数理解析研究所講究録
第 696 巻 1989 年 144-156

非可換2次元トーラスの微分同相について

慶大理工　小高一則 (Kazunori Kodaka)

非可換2次元トーラス

$\mathbb{T}$ を1次元トーラスとし、φ を、$\varphi(z)=e^{2\pi i\theta}z$, $z\in\mathbb{T}$ により定まる $\mathbb{T}$ 上の微分同相とする。ここで θ は無理数とする。$C(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の連続関数全体からつくられる可換 C^* 環とし、σ を φ より定まる $C(\mathbb{T})$ 上の $\mathbb{Z}$-action とする。

定義 $C(\mathbb{T})$ と σ よりつくられる crossed product $C(\mathbb{T})\times_\sigma\mathbb{Z}$ を非可換2次元トーラスあるいは無理数回転 C^* 環という。これを A_θ で表わす。

A_θ の2つの unitary element u, v を次のように定義する。

$$u(n,z)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

$$v(n,z)=\begin{cases}z & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

このとき u, v の定義より

$$uv = e^{2\pi i\theta} vu$$

であり、A_θ は、u, v より生成される C^*-環と考えることができる。A_θ の state τ を

$$\tau(x) = \int_{\mathbb{T}} x(0, z)\, dz \qquad x \in l^1(\mathbb{Z}, C(\mathbb{T}))$$

と定める。簡単な計算により τ は A_θ の trace すなわち

$$\tau(xy) = \tau(yx) \qquad x, y \in A_\theta$$

であることがわかる。

A_θ については、次のようなことが知られている。

(1) A_θ は simple である。

(2) τ は unique tracial state である。

(3) $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}[1] \oplus \mathbb{Z}[p]$

ここで p は Rieffel projection (cf.[7]) であり

$\tau(p) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta \cap [0, 1]$

(4) $K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[v]$

微分同相写像

A_θ の dense $*$-部分環 A_θ^∞ を

$$A_\theta^\infty = \left\{ \sum C_{mn} u^m v^n \;\middle|\; \{C_{mn}\} \in S(\mathbb{Z}^2) \right\}$$

と定める。ここで $S(\mathbb{Z}^2)$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の急減少関数全体とする。

δ_1, δ_2 を A_θ の canonical closed derivation で、

$$\delta_1(u) = 2\pi i u, \qquad \delta_1(v) = 0$$
$$\delta_2(u) = 0, \qquad \delta_2(v) = 2\pi i v$$

と定義されているとする。δ_1 と δ_2 とは可換であり、1-parameter group の generator になっている。このとき、

$$A_\theta^\infty = \bigcap_{m,n\geqq 0} \mathcal{D}(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$$

である。ここで $\mathcal{D}(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$ は任意の非負整数 m, n に対する作用素 $\delta_1^m \circ \delta_2^n$ の定義域とする。

定義　A_θ の自己同型 α が微分同相である。

$$\Longleftrightarrow \alpha(A_\theta^\infty) = A_\theta^\infty$$

A_θ の微分同相には次のようなものがある。

例1、$w \in A_\theta^\infty$ を unitary element とする。任意の $x \in A_\theta$ に対して、

$$Ad(w) : x \longmapsto w x w^*$$

と定める。

例2、$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、α_h を

$$\alpha_h(u) = u^a v^c, \qquad \alpha_h(v) = u^b v^d$$

と定める。

例3、$s, t \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_{(s,t)}$ を

$$\alpha_{(s,t)}(u) = e^{2\pi i s} u, \qquad \alpha_{(s,t)}(v) = e^{2\pi i t} v$$

と定める。

A_θ の微分同相について Elliott が次のことを示した。

定理 (Elliott) θ を generic とする。このとき、θ に対応する A_θ の任意の微分同相 α に対して、

$$\exists w \in A_\theta^\infty \text{ unitary element} \quad \exists h \in SL(2, \mathbb{Z})$$

$$\exists s, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha = Ad(w) \circ \alpha_h \circ \alpha_{(s,t)}$$

ここで θ が generic であるとは、次のことである。

定義 θ が generic である。

$$\Longleftrightarrow \exists\, C > 0,\ \exists\, r > 1$$

$$\text{s.t.} \ |e^{2\pi i n\theta} - 1| \geqq \frac{C}{n^r}$$

$$\text{for} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

すなわち、θ は、Liouville number ではないということである。

主結果

θ が generic のとき、A_θ の微分同相については、Elliott の結果がある。そこで、この節では、θ が non-generic のとき、A_θ の微分同相について、1つの結果を示す。

A_θ の任意の自己同型 α に対して、$\tilde{\tau}$ を τ より定まる crossed product $A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z}$ 上の tracial state とする。$\tilde{\tau}$ のつくり方は、τ のつくり方と同じであり、τ が unique であること

より、$\tilde{\tau}$ が tracial state であることがわかる。また $\tilde{\tau}_*$ を $\tilde{\tau}$ より定まる $K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})$ から $\mathbb{R}$ への homomorphism とする。

補題1、α を A_θ の自己同型で、$\alpha = Ad(w) \circ \alpha_{h} \circ \alpha_{(s,t)}$ という形をしているとする。このとき、

$$\alpha \text{ が inner} \iff \alpha_* = Id \text{ on } K_1(A_\theta)$$
$$\text{かつ } \tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

(証明) $\Longrightarrow$ は明らか。そこで $\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ かつ $\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ を仮定する。このとき、$\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ より、$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。よって $\alpha = Ad(w) \circ \alpha_{(s,t)}$。

次に Pimsner [6, Theorem 3] より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}s + \mathbb{Z}t$$

ところが仮定より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

だから、$s, t \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$。

従って $\exists\, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{s.t. } s = k + l\theta, \quad t = m + n\theta$$

そこで $z = u^n v^{-l}$ とおくと

$$\begin{aligned} z u z^* &= u^n v^{-l} u v^l u^{-n} \\ &= e^{2\pi i l\theta} u \\ &= e^{2\pi i s} u \end{aligned}$$

$$z v z^* = u^n v^{-l} v v^l u^{-n}$$
$$= e^{2\pi i n\theta} v$$
$$= e^{2\pi i t} v$$

ゆえに、$\alpha_{(s,t)} = Ad(z)$，すなわち α は inner である。

（証終）

可換C^*環$C(\mathbb{T})$と周期1の$\mathbb{R}$上の連続関数全体がつくるC^*環とを同一視する。

補題2．A_θ上の自己同型αを$\alpha(u) = f(v)u$，$\alpha(v) = v$と定義する。ここでfは$C(\mathbb{T})$の unitary element とする。このとき、$f \in C^\infty(\mathbb{T})$ならば、$\alpha$は$A_\theta$の微分同相である。

（証明）任意の$x \in A_\theta^\infty$に対して、$\alpha(x) \in A_\theta^\infty$を示せば十分である。

$x = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} C_{mn} u^m v^n$とする。ここで$\{C_{mn}\} \in S(\mathbb{Z}^2)$。このとき

$$\alpha(x) = \sum C_{mn}\, \alpha(u)^m \alpha(v)^n$$
$$= \sum C_{mn} f(v) f(e^{2\pi i\theta} v) \cdots f(e^{2\pi i(m-1)\theta} v) u^m v^n$$

任意の自然数kに対して、

$$y_k = \sum_{|m|,|n| \leq k} C_{mn} f(v) f(e^{2\pi i\theta} v) \cdots f(e^{2\pi i(m-1)\theta} v) u^m v^n$$

とかくと、

$y_k \in D(\delta_j)$　$j = 1, 2$。また、$\|y_k - \alpha(x)\| \longrightarrow 0$　$k \longrightarrow \infty$。

$\{C_{mn}\} \in S(\mathbb{Z}^2)$，$|f(t)| = 1$　$\forall t \in \mathbb{R}$なので$\{\delta_j(y_k)\}_{k=1}^\infty$は Cauchy sequence になる。従ってδ_jが closed なので

$$\alpha(x) \in D(\delta_j) \quad j = 1, 2.$$

同様の議論により　$\alpha(x) \in D(\delta_1{}^m \circ \delta_2{}^n)$　$\forall m, \forall n \in \mathbb{N}$。

ゆえに、　$\alpha(x) \in A_\theta^\infty$　（証終）

補題3、α は補題2と同様の自己同型とする。このとき、次の2つの条件は同値。

(1) $\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$　s.t. α^n は inner。

(2) $\exists R \in C(\mathbb{T})$ unitary element, $\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\text{s.t.}\quad [f(t)]^n = R(t)R(t+\theta)^{-1}$$

for $\forall t \in \mathbb{R}$。

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2)：α^n は inner だから、$\alpha^n = Ad(w)$。

ここで $w \in A_\theta$ は unitary element。一方 $\alpha(v) = v$。

よって、$vw = wv$。

ゆえに、$w \in C^*(v)$。

ここで $C^*(v)$ は v より生成される C^*-環で $C(\mathbb{T})$ と同型。

従って $\exists R \in C(\mathbb{T})$ unitary element s.t. $w = R(v)$。

更に $\alpha(u) = f(v)^n u$ だから、

$$R(v)uR(v)^* = f(v)^n u。$$

ゆえに、　$R(v)R(e^{2\pi i\theta}v) = f(v)^n$

すなわち、　$[f(t)]^n = R(t)R(t+\theta)^{-1}$ for $\forall t \in \mathbb{R}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)：　$w = R(v)$ とすると、簡単な計算により、

$$\alpha^n = Ad(w)。$$

（証終）

補題4. A_θ の自己同型 α を $\alpha(u)=e^{2\pi i g(v)}u$, $\alpha(v)=v$ とする。ここで g は $C(\mathbb{T})$ の selfadjoint element、すなわち $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数とする。もしも、

$\int_0^1 g(t)\,dt=0$ であり、かつ任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して、

$$g(t)=k(t)-k(t+\theta)$$

を満足するような $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数が存在しないならば、任意の $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ に対して、α^n は inner でない。

(証明) 上の補題の対偶を示す。補題3により、

$\exists n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\exists R\in C(\mathbb{T})$ unitary element

s.t. $e^{2\pi i n g(t)}=R(t)R(t+\theta)^{-1}$。

R は $C(\mathbb{T})$ の unitary element だから $|R(t)|=1$ $\forall t\in\mathbb{R}$。

このとき $\exists k$ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数(周期1とは限らない)

s.t. $R(t)=e^{2\pi i k(t)}$ $\forall t\in\mathbb{R}$。

よって

$$e^{2\pi i n g(t)}=e^{2\pi i(k(t)-k(t+\theta))}$$

$$ng(t)=k(t)-k(t+\theta)+m(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

ここで m は $\mathbb{R}$ 上の整数値関数。g, k が連続だから、m も連続。よって m はある整数とみなせる。次に、

$R(t+1)=R(t)$ より、$k(t+1)-k(t)=l(t)$。ここで l は整数値関数。k は連続だから、l も連続。

よって l も、ある整数とみなせる。 $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\tilde{k}(t) = k(t) - lt$$

とかくと、

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t+1) &= k(t+1) - l(t+1) \\ &= k(t) - lt \\ &= \tilde{k}(t)。\end{aligned}$$

よって、$\tilde{k}$ は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 の連続関数。

更に、$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta) &= k(t) - lt - (k(t+\theta) - l(t+\theta)) \\ &= k(t) - k(t+\theta) + l\theta \\ &= n g(t) - m + l\theta。\end{aligned}$$

$\int_0^1 g(t)\, dt = 0$ なので

$$\int_0^1 (\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta))\, dt + m - l\theta = 0。$$

$\tilde{k}$ は周期 1 をもつので $\int_0^1 (\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta))\, dt = 0$。

ゆえに、

$$m - l\theta = 0$$

すなわち $\quad l = m = 0$。

従って、k は周期 1 をもつ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数であり、

$$n g(t) = k(t) - k(t+\theta) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満足する。　　　　　　　　　　　（証終）

正の整数よりなる数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$n_1 = 1 \ , \ n_{j+1} = 2^{n_j} + n_j + 1$$

と定める。また、

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n_j}$$

と定め、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{j} 2^{-n_j} \dfrac{1 - e^{2\pi i n_j \theta}}{|1 - e^{2\pi i n_j \theta}|} & n = n_j \\ \dfrac{1}{j} 2^{-n_j} \dfrac{1 - e^{-2\pi i n_j \theta}}{|1 - e^{-2\pi i n_j \theta}|} & n = -n_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。このとき任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$|e^{2\pi i n_j \theta} - 1| < 2^{-n_j}$$

なので、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{|n| \to \infty} |n|^k |a_n| = 0$$

となる。従って

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$$

とおくと、

$$g \in C^{\infty}(\mathbb{T}) \text{ であり、} \int_0^1 g(t)\, dt = a_0 = 0$$

となる。

補題5. θ, g は上で定めたものとする。このとき任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数 k は存在しない。

(証明) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数 k が存在するとする。

k の Fourier series を $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n t}$ とすると、

$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$ より　$a_n = (1-e^{2\pi i n\theta})b_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

従って、　$b_n = \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$　$n\neq 0$。

よって　$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}} e^{2\pi i n t}$。

k は連続だから、k の Fourier series は Cesàro summable。

従って、　$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$ は Cesàro summable。

ところが $\{a_n\}$ の定義より $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$ は Cesàro summable でないことがわかり、矛盾。　(証終)

定理6. θ, g は上で定めたものとする。A_θ の自己同型 α を $\alpha(u) = e^{2\pi i g(v)}u$, $\alpha(v)=v$ とおくと、α は A_θ の微分同相であり、$\forall w\in A_\theta^\infty$ unitary element, $\forall h\in SL(2,\mathbb{Z})$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\alpha \neq Ad(w)\circ\alpha_h\circ\alpha_{(s,t)}$$

(証明) 補題2より α は微分同相。

$\exists w \in A_\theta^\infty$ unitary element, $\exists h \in SL(2,\mathbb{Z})$, $\exists s, t \in \mathbb{R}$

s.t. $\alpha = Ad(w) \circ \alpha_h \circ \alpha_{(s,t)}$

と仮定する。このとき、$\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ 従って、

$Ker(Id - \alpha_*) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[v]$。また、$\alpha(u)u^* = e^{2\pi i g(v)}$ だから、

1 と $e^{2\pi i g(v)}$ とを結ぶ連続微分可能な path ξ を

$$\xi(r) = e^{2\pi i r g(v)} \qquad r \in [0, 1]$$

と定めることができる。ゆえに、Pimsner [6; Theorem 3] により

$$\tilde{\tau}_* (K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta。$$

従って、補題1より α は inner。一方 補題4より α は inner ではない。これは矛盾。 (証終)

References

[1] E. G. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C^*-algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 75 (1967)

[2] G. A. Elliott, The diffeomorphism group of the irrational rotation C^*-algebra, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8 (1986), 329–334

[3] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transforms of the torus, Amer. J. Math., 83 (1961) 573–601.

[4] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics,

Springer-Verlag, 1987.
[5] G. K. Pedersen, C^*-Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.
[6] M. V. Pimsner, Ranges of traces on K_0 of reduced crossed products by free groups, Springer Lecture Notes in Math. No. 1132 (1983), 374-408.
[7] M. A. Rieffel, C^*-algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math. 93 (1981), 415-429.