^u = T_xM$ for all $x \in \Sigma_j^0$ 。ゆえに次のような continuous subbundle $\tilde{E}_2$ of $TM|\Sigma_j^0$ が定義できる:

$\tilde{E}_{2,x} = E_x^u$, $\|(Tf)^n v\| \geq \mu^{-n}\|v\|$ for all $v \in \tilde{E}_2$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 。

すなわちΣ_j^0は quasi-prehyperbolic である。ところがfの無限小安定性から、Σ_jは最大の prehyperbolic set with $\dim E_x^u = j$ for all $x \in \Sigma_j$ である。したがって$\Sigma_j = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ 。

N_jを$W^u(\Sigma_j)$ の proper fundamental domain とする[3]。補題2.8からN_jの存在は保証される。$P_j = \bigcup_{n\geq 0} f^n(N_j)$ とする。

補題2.9. $\overline{P}_j \cap \Sigma_i \neq \phi$ ならば$j \geq i$である。さらに、$\hat{W}^u(\Sigma_j) \cap W^s(\Sigma_j) = \phi$ である。

証明. [6] のLemma 8を見よ。

補題2.10. $D_n=\bigcup_{j\leq n}W^u(\Sigma_j)$ はアトラクターである。

証明. Lemma 9 [6] を見よ。

命題2.1の証明　$n_0<\cdots<n_k$ を $\Sigma_{n_j}\neq\phi$, $j=0,\cdots,k$ なる整数とする。帰納法により、$\omega(x)\cap\Sigma_{n_j}\neq\phi$ ならば $\omega(x)\subset\Sigma_{n_j}$ であることを証明する。$j=0$ のときは Lemma 9 [6] の議論から $\Sigma_{n_0}=D_{n_0}$ はアトラクターである。今 Σ_{n_j} について真であると仮定する。$\omega(x)\cap\Sigma_{n_{j+1}}\neq\phi$ と仮定する。$\bigcap_{n\geq 0}f^n(U)=D_{n_j}$, $U\cap\Sigma_{n_{j+1}}=\phi$, $f(U)\subset U$ となる D_{n_j} のコンパクトな近傍 U がとれる [8]。$x\in W^s(\Sigma_{n_{j+1}})$ ならば、やることはない。$x\notin W^s(\Sigma_{n_{j+1}})$ ならば、$O^+(x)\cap W\neq\phi$, ここで W は $N_{n_{j+1}}$ の任意の近傍である。しかし補題2.9の議論から $f^r(W)\subset U$ なる整数 $r>0$ が存在する。よって、十分大きな n について $f^n(x)\in U$ となり、$f(U)\subset \mathrm{Int}(U)$ より $\omega(x)\cap\Sigma_{n_{j+1}}=\phi$ となる。したがって $x\in W^s(\Sigma_{n_{j+1}})$ よって $\omega(x)\subset\Sigma_{n_{j+1}}$。

3. Filtration Lemma と 定理Bの証明

最初にいくつかの定義を与える。

定義. $\Gamma^+(f)\subset\Sigma$ である total prehyperbolic set Σ のスペクトル分解 $\Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_k$ を考える。$L_i=\Gamma^+(f)\cap\Sigma_i$ とする。

$L_i\gg L_j \Leftrightarrow \hat{W}^u(L_i)\cap\hat{W}^s(L_j)\neq\phi$ によって $\{L_i\}$ 上に半順

序$\gg$を定義する。$L_{i_1}\gg\cdots\gg L_{i_{r+1}}=L_{i_1}$なる列$\{L_{i_j}\}$が存在するならば、半順序は$r$-$\Gamma^+$-cycleをもつと言う。$\gg$が$\Gamma^+$-cycleをもたないならば、$\gg$は全順序$>$に拡張できる。

補題3.1. fが無限小安定ならば、$\Gamma^+(f)$についてのfiltrationが存在する。すなわち、次のような性質をもつMのコンパクト部分集合の列$\phi=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$が存在する。

(1) $f(M_i)\subset \mathrm{Int}(M_{i-1})$

(2) $L_i\subset \mathrm{Int}(M_i-M_{i-1})$

(3) $L_i=\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(M_i-M_{i-1})$

ここで、$\Gamma^+(f)=L_1\cup\cdots\cup L_n$はdisjointなコンパクト$f$-不変集合への分解である[8]。

この補題を証明するために$\Gamma^+(f)$がlocal product structureをもつことを示す。この性質の証明のためには次のような命題が必要である。

命題3.2. $\Gamma^+(f)$がprehyperbolicならば$\overline{Per(f)}=\Gamma^+(f)$である。

命題3.3. $\overline{Per(f)}$がprehyperbolicならば$\overline{Per(f)}$はlocal product structureをもつ。

これらの命題の証明は[18] 7,8章の微分同相写像の場合と同様である。

補題3.1の証明。命題2.1より$\Gamma^+(f)$はprehyperbolic set

である。$\overline{\Gamma^+(f)} = \bigcup_{0 \le j \le \dim M} L_j$ を $\overline{\Gamma^+(f)}$ の分解とする。ここで、L_j は disjoint f-不変 prehyperbolic set で $\dim E^u_x = j$ for all $x \in L_j$ である。$n_0 < \cdots < n_k$ は $L_{n_i} \neq \phi$ for $i = 0, 1, \cdots, k$ なる正整数とする。命題 3.2 より $\overline{\Gamma^+(f)} = \overline{Per(f)}$ である。よって、命題 3.3 を L_{n_i} に適用できる。それで各 L_{n_i} は local product structure をもつ。Lemma 9 [6] の議論から L_{n_0} はアトラクターである。よって $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^m(M_1) = L_{n_0}$, $f(M_1) \subset \mathrm{Int}(M_1)$, $M_1 \cap (\bigcup_{j>0} \Sigma_{n_j}) = \phi$ となる L_{n_0} のコンパクト近傍 M_1 が存在する [8, 10]。さらに、$Q_2 \cap (\bigcup_{j>1} \Sigma_{n_j}) = \phi$, $L_{n_0} \cup W^u(L_{n_1}) \subset \bigcap_{m \ge 0} f^m(Q_2)$ なる $L_{n_0} \cup \overline{W^u(L_{n_1})}$ のコンパクト近傍 Q_2 がとれる。$L_{n_0} \cup W^u(L_{n_1}) = \bigcap_{m \ge 0} f^m(Q_2)$ となることを示す。$x \in \bigcap_{m \ge 0} f^m(Q_2)$ とする。このとき、$x_0 = x$, $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ かつ $x_{-n} \in Q_2$ $(n \ge 0)$ なる点列 $\{x_{-n} \mid n \ge 0\}$ がとれる。よって、$\alpha(\{x_{-n}\}) \subset Q_2$, ここで $\alpha(\{x_{-n}\}) = \{y \in M \mid \exists \{n_q\} \subset \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \lim_{q \to +\infty} x_{-n_q} = y\}$ とする。これから、$x \in L_{n_0} \cup W^u(L_{n_1})$ を示そう。$\alpha(\{x_{-n}\})$ は f-不変である。さらに、$\alpha(\{x_{-n}\}) \cap (L_{n_0} \cup L_{n_1}) \neq \phi$ である。L_{n_0} がアトラクターであることより、$\alpha(\{x_{-n}\}) \cap L_{n_0} \neq \phi$ ならば $x \in L_{n_0}$ である。各 L_{n_i} が local product structure をもつことより $W^u(L_{n_1})$ の proper fundamental domain N_{n_1} が存在する。それで、もし $\alpha(\{x_{-n}\}) \cap L_{n_1} \neq \phi$ かつ $x \notin W^u(L_{n_1})$ ならば、$V \cap L_{n_1} = \phi$ なる任意の近傍 V $(\supset N_{n_1})$ について $V \cap \{x_{-n}\} = \phi$ となる。

すなわち $\alpha(\{x_{-n}\})\cap N_{n_1}\neq\phi$。このとき $\#(M_1\cap\{x_{-n}\})=+\infty$。これは矛盾である。それゆえ $x\in W^u(\Lambda_{n_1})$。このとき、$M_1\subset M_2$, $f(M_2)\subset \mathrm{Int}(M_2)$, $\bigcap_{m\geq 0} f^m(M_2)=\Lambda_{n_0}\cup W^u(\Lambda_{n_1})$, $M_2\cap(\bigcup_{j>1}\Sigma_{n_j})=\phi$ なる $\Lambda_{n_0}\cup W^u(\Lambda_{n_1})$ のコンパクト近傍 M_2 が存在する。帰納的に上の議論を続けると filtration の定義の(1), (2)を満足する列 $\{M_i\}$ が得られる。最後に、$\Lambda_{n_{i-1}}=\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(M_i-M_{i-1})$ を確める。$x\in\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(M_i-M_{i-1})$ ならば、$x_0=x$, $f(x_{-n})=x_{-n+1}$, $x_{-n}\in M_i-M_{i-1}$ $(n\geq 0)$ なる点列 $\{x_{-n}\mid n\geq 0\}$ がとれる。このとき $\alpha(\{x_{-n}\})\subset \mathrm{Cl}(M_i-M_{i-1})$。よって $\alpha(\{x_{-n}\})\cap\Lambda_{n_{i-1}}\neq\phi$。上と同じ議論より $x\in W^u(\Lambda_{n_{i-1}})$。同様に $x\in\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(M_i-M_{i-1})$ より $\omega(x)\subset \mathrm{Cl}(M_i-M_{i-1})$。よって $\omega(x)\cap\Lambda_{n_{i-1}}\neq\phi$。命題2.1の証明の議論より $\omega(x)\subset\Lambda_{n_{i-1}}$。したがって $x\in W^u(\Lambda_{n_{i-1}})\cap W^s(\Lambda_{n_{i-1}})=\Lambda_{n_{i-1}}$ (補題2.8)。よって、$\Lambda_{n_{i-1}}=\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(M_i-M_{i-1})$。

定理B. f が無限小安定ならば、f は weak Axiom A と no-cycle 条件を満足する。

証明. 命題2.1より $\Gamma^+(f)$ は prehyperbolic である。さらに命題3.2から $\Gamma^+(f)=\overline{\mathrm{Per}(f)}$。$f$ が weak Axiom A を満足することを示すためには $\Gamma^+(f)=\Omega(f)$ を示せば十分である。補題3.1より $\Gamma^+(f)$ の filtration が存在する；M のコンパクト部分

集合の列 $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ で次の性質をもつものがとれる。

(1) $f(M_i) \subset M_i$

(2) $L_{n_{i-1}} \subset \mathrm{Int}\,(M_i - M_{i-1})$

(3) $L_{n_{i-1}} = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^m(M_i - M_{i-1})$

ここで、$\{L_{n_j}\}$ は補題3.1の証明中における $L^+(f)$ の分解である。$\Omega_i = \Omega(f) \cap (M_i - M_{i-1})$ $(i = 1, \cdots, k)$ とする。一般に $L_{n_{i-1}} \subset \Omega_i$。(1)から $f(\Omega_i) \subset \Omega_i$ $(i = 1, \cdots, k)$。もし Ω_i が f-不変であることを示せば、(3)より $\Omega_i = L_{n_{i-1}}$ である。よって、$\Omega_i \subset f(\Omega_i)$ を示せば十分である。その性質が成立しないと仮定する。このとき、$f^{-1}(x) \cap \Omega_i = \phi$ なる $x \in \Omega_i$ がとれる。$x \in \Omega(f)$ から次のような軌道の列 $\{(z_n^p) \mid p = 1, 2, \cdots, f(z_n^p) = z_{n+1}^p$ for $n \in \mathbb{Z}\}$ がとれる。その性質は $\lim_{p \to +\infty} z_0^p = x$，$\lim_{p \to +\infty} z_{n(p)}^p = x$，ここで $\{n(p)\}$ は $\lim_{p \to +\infty} n(p) = -\infty$ となる負整数の列である。$(z_n^{p(s)})$ を x のある軌道 (x_n) に収束する $\{(z_n^p)\}$ の部分点列とする。明らかに $x_n = f^n(x)$, $n \geq 0$。Ω_i が f-不変でないという仮定より、$x_n \notin M_i$ for all $n \leq N$ となる負の整数 N が存在する。よって、$z_u^{p(t)} \notin M_i$ かつ $z_{n(p(t))}^{p(t)} \in M_i$，$n(p(t)) < u < N$ なる整数 $p(t)$, u が存在する。しかし、これは矛盾である。それゆえ、$L^+(f) = \Omega(f)$。最後に f が no-cycle 条件をもつことを示せばよい。まず、

$\Omega_i = L_{n_{i-1}} \cap \Sigma_{n_{i-1}}$ であることとLemma 8[6]における議論から f は1-cycleをもたない。そこで、f は r-cycle $(r>1)$ をもつと仮定する。今、$r=2$ の場合を考える。つまり、

(1) $\hat{W}^u(\Omega_i) \cap \hat{W}^s(\Omega_j) \neq \phi$

(2) $\hat{W}^u(\Omega_j) \cap \hat{W}^s(\Omega_i) \neq \phi$ 。

補題2.9より、(1)ならば $i>j$ 。同様に(2)ならば $j>i$ 。これは矛盾である。$r>2$ の場合も同様に矛盾を導く。これで定理Bは証明された。

4. 注意

f を無限小安定写像とする。もし $\bar{L}^+(f) \cap S(f) = \phi$ ならば定理Bより f はAxiom Aを満足する。よって、次のような結果を得る。

定理E. f が無限小安定であり $\bar{L}^+(f)$ が非特異ならば、f はAxiom Aとno-cycle条件を満足する。

定理Eは定理C, Dの一般化であることを注意しておく。なぜならば、f の絶対安定性から f の無限小安定性と $\bar{L}^+(f) \cap S(f) = \phi$ は導かれる[7]。さらに、定理D[4]から f の無限小安定性と構造安定性から $\bar{L}^+(f) \cap S(f) = \phi$ となる。

References

[1] M. Hirsch & C. Pugh. Stable manifolds and hyperbolic sets, Proc. Sympos. Pure Math. vol.14, Amer. Math. Soc.(1970),133-163.

[2] M. Hirsch, C. Pugh & M. Shub. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Math. 583, Springer-Verlag (1976).

[3] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh & M. Shub. Neighborhoods of hyperbolic sets. Invent. Math.9(1970), 121-134.

[4] H. Ikeda. On stability of endomorphisms. Preprint.

[5] R. Mañé. Quasi-Anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 229(1977) 351-370.

[6] R. Mañé. On infinitesimal and absolute stability of diffeomorphisms. Lecture Notes in Math. 468, Springer-Verlag (1975), 151-161.

[7] R. Mañé. Axiom A for endomorphisms. Lecture Notes in Math. 597, Springer-Verlag (1977) 379-388.

[8] S. Newhouse. Hyperbolic limit sets. Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972) 125-150.

[9] J. Palis. A note on Ω-stability. Proc. Sympos. Pure Math. vol.14, Amer. Math. Soc. (1970) 221-222.

[10] F. Przytycki. On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A. Studia Math. 60 (1977) 61-77.

[11] J. Robbin. A structural stability theorem. Ann. of Math. 94 (1971) 447-493.

[12] C. Robinson. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. J. Diff. Eq. 222 (1976) 28-73.

[13] M. Shub. Global Stability of Dynamical Systems. Springer-Verlag (1987) .

[14] S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Soc. (1967) 747-817.