数理解析研究所講究録
第 696 巻 1989 年 222-233

力学系理論と経済変動分析

早大政経　大和瀬達二（Tatsuji Owase）

この論文は、経済変動分析に役立つ力学系理論の若干の定理を示す。

1．閉軌道と循環変動

1.1. Levinson－Smith の定理　　Kaldor－安井[22]の景気循環モデルはつぎの２階の非線形微分方程式に帰着する。

$$\ddot{y}+\omega\phi(y)\dot{y}+g(y)=0 \tag{1}$$

ここでｙは静態均衡における所得からの偏差である。(1) において、$\phi(y)$は定理１の条件を満たす偶関数、そして$g(y)$も定理１の条件を満たす奇関数と仮定される。このとき定理１によって、Kaldor－安井モデルにおいて一意的な周期解が存在することを証明しうる。

定理１（Levinson－Smith [11]の定理）　　微分方程式

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{2}$$

を考える。ただし$f(x)$はつぎのような偶関数である。すなわち奇関数

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$$

にかんして、$0<x<x_0$にたいし$F(x)<0$、そして$x>x_0$にたいし$F(x)>0$かつ単調増加であるような、x_0が存在する関数である。また$g(x)$は$x>0$にたいし$g(x)>0$なるような微分可能な奇関数である。さらに

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty g(x)\,dx=\infty$$

なることが仮定される。これらの条件のもとでは、方程式(2) は一意的な周期解をもつ。

1.2. 吉沢の定理　　非線形微分方程式(1) において周期解が存在することは、定理２と定理３を結びつけても、証明できる。

定理２（吉沢[23]の定理）　　２階の微分方程式

$$d^2x/dt^2+f(x)\,dx/dt+g(x)=0 \tag{3}$$

の解の有界性について考察する。(3) の$f(x)$と$g(x)$にたいし、つぎの仮定をする。

(1) $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で連続、$F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ とし、$x \to \infty$ のとき $F(x) \to \infty$、また $x \to -\infty$ のとき $F(x) \to -\infty$。

(2) $g(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で連続、$G(x) = \int_0^x g(u)\,du$ とし、$|x| \to \infty$ のとき $G(x) \to \infty$、さらにある $x_0 \geqq 0$ が存在し、$|x| \geqq x_0$ のとき $xg(x) > 0$。

以上の仮定のもとでは、(3) のどの解 $x(t)$ も終局的に $|x(t)| < B$、$|dx(t)/dt| < B$ を満たす。ここでBは解には関係しない定数である。

定理３[10]　解軌道 γ^+ が有界で、正極限集合 $L^+(\gamma)$ が平衡点を含まないときは、$L^+(\gamma)$ は周期軌道である。

Goodwin[7]の非線形投資関数をもつ景気循環モデルはつぎの２階の非線形微分方程式によって示される。

$$\ddot{x} + X(\dot{x}) + x = 0 \tag{4}$$

ここで $x = \sqrt{(1-\alpha)/\varepsilon\theta}\ \ z/\dot{z}_0$ である。ただし z は均衡所得からの偏差、$\dot{z}_0$ は速度を測る適当な単位、そして α、ε、θ はパラメータである。Goodwin モデルにおいては、$X(\dot{x})/\dot{x}$ は一般に非対称であり、したがって $X(\dot{x})$ は通常奇関数となりえない。しかしこのような場合においても、定理４と定理３を結びつけて周期解の存在を証明しうる。

定理４[18]　微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}\right) + G(x) = 0 \tag{5}$$

を考える。ここでつぎの仮定を設ける。

(1) $g(x)$ は x の連続関数で、$|x| \to \infty$ のとき $g(x)\,\mathrm{sgn}\ x \to \infty$。

(2) $F(y)$ は y の連続関数で、$|y| \to \infty$ のとき $F(y)\,\mathrm{sgn}\ y \to \infty$。ただし、$y = dx/dt$。

このとき方程式(5) の解は終局的有界である。

1.3.　堂谷の定理　　堂谷[5] は自律系の極限周期軌道の存在条件を２つ示している。以下の系はすべて一意的かつ完全不安定な均衡をもつとする。

系 Λ_1：$dx/dt = f(x, y)$、$dy/dt = g(x)$ ―― $f(x^*, y^*) = g(x^*) = 0$ ―― にかんしてつぎの定理がえられる。

定理５　　いま (1) $\sup \partial f(x^*, y)/\partial y > 0$、$dg(x)/dx < 0$、(2) ある正の定数 δ が存在して $\sup\limits_{|x-x^*| \geq \delta} \partial f(x, y)/\partial x < 0$、$\sup\limits_{|x-x^*| \leq \delta} \partial f(x, y)/$

$\partial x < \infty$と仮定する。このときΛ_1は少なくとも一つの極限周期軌道をもつ。(1) は(1')$\sup \partial f(x^*, y)/\partial y > 0$、$dg(x)/dx > 0$で置き換えることができる。

系Λ_2：$dx/dt = f(x, y)$、$dy/dt = g(x, y) =$ —— $f(x^*, y^*)$ $g(x^*, y^*) = 0$ —— にかんしてつぎの定理がえられる。

<u>定理６</u>　いま(3) $\partial f(x^*, y)/\partial y > 0$、$\partial g(x, y^*)/\partial x < 0$、(4) ある正の定数$\delta$、$\xi$が存在して $\sup_{|x-x^*|\geq\delta} \partial f(x, y)/\partial x < 0$、$\sup_{|x-x^*|\leq\delta} |\partial f(x, y)/\partial x| < \infty$、$\sup_{|y-y^*|\geq\xi} \partial g(x, y)/\partial y < 0$、$\sup_{|y-y^*|\leq\xi} |\partial g(x, y)/\partial y| < \infty$と仮定する。このとき$\Lambda_2$は少なくとも１つの極限周期軌道をもつ。(3) は(3') $\partial f(x^*, y)/\partial y < 0$、$\partial g(x, y^*)/\partial x > 0$で置き換えることができる。

定理５と定理６は、たとえば Chang－Smyth[3]によって再定式化されたKaldorモデル、Rose[16]モデル、Schinasi[17]モデル、そして標準的IS－LMモデル（Torre[20]）に適用可能である。

1.4. <u>Poincaré－Bendixson の定理</u>　Poincaré－Bendixson の定理を経済変動分析へ応用したもっとも有名な例は Chang－Smyth[3]モデルである。 Chang－Smyth モデルはつぎの微粉方程式系によって示される。

$$\frac{dY}{dt} = \alpha\,[\,I(Y, K) - S(Y, K)\,] \qquad (6)$$

$$\frac{dK}{dt} = I(Y, K)$$

ここでＹは純国民所得、Ｋは資本ストック、Ｉは純投資、Ｓは純貯蓄、そしてαは調整係数である。 Chang－Smyth によって設けられたある仮定のもとでは、均衡点は不安定結節点か不安定渦状点かである。 Chang－Smyth モデルにおいては、境界上で (6) のベクトル場が外から内を向いており、また均衡点を取り囲んでいる、つぎのようなコンパクトな部分集合

$$D = \{(Y, K) \mid 0 \leq Y \leq Y_1,\ 0 \leq K \leq K_1\} \subset R^2$$

をみいだすことは比較的容易である。したがって定理７によってＤの内部領域に周期軌道が存在する。

<u>定理７（Poincaré－Bendixson の定理[10]）</u>　１つの閉曲線Ｃ上で勾配場$f(x)$がすべて外から内へ向かっているとする。もしこの閉曲線の内部領域Ω内にただ１つの湧点（源点あるいはソース）が存在すれば、Ω内に周期軌道が存在する。

Herrmann[9] は、微分方程式系(7) において、定理７の閉曲線Ｃとその内部領域Ωの存

在を数値的に明らかにしている。Herrmannのモデルはつぎのとおりである。

$$\dot{Y}=a\left[b\left(kY-K\right)+\delta K+C\left(Y\right)-Y\right]$$
$$\dot{K}=b\left(kY-K\right) \tag{7}$$

ここでYは産出量、Kは資本ストック、C（Y）は消費関数、そしてa、b、kおよびδはパラメータである。消費関数は所得の非線形関数であると仮定される。すなわち

$$C\left(Y\right)=C_0+H\left(Y\right)$$
$$=C_0+s_1+\frac{2}{\pi}s_1\arctan\left[\frac{\pi s_2}{2s_1}\left(Y-Y^*\right)\right] \tag{8}$$

ただしC_0は基礎消費、Y^*は（7）の均衡所得、s_1とs_2はパラメータ、そしてH（Y）はS字形関数である。したがってHerrmannのモデル(7) は、S字形非線形消費関数と線形投資関数をもったKaldor型モデルである。いまパラメータの値をつぎのように定める。$a=20$、$k=2$、$\delta=0.05$、$s_1=10$、$s_2=0.85$、$b=0.1$、$C_0=10$。この場合、均衡値は$Y^*=22.22$、$K^*=44.44$、そして固有値は$\varepsilon_1=0.13$、$\varepsilon_2=0.77$である。したがって均衡（Y^*，K^*）は不安定湧点である。Poincaré－Bendixson の定理を適用するためには、つぎの2つの条件を満足させる領域Rの存在を明らかにしなければならない。(1) Rは1つの不安定湧点である均衡を含む。(2) Rの内部から出発する(7) のすべての解はRの内にとどまらなければならない。このような領域Rを求めるには、つぎの諸点を順次直線で結べばよい。$P_1=(Y^*, K^*)+(-6, 10)$、$P_2=(Y^*, K^*)+(-6, -8)$、$P_3=(Y^*, K^*)+(-5, -10)$、$P_4=(Y^*, K^*)+(6, -10)$、$P_5=(Y^*, K^*)+(6, 8)$、$P_6=(Y^*, K^*)+(5, 10)$、$P_7=P_1$。

1.5. <u>Poincaré－Hopfの定理とPoincaré－Bendixson の定理</u>　Varian[21]によって数学的に定式化されたKaldorモデルはつぎのとおりである。

$$\dot{y}=s\left[C\left(y\right)+I\left(y, k\right)-y\right]=s\left[I\left(y, k\right)-S\left(y\right)\right]$$
$$\dot{k}=I\left(y, k\right)-I_0 \tag{9}$$

ここでyは粗国民所得、kは資本ストック、C（y）は消費関数、I（y，k）は粗投資関数、S（y）は貯蓄関数、$I(y, k)-I_0$は純投資関数、I_0（粗投資関数の独立部分）は資本ストックの減耗分を補填するための更新投資、そしてパラメータsは調整速度である。いまつぎの仮定を設ける。

<u>仮定</u>　消費関数と投資関数はyとkの連続微分可能関数である。さらに力学系(9) の定義域はある円板にたいして微分同相なR^2 のあるコンパクトな値域Bであるように選ぶことができ、そして（$\dot{y}$，$\dot{k}$）はBの境界上で内を向いている。

均衡の一意性を判定するPoincaré－Hopfの定理はつぎのとおりである。

<u>定理８　(Poincaré－Hopfの定理)</u>　$\dot{x}=f(x)$をk次元円板上の力学系とし、かつ

$\dot{x}=f(x)$ がこの円板の境界上で内を向いているとする。さらにすべての均衡 x_i^* はそれぞれのJacobi行列 $Df(x_i^*)$ が非特異であるという意味において、正則であると仮定しよう。このときそれぞれの均衡 x_i^* —— $i=1,\cdots,n$ —— の指数はつぎのように定義される。もし $\det(-Df(x_i^*))>0$ であれば、指数 $(x_i^*)=+1$ であり、そしてもし $\det(-Df(x_i^*))<0$ であれば、指数 $(x_i^*)=-1$ である。またこれらの指数は $\sum_{i=1}^{n}$ 指数 $(x_i^*)=+1$ という性質をもつ。

定理８を力学系(9) に適用してみよう。$\partial I/\partial k<0$ そして $1>\partial C/\partial y$ であるかぎり、定理８によって均衡はまさしく１つだけしか存在しない。

<u>定義</u>　$\dot{x}=f(x)$ が均衡 x^* をもつ力学系であるとしよう。もし x^* が力学系 $\dot{x}=-f(x)$ の漸近安定均衡であるならば、x^* は全不安定である。

もし $\partial I/\partial y>\partial S/\partial y$ であって、かつ調整パラメータ s が十分大きければ、力学系(9) の均衡 (Y^*, K^*) は不安定結節点か不安定渦状点かであり、したがって全不安定である。

かくて (Y^*, K^*) は力学系(9) の一意的な均衡であり、かつ全不安定である。もし $(y, k)\neq(Y^*, K^*)$ がBのどれか別の点であるならば、(y, k) の極限集合は閉軌道である（Poincaré－Bendixson の定理）。

1.6.　<u>Volterra－Lotka の方程式</u>　Goodwin[8]の成長循環モデルはつぎの方程式に帰着する。

$$\dot{v}=v[\{1/\delta-(\alpha+\beta)\}-(1/\delta)u]$$

$$\dot{u}=u[-(\alpha+\gamma)+\rho v] \tag{10}$$

ここで u は総生産物にたいする労働者の分け前、v は雇用率であり、そして α、β、γ、δ、ρ はパラメータである。いま $1/\delta-(\alpha+\beta)=a$、$1/\delta=b$、$\alpha+\gamma=c$、そして $\rho=d$ とおけば、(10)は

$$\dot{v}=(a-bu)v$$

$$\dot{u}=(-c+dv)u \tag{11}$$

となる。ここで $a>0$、$b>0$、$c>0$、そして $d>0$ と仮定される。(11)はVolterra－Lotka の方程式系である。(11)を積分すれば、

$$u^a/e^{bu}\cdot v^c/e^{dv}=K \tag{12}$$

となる。ここでKは任意定数である。(11)の軌道は(12)によって定義される曲線族であるが、これらの曲線はある閉曲線族である[2]。したがって(10)あるいは(11)においても周期解が存在する。

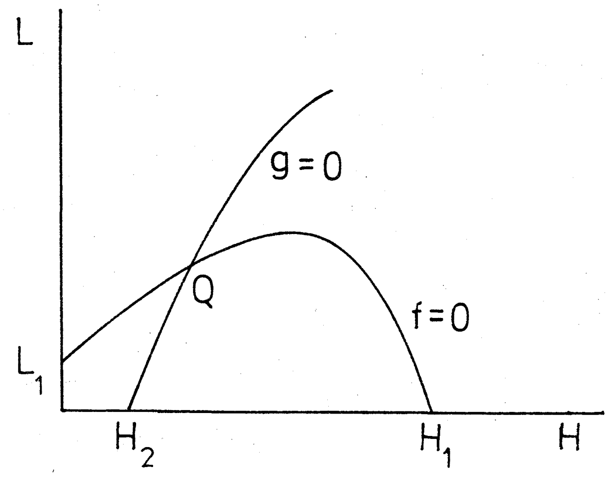

Fig. 1

1.7. Kolmogorov－Rosenzweig－Bulmerの定理　つぎの微分方程式系を考えよう。

$$dH/dt = Hf(H, L)$$
$$dL/dt = Lg(H, L) \tag{13}$$

ここでHはノウサギ、Lは大山猫である。方程式系(13)に、以下の諸条件が与えられるとする。(1) $\partial f/\partial L<0$、(2) $\partial g/\partial H>0$、(3) $\partial f/\partial H|_{L=0,\,H\ small}>0$、(4) $\partial g/\partial L<0$、(5) ある$L_1>0$にたいして$f(0, L_1)=0$、(6) ある$H_1>0$にたいして$f(H_1, 0)=0$、(7) ある$H_2>0$にたいして$g(H_2, 0)=0$、(8) $H_1>H_2$、(9) $f=0$と$g=0$はFig. 1に描かれた形状をもち、そして$Q=(H_0, L_0)$は$f=0$の上昇部分にある。(10) $a+d>0$そして$ad-bc>0$。ただし$a=H_0f_H(H_0, L_0)$、$b=H_0f_L(H_0, L_0)$、$c=L_0g_H(H_0, L_0)$、$d=L_0g_L(H_0, L_0)$である。これらの条件が与えられるとき、つぎの定理がえられる。

定理９　(Kolmogorov －Rosenzweig－Bulmer[4] の定理)　方程式系(13)の関数fとgが個体群象限$H\geqq0$, $L\geqq0$において条件(1)－(10)を満足させるとしよう。このとき個体群象限の内部にサイクルが存在する。

Medio [15]の景気循環モデルはつぎの微分方程式系で示される。

$$\dot{x} = xf_1(x, y)$$
$$\dot{y} = yf_2(x, y) \tag{14}$$

ここでxは雇用－人口比率、そしてyは国民所得に占める労働者の分け前である。方程式系(14)の関数f_1とf_2は条件(1)－(10)と同じ条件を満足させている。したがって定理9によって方程式系(14)にサイクルが存在する。

1.8. Hopf分岐つぎの定理はn次元の場合における閉軌道の存在にかんするHopf分岐定理で

ある。

定理10（Hopf分岐定理[6]）　系

$$\dot{x}=f(x,\mu)、x\in R^n、\mu\in R \tag{15}$$

が以下の性質を満たす均衡（x^*，μ_0）をもつと仮定しよう。

(1) 系(15)のJacobianは1対の純虚数の固有値をもち、そして零の実部をもつ他のいかなる固有値ももたない。

(2) $$\left.\frac{d[\mathrm{Re}\lambda(\mu)]}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0}>0$$

このとき$\mu=\mu_0$において、$x^*(\mu_0)$から分岐する周期解が存在する。

1例として、つぎのKaldorモデルの分岐値α_0を求めてみよう。

$$\dot{Y}=\alpha[I(Y,K)-S(Y,K)]$$
$$\dot{K}=I(Y,K)-\delta K \tag{16}$$

ここでYは粗国民所得、Iは粗投資、Sは粗貯蓄、Kは資本ストック、δは減価償却率、そしてαは調整係数である。もし$I_K<0$そして（I_Y-S_Y）>0であれば、均衡が局所的漸近安定であるための調整係数の条件は$\alpha<(-I_K+\delta)/(I_Y-S_Y)$である。いま$\alpha_0=(-I_K+\delta)/(I_Y-S_Y)$とする。このときもし$\alpha<\alpha_0$であれば、均衡は局所的不安定である。したがって$\alpha=\alpha_0$の場合に、均衡をめぐる閉軌道が発生する。$\alpha_0$が系(16)のHopf分岐値である。

2．カオスと不規則変動

カオス力学系による経済変動の研究は最近始まったばかりである。そして経済学者の間で、カオス的変動を引き起こす非線形力学系が、経済の不規則的変動あるいは不規則的な時系列を説明するのに役立たないであろうかと期待されている。以下において、経済学におけるカオス力学系モデルの現状の一端にふれ、これらモデルの問題点について述べようと思う。

2.1.　1次元離散時間系　経済学におけるカオス力学系にかんする最近の研究は、主として1次元差分方程式（を構成する）非線形モデルの研究である。これらのモデルにおけるカオス的トラジェクトリの存在は、一般にLi－Yorke の定理を適用することによって立証されている。しかしこの定理における数学上の必要条件は、通常、経済学において一般的とは思われないモデル構造を含んでいる。さらにまたLi－Yorke の定義に用いられた集合S（scrambled set ）はルベーグ測度0（観測にかかる確率が0）である。したがって物

理的には無意味となる[19]。このことは経済学についてもいえるであろう。

2.2. <u>２次元離散時間系</u>　２次元以上の離散時間系にかんするカオスの定理には、Diamondの定理とMarotto の定理がある。Diamond の定理を経済学へ応用したものの一つにBenhabib－Day[1]のモデルがある。しかしこのモデルは、その構築にあたって、あらかじめ数学上の条件を考慮に入れている。Diamond 自身も十分条件が２次元以上のたいていの系にたいして成立することを直接に示すことは難しいことを指摘している。高次元離散時間力学系においてカオスを探索するある概念がMarotto によって開発された。それがsnap-back repellerという概念である。力学系 $x_{t+1}=f(x_t)$、$x\in R^n$ は、もし f がsnap-back repellerをもつならば、カオス的である（<u>Marotto の定理</u>）。Herrmann[9]はつぎの離散的Kaldor型モデルにおいて、snap-back repellerをみいだすことができた。

$$
\begin{aligned}
Y_{t+1} &= a\,[\,b\,(kY_t - K_t) + \delta K_t + C(Y_t) - Y_t\,] + Y_t \\
K_{t+1} &= b\,(kY_t - K_t) + K_t
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ただし、$C(Y_t)=C_0+s_1+\frac{2}{\pi}s_1\arctan[\frac{\pi s_2}{2s_1}(Y_t-Y^*)]$ である。記号はこれまで述べたところと同じである。いまパラメータの値をつぎのように定める。$a=20$、$k=2$、$\delta=0.05$、$s_1=10$、$s_2=0.85$、$b=0.1$、$C_0=10$。均衡値は $Y^*=22.22$, $K^*=44.44$ である。離散モデル(17)において、カオスの存在を証明するには、つぎのことを示さなければならない。(1) 均衡 (Y^*, K^*) は拡大不動点である。球 $B_r(Y^*, K^*)$ の半径 r を計算しなければならない。(2) (Y^*, K^*) はsnap-back repellerである。まず固有値は $\eta_1=\varepsilon_1+1=1.13$, $\eta_2=\varepsilon_2+1=1.77$ であり、球の半径は $r=0.828$ である。つぎに所与のパラメータの値にたいして、後方反復計算をおこなうことによって、12番目の反復計算において、$B_r(Y^*, K^*)$ 内の点に到達する。ただし、計算上の誤差のため、均衡に正確に達することはできない。したがってMarotto の定理の条件が確証され、系(17)のカオス的挙動が証明された。

Lorenz[12]はつぎの２次元離散時間系のKaldor型モデルについて数値的シミュレーションをおこなった。

$$
\begin{aligned}
\triangle Y_{t+1} &= Y_{t+1} - Y_t = \alpha\,[\,C_t(Y_t) + I_t(Y_t, K_t) - Y_t\,] \\
&= \alpha\,[\,I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)\,] \\
\triangle K_{t+1} &= K_{t+1} - K_t = I_t(Y_t, K_t) - \delta K_t
\end{aligned}
\tag{18}
$$

記号はこれまで述べたところと同じである。ただし貯蓄関数 $S_t(Y_t)$ と投資関数 $I_t(Y_t, K_t)$ はつぎのとおりである。

$$
\begin{aligned}
S_t &= sY_t \\
I_t &= C\,2^{-1/(dY_t+\varepsilon)^2} + eY_t + a\,(f/K_t)^g
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$\alpha=20.00$ とした場合、長い時間(1000 程度）経った後の解の挙動はカオス的であるようにみえる。αの値を小さくしていくことによって、解の挙動はカオス的トラジェクトリから極限周期軌道に転じ、そして最後に安定均衡へ収束する。$\alpha=2.00$とした場合、極限周期軌道が発生している。注意すべきは、カオスが経済学的にほとんど正当とみなしえないαの値すなわち$\alpha=20.00$ において発生しているようにみえるということである。ＩとＳの不一致（あるいは需給の不一致）のほぼ20倍にもなるＹの反応は病的といえるであろう。

2.3. 6次元連続時間系　Lorenz[13]は３部門景気循環モデルを構築し、部門間取引によって連結された３つの振動している部門がカオス的運動を生ずる可能性を示した。このことを明らかにするにあたって、LorenzはRuelleとTakensによって与えられた乱流へのルートないしシナリオにしたがう。RuelleとTakensのシナリオをおおざっぱに述べると、つぎのごとくである。いま漸近安定不動点から出発する。これは制御パラメータの低い値に対応する。制御パラメータの値が大きくなると、第１のHopf分岐が生ずる。制御パラメータがさらに増大するとき、極限周期軌道は２次元トーラスへ分岐する。これが第２のHopf分岐である。制御パラメータがさらに大きくなると、第３のHopf分岐が生ずるが、これはストレンジアトラクターしたがってカオスを発生させる可能性がある。やや正確にいうと、第３のHopf分岐は３次元トーラスへの分岐いいかえれば３次元トーラス上の準周期運動を生ずるが、これはわずかな摂動によって破壊されるので、ストレンジアトラクターが発生する可能性がある。以下に、Lorenzの３部門景気循環モデルの分析に必要な定理を示す。

定理11 (Newhouse －Ruelle－ Takens の定理)　いま$a=(a_1,\cdots,a_n)$をトーラスT^n上の不変のベクトル場としよう。もし$n=3$であれば、aのすべてのC^2近傍において、ストレンジアトラクターをもつ開ベクトル場が存在する。もし$n\geqq 4$であれば、aのすべてのC^∞近傍において、ストレンジアトラクターをもつ開ベクトル場が存在する。

この定理をいいかえてみると、つぎのようになる。ある力学系が３次元トーラス上で準周期的となるやいなや、この系に摂動が加えられると、直ちにストレンジアトラクターが発生する可能性がある。それゆえある力学系においては、Hopf分岐が３回続いて起こった後には、カオス的挙動はすでに起こっているということがありうる。

さてLorenzの３部門景気循環モデルに戻ろう。まず部門間取引がまったくおこなわれない場合の３部門Kaldor型モデルはつぎのとおりである（記号はこれまでと同じである）。

$$\begin{aligned}\dot{Y}_i&=\alpha_i\,[I_i^{\prime}(Y_i,K_i)-S_i(Y_i)]\\ \dot{K}_i&=I_i^{\prime}(Y_i,K_i)-\delta_i K_i\end{aligned}\tag{20}$$

ただし$i=1,2,3$である。(20)は連結されていない（摂動を受けていない）３つの非線形２次元系からなる６次元連続時間系である。また部門間取引によって連結された場合の３部門Kaldor型モデルはつぎのとおりである。

$$\dot{Y}_i=\alpha_i\,[I_i^{\prime}(Y_i,K_i)-S_i(Y_i)+\sum_j b_{ij}Y_j]$$

$$\dot{K}_i = I_i^i(Y_i, K_i) + \sum_j b_{ji} Y_i - \delta_i K_i \tag{21}$$

ただし$i, j=1,2,3$ そして$i \neq j$であり、また$i < j$であれば$b_{ij} > 0$そして$i > j$であれば$b_{ij} = 0$である。(21)においては、投資需要の相互依存関係が一方向的であり、どの部門もそれ自身より低いインデックスをもった部門からのみ投資財を需要すると仮定している。(21)は部門間取引によって連結された（摂動を受けた）６次元連続時間系である。ここでつぎの仮定を設ける。

<u>仮定</u> (1)(20) によって記述される各部門i（$i=1,2,3$)において、α_i のHopf分岐値が存在する。いいかえれば、$\mathrm{tr} J_i = 0$, $\det J_i > 0$、そして$d(\mathrm{tr} j_i)/d\alpha_i > 0$（$\alpha_i$ の分岐値で評価される）。ただしJ_i は(20)の各部門iのJacobi行列である。(2) 分岐は超臨界分岐である。いいかえれば、出現する閉軌道はα_i の増加にたいして安定である。

もしこの仮定が満たされるならば、どの部門もすべて適当なパラメータ値にたいして振動しているであろう。いまやNewhouse－Ruelle－Takensの定理を使うことができる。この定理はつぎの命題を示唆するであろう。

<u>命題</u> もし連結されていない系(20)における３つのすべての部門が振動しているならば、部門間取引（摂動）の導入はストレンジアトラクターの発生を意味しているかもしれない。

Newhouse－Ruelle－Takensのシナリオによってカオスの存在を確かめようとするモデルにたいしては、数値的シミュレーションをおこなわなければならない。$\alpha = 5.0$ そして$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0.015$ にたいして、部門３の運動はリミットサイクルである。Y_1 とK_1 の運動はカオス的であろう。Y_2 とK_2 の運動はカオス的でない。

上述の議論について、若干の注意を述べておく。(1) このモデルでは、調整係数αが5.0 という比較的低い値において部門１にカオスが発生している。(2) このモデルでは、当初、自律的ないし自給自足的部門が想定されているということがこのアプローチの問題点である。いいかえれば、これらの独立部門がすべて個々に振動していると仮定された後に、摂動が加えられると、ストレンジアトラクターが発生する可能性があると議論している点である。(3) Lorenz [14] はこのタイプのアプローチを国際貿易理論にも適用している。自律的独立的経済が循環的にふるまっている場合、国際貿易を摂動と考えることができ、Newhouse－Ruelle－Takensの定理によってカオス発生の可能性を論じている。

ここでは高次元系におけるカオス発生の問題を主としてRuelle－Takensのシナリオにしたがって論じてきた。しかしある力学系がストレンジアトラクターをもつかどうかを吟味する別の方法は、横断的ホモクリニック軌道を探索することである。理論的な経済変動モデルにたいしても、このような軌道の存在を証明する方向の発展も望ましい。

参　考　文　献

[1] Benhabib, J. and Day, R.H. (1981) : "Rational Choice and Erratic Behaviour". Review of Economic Studies, 48, pp.459−471.

[2] Braun, M. (1983) : Differential Equations and Their Applications. 3rd. ed., New York -Heidelberg-Berlin : Springer.

[3] Chang, W.W. and Smyth, D.J. (1971) : "The Existence and Persistence of Cycles in a Non-Liniar Model : Kaldor's 1940 Model Re-examined". Review of Econmic Studies, 38, pp.37 −44.

[4] Coleman, C.S. (1983) : "Biological Cycles and the Fivefold Way". In : Braun, M., Coleman, C.S. and Drew, D.A. (ed.) : Differential Equation Models. New York-Heidelberg-Berlin : Springer.

[5] 堂谷昌孝(1987) :「経済変動の非線形理論とその分析方法」早稲田大学大学院経済学研究科修士論文.

[6] Gabisch, G. and Lorenz, H.-W. (1987) : Busines Cycle Theory. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo : Springer.

[7] Goodwin, R.M. (1951) : "The Non-linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles". Econometrica, 19, pp.1−17.

[8] Goodwin, R.M. (1967) : "A Growth Cycle". In : Feinstein, C.H. (ed.) : Socialism, Capitalism and Economic Growth. Cambridge : Cambridge University Press.

[9] Herrmann, R. (1985) : "Stability and Chaos in a Kaldor-Type-Model". Diskussionsbeiträge aus dem Volkswirtschaftlichen Seminar der Universität Göttingen, Beitrag Nr. 12. Göttingen.

[10] 笠原晧司(1982) :『微分方程式の基礎』. 東京 :朝倉書店.

[11] Levinson, N. and Smith, O.K. (1942) : "A General Equation for Relaxation Oscillations". Duke Mathematical Journal, 9, pp.382−403.

[12] Lorenz, H.-W. (1985) : "Some Remarks on Chaos, Econometric Predictability and Rational Expectations". In : Gabisch, G. and v. Trotha, H. (Hrsg.) : Dynamische Eigenschaften nichtlinearer Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Ökonomie, GMD-Studien, 97. Sankt Augustin : Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung MBH.

[13] Lorenz, H.-W. (1987a) : "Strange Attractors in a Multisector Business Cycle Model". Journal of Economic Behavior and Organization, 8, pp.397

—411.

[14] Lorenz, H.-W. (1987b) :"Internatinal Trade and the Possible Occurrence of Chaos". Economics Letters, 23, pp. 135—138.

[15] Medio, A. (1980) :"A Classical Model of Business Cycles". In : Nell, E. J. (ed.) : Growth, Profits, and Property. Cambridge : Cambridge University Press.

[16] Rose, H. (1967) : "On the Non-Linear Theory of the Employment Cycle". Review of Economic Studies, 34, pp. 153—173.

[17] Schinasi, G. J. (1982) : "Fluctuations in a Dynamic, Intermediate-Run IS-LM Model : Applications of the Poincaré-Bendixon Theorem". Journal of Economic Theory, 28, pp. 369—375.

[18] 清水辰次郎(1965) :『非線形振動論』. 東京 : 培風館.

[19] 高橋陽一郎(1988) :「力学系における決定性と非決定性」: 江沢洋・小嶋泉編『数理物理学の展開』. 東京 : 東京図書株式会社.

[20] Torre, V. (1977) : "Existence of Limit Cycles and Control in Complete Keynesian Systems by Theory of Bifurcatins". Econometrica, 45, pp. 1457—1466.

[21] Varian, H. R. (1979) :"Catastrophe Theory and the Business Cycle". Economic Inquiry, 17, pp. 14 —28.

[22] 安井琢磨(1955) :「自励振動と景気循環」:『均衡分析の基本問題』. 東京 : 岩波書店.

[23] 吉沢太郎(1970) :『微分方程式入門』. 東京 : 朝倉書店.