数理解析研究所講究録
第698巻 1989年 14-35

半線型高階放物型方程式の大域解について

早大 理工　星野 弘喜 (Hiroki Hoshino)
早大 理工　山田 義雄 (Yoshio Yamada)

§0. 序　Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする．

$$L = L(x, D) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

を Ω で定義された $2m$ 階楕円型作用素とし，

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

を $\partial\Omega$ で定義された m_j 階微分作用素とする．但し $m_j < 2m$．

次の半線型放物型初期値－境界値問題の大域解の存在を $L^p(\Omega)$ で考える：

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + Lu = f(D^{\alpha_1}u, D^{\alpha_2}u, \cdots, D^{\alpha_N}u), & x \in \Omega, \ t > 0 \\ B_j u = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m, & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi & x \in \Omega \end{cases}$$

作用素 A を

$$D(A) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega) : B_j u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ j = 1, 2, \cdots, m\}$$

$$Au = Lu \quad \text{for all } u \in D(A)$$

と定義する．(P)を次の様に書き直す：

$$(P') \quad \begin{cases} u_t + Au = f(u), & t > 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

但し(P)の右辺を$f(u)$と略記し，以下もそのようにする．e^{-tA}が解析的半群になる場合を考える．

$L^p(\Omega)$における放物型初期-境界値問題の大域解の存在はFriedman [1], Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5], Rothe [8] 等で研究されている．Rothe [8] は2階で$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$の場合に限り議論している．ここで$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$は$A$のスペクトルの実部を意味する．Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5] は$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$に制限しないで"安定多様体"を構成している．すなわち(P')の定常解の安定性を論じている．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$のとき$\phi \in D(A^\theta)$とし(但し，$\theta \geqq 0$)，$f$は$\nu > 1$，$0 \leqq \alpha < 1$，$v, w \in D(A^\alpha)$に対して

$$\| f(v) - f(w) \|_p \leqq \text{const.} \left(\| A^\alpha v \|_p + \| A^\alpha w \|_p \right)^{\nu-1} \| A^\alpha v - A^\alpha w \|_p$$

$$f(0) = 0$$

を満たすとする．Henry [3], Kielhöfer [5] 等は$\alpha \leqq \theta$の場合の一般論を確立している．ここでは$0 \leqq \theta \leqq \alpha$の場合の(P')の大域解の存在，自明解の安定性について考察する．我々はKielhöfer [5] と比較してαのとり得る範囲を広げることができ，αのとり方に対してのνの依存性を明らかにすることができた．詳しくは§1で述べる．Ito [4] は$\alpha = 0$であるが$\mathrm{Re}\,\sigma(A) \ni 0$の場

合も含めて安定性を論じている。我々は解のL^p-ノルムのexponential decayを出す為に$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$とする。

§1では仮定と結果—$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$のときの局所解，大域解の存在，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$のときの安定多様体の構成—を述べる。§2ではいくつかの補題を準備する。§3では$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$の場合の定理の証明を行う。§4では$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$の場合の定理の証明を行う。安定多様体の正の不変性も得られるが，Hashimoto-Niikura-Yamada [2]で使われた方法を参考にした。我々は，自明解の安定性を調べているが，u^*を

$$v_t + Av = g(v)\ ,\ t>0\ ,\qquad v(0)=\phi$$

の定常解とし，$u\equiv v-u^*$, $f(u)\equiv g(v)-g(u^*)=g(u+u^*)-g(u^*)$とおいて仮定を満たすとき，$u^*$の安定性もいえる。

なお，Weissler [10]の局所解の存在の一部の結果を含んでいることに注意しておく（$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_N=0$, $\theta=0$）。

§1. 仮定，結果

仮定1.1 （L, B_jについて）

(i) $|\mu|=2m$のときa_μは$\overline{\Omega}$で有界，一様連続，$|\mu|<2m$のときa_μはΩで有界可測．

(ii) $|\mu|\leqq m_j$なるμに対し$b_{j\mu}\in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$, $|\gamma|\leqq 2m-m_j$なる任意のγに対し$D^\gamma b_{j\mu}$は$\partial\Omega$上で有界，一様連続．

(iii) L は Ω で一様楕円型，適正楕円型，$\overline{\Omega}$ 上で強楕円型．

(iv) 任意の $x \in \Omega$ に対し $L(x, D)$，$\{B_j(x, D)\}_{j=1,2,\cdots,m}$ は補完条件を満足する．

(v) $\mathcal{L}(x, D_x, D_t) \equiv L(x, D_x) - (-1)^m e^{i\theta} D_t{}^{2m}$ としたとき任意の $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ に対し $\mathcal{L}(x, D_x, D_t)$，$\{B_j(x, D)\}_{j=1,2,\cdots,m}$ は補完条件を満足する．

以上は田辺[9]による．簡単の為に非線型項 f に対して次の仮定をおく：

<u>仮定 1.2</u>（f について）　$C_0 > 0$，$\nu > 1$ とする．

(i) $0 \leqq |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_N| = l < 2m$

(ii) $|f(v) - f(w)| \leqq C_0 \sum_{k=1}^{N} (|D^{\alpha_k} v| + |D^{\alpha_k} w|)^{\nu-1} |D^{\alpha_k} v - D^{\alpha_k} w|$

(iii) $f(0) = 0$

[9]及び仮定 1.1 により $-A$ は解析的半群 e^{-tA} を生成する．

(P$'$)の代わりに積分方程式

$$(\mathrm{IE}) \qquad u(t) = e^{-tA}\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds, \quad t > 0$$

の局所解，大域解の存在を考えていく．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$ のときは $\gamma > 0$ に対し作用素 A の分数巾 A^γ を定義することができる：

$$A^{-\gamma} \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-tA}\, dt$$

$$A^\gamma \equiv (A^{-\gamma})^{-1}, \qquad D(A^\gamma) = R(A^{-\gamma})$$

$D(A^\gamma)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$ のとき（IE）を解く空間を設ける為にAの分数巾を用いる．pのとり方として次の様にする：

(1.1)　$p\in(1,\infty)$ かつ $p>\dfrac{n(\nu-1)}{(2m-\ell)\nu}$

§0で出てきた$\alpha,\theta\in\mathbb{R}$については

(1.2)　$\dfrac{n(\nu-1)}{2mp\nu}+\dfrac{\ell}{2m}<\alpha<1$

(1.3)　$0\leqq\theta\leqq\alpha,\ 1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)\geqq0,\ (\alpha-\theta)\nu<1$

となるよう選ぶ。

(1.3)により，α,θについて

$$\alpha\nu>1 \text{ のとき } \frac{\alpha\nu-1}{\nu-1}\leqq\theta\leqq\alpha$$

$$\alpha\nu=1 \text{ のとき } 0<\theta\leqq\alpha$$

$$\alpha\nu<1 \text{ のとき } 0\leqq\theta\leqq\alpha$$

という関係を得る．初期値ϕについて$\phi\in D(A^{\theta})$とする．

p,αのとり方について注意しておく．(1.2)より

$$\ell-\frac{n}{p\nu}<2m\alpha-\frac{n}{p}$$

であるから$D(A^{\alpha})\subset W^{\ell,p\nu}(\Omega)$が成立する（[3]，[7]）：

$$\|u\|_{W^{\ell,p\nu}}\leqq C_1\|A^{\alpha}u\|_p \qquad \textit{for any } u\in D(A^{\alpha})$$

(1.2)を満たすαがとれる為のpの条件として
$\dfrac{n(\nu-1)}{2mp\nu}+\dfrac{\ell}{2m}<1$，すなわち(1.1)を設ける．

[5]ではαのとり方は$\dfrac{n}{2mp}+\dfrac{\ell}{2m}<\alpha<1$であり，また$\phi\in D(A^{\alpha})$である．我々は上で述べたことからわかるように$\alpha$の範囲を広げることができ，初期値のとれる範囲も広げることができ

たのが改良点である。

$t\in[0,\infty)$に対し関数$g(t)$を $g(t)\equiv \min\{1,t\}$と定義する。これは[8]による。大域解の存在を示す為，定数をtに依存させない為に用いる。

<u>定理1</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>\lambda>0$とする。ある$T\in(0,\infty)$に対し$[0,T]$上で(IE)の解$u$が存在する。$u\in C((0,T];D(A^\alpha))\cap C([0,T];D(A^\theta))$で一意、任意の$\beta\in[\theta,1)$に対し

(1.4)　$\|A^\beta u(t)\|_p \leqq C_2(\beta)\,g(t)^{-(\beta-\theta)}e^{-\lambda t}$,　$t\in(0,T]$

<u>系</u>　(IE)の解は(P')の解，従って定理1が(P')について成立。

<u>注意</u>　然るべき条件の下で(P')の解は(P)を満たす，すなわち古典解にもなる。

<u>定理2</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>\lambda>0$とする。$\|A^\theta\phi\|_p$が十分小さいならば(IE)の解が$[0,\infty)$上で存在する。(1.4)が$t\in(0,\infty)$について成立する。

<u>定理3</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\neq 0$のときは安定多様体$M$が存在する。$\phi\in M$ならば(IE)の大域解$u$が存在し，$t\to\infty$とするとき$\|u(t)\|_p\to 0$であり，任意の$t\geqq 0$に対し$u(t)\in M$。

以下，C_0, C_1, C_2を含め正定数C_kはt, Tには依存しない。

<u>§2. 準備</u>　　ここでは$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>\lambda>0$とする。証明は省略する。

補題 2.1　(i) $A^{\gamma}e^{-tA} = e^{-tA}A^{\gamma}$ on $D(A^{\gamma})$

(ii) $\gamma \geqq 0$, $v \in L^{p}(\Omega)$ とするとき

$$\|A^{\gamma}e^{-tA}v\|_p \leqq C_3\, t^{-\gamma}e^{-\lambda t}\|v\|_p \leqq C_3\, g(t)^{-\gamma}e^{-\lambda t}\|v\|_p$$

(iii) $v \in D(A^{\gamma})$ ならば $\|(e^{-tA}-I)v\|_p \leqq C_4\, t^{\gamma}\|A^{\gamma}v\|_p$

補題 2.2　$v \in L^{p}(\Omega)$, $\gamma \geqq 0$ とする．$t \to 0$ とするとき

$$g(t)^{\gamma}e^{\lambda t}\|A^{\gamma}e^{-tA}v\|_p \longrightarrow 0$$

補題 2.3　任意の $v, w \in D(A^{\alpha})$ に対し

$$\|f(v)-f(w)\|_p \leqq C_5\,(\|A^{\alpha}v\|_p + \|A^{\alpha}w\|_p)^{\nu-1}\,\|A^{\alpha}v - A^{\alpha}w\|_p$$

補題 2.4　$a \in \mathbb{R}$, $b, c \in [0, 1)$, $\rho \in (0, \infty)$ とする．$t > 0$ に対し

$$G(t) \equiv g(t)^{a}\int_0^t g(t-s)^{-b}g(s)^{-c}e^{-\rho s}\,ds$$

と定義するとき　$G(t) \leqq C(b, c, \rho)\, g(t)^{1+a-b-c}$

§3. $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$ の場合：定理 1, 2 の証明

（定理 1 の証明）　補題 2.1 (ii) に注意し，任意の $\beta \in [\theta, 1)$ に対して次の空間を設定する：

$$E_{\beta,T} \equiv \{u \in C((0,T]; D(A^{\beta})) : \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\beta}u(t)\|_p < \infty\}$$

$$= \{u : g(t)^{\beta-\theta}e^{\lambda t}u(t) \in B((0,T]; D(A^{\beta}))\}$$

$E_{\beta,T}$ は $|||u|||_{\beta,T} \equiv \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\beta}u(t)\|_p$ をノルムとして Banach 空間になる．特に $E_{\alpha,T}$ の閉球

$$B_T \equiv \{u \in E_{\alpha,T} : |||u|||_{\alpha,T} \leqq C\}$$

を考える．C, T はあとで決定する．

$u \in B_T$ に対し写像 F を次の様に定義する：

(3.1) $\quad Fu(t) \equiv e^{-tA}\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds, \quad t \in (0,T]$

(i) $A^\beta Fu(t)$ は $t \in (0,T]$ について（Hölder-）連続であることを示す．$0 < t < t+h \leqq T$ とし，$\delta \in (0, 1-\beta)$ とする．(3.1) より，補題2.1，2.3，2.4を用い，B_T の定義に注意して

$$
\begin{aligned}
&\| A^\beta Fu(t+h) - A^\beta Fu(t) \|_p \\
&\quad \leqq C_3 C_4 h^\delta g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \| A^\theta \phi \|_p \\
&\qquad + \frac{C_3 C_5 C^\nu}{1-\beta} h^{1-\beta} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \\
&\qquad + C_6 h^\delta g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

(ii) $F : B_T \to B_T$ であることを調べる．(3.1) より

$$
\begin{aligned}
&g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta Fu(t) \|_p \\
&\quad \leqq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta e^{-tA}\phi \|_p \\
&\qquad + C_3 C_5 g(t)^{\beta-\theta} \int_0^t g(t-s)^{-\beta} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \cdot |||u|||_{\alpha,T}^\nu \\
&\quad \leqq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta e^{-tA}\phi \|_p + C_7(\beta) g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^\nu
\end{aligned}
$$

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) \geqq 0$ であるから

(3.2) $$|||Fu|||_{\beta,T} \leqq \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta e^{-tA}\phi \|_p + C_7(\beta) g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^\nu$$

特に $\beta = \alpha$ とおいて

$$|||Fu|||_{\alpha,T} \leqq \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^\alpha e^{-tA}\phi \|_p + C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^\nu$$

よって

(3.3) $\quad \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha} e^{-tA} \phi \|_p + C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leqq C$

ならば $F : B_T \to B_T$ である．

(iii) F は B_T 上の *strictly contraction* を示す．$v, w \in B_T$ とする．

(3.1)，補題2.1，2.3，2.4より

(3.4) $\quad ||| Fv - Fw |||_{\alpha,T} \leqq C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} ||| v - w |||_{\alpha,T}$

となるので

(3.5) $\quad C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} < 1$

となるように C, T をとれば (3.4) より示される．$\phi \in D(A^{\theta})$ だから補題2.1により

$$g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} e^{-tA} \phi \|_p \leqq C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$$

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) > 0$ の場合，(3.3)の代わりにより弱い条件

(3.3′) $\quad C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p + C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leqq C$

を扱う．$C > C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$（例えば $C = 2C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$）と C をとると，T を小さくとることにより (3.3′)，(3.5) は成り立つ．

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) = 0$ の場合，(3.3)，(3.5)は

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta}\phi) \|_p + C_8 C^{\nu} \leqq C$$

$$C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$$

となる．$C > 0$ を $C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$ となるようにとり，補題2.2より T を十分小さくして

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta}\phi) \|_p \leqq C - C_8 C^{\nu}$$

を満足するようにとる．

どちらの場合でも(3.4)によってFはB_T上の strictly contraction になるから，FはB_T内に一意の不動点uをもち，$t\in(0,T]$について(IE)を満たす．$g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}u(t)\in B((0,T];D(A^{\alpha}))$.

(iv) t=0における連続性を調べる．$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)>0$の場合(IE)，補題2.1，2.3，2.4及び$B_T$の定義により

$$
\begin{aligned}
&\|A^{\theta}u(t)-A^{\theta}\phi\|_p \\
&\quad\leqq \|A^{\theta}e^{-tA}\phi-A^{\theta}\phi\|_p+\int_0^t\|A^{\theta}e^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds \\
&\quad\leqq \|e^{-tA}A^{\theta}\phi-A^{\theta}\phi\|_p+C_9\,g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)}\to 0\ (t\to 0)
\end{aligned}
$$

故に任意の$\gamma\in[0,\theta]$に対し$u\in C([0,T];D(A^{\gamma}))$.

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)=0$の場合，$T_0\in(0,T]$に対し(3.2)に注意して

$$
|||u|||_{\alpha,T_0}\leqq \sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\alpha}e^{-tA}\phi\|_p+C_8C^{\nu-1}|||u|||_{\alpha,T_0}
$$

$C_8C^{\nu-1}<1$だから$C_{10}>0$が存在して

$$
|||u|||_{\alpha,T_0}\leqq C_{10}\sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\alpha}e^{-tA}\phi\|_p
$$

が成り立つ．よって$T_0\to 0$のとき補題2.2を用いて

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\|A^{\theta}e^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds \\
&\quad\leqq C_3C_5C^{\nu-1}\int_0^t g(t-s)^{-\theta}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds\cdot|||u|||_{\alpha,T_0} \\
&\quad\leqq C_{11}C_{10}\sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\alpha-\theta}e^{-tA}(A^{\theta}\phi)\|_p\to 0
\end{aligned}
$$

従って任意の$\gamma\in[0,\theta]$に対し$u\in C([0,T];D(A^{\gamma}))$.

(v) u(t)の評価を求める．(3.2)に注意して

$$
|||u|||_{\beta,T}\leqq C_3\|A^{\theta}\phi\|_p+C_7(\beta)C^{\nu}
$$

であるから(1.4)が成立する．特に

$$\| A^{\alpha} u(t) \|_p \leqq C\, g(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \in (0, T]$$

命題 3.1　$f(u(t))$ は $t \in (0, T]$ について Hölder 連続.

(証明)　定理 1 の証明の (i) と同様に $\beta = \alpha$ とし, $\delta \in (0, 1-\alpha)$,

$0 < t < t+h \leqq T$ とする.

$$\| A^{\alpha} u(t+h) - A^{\alpha} u(t) \|_p$$
$$\leqq C_{12} h^{\delta} g(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} + C_{13} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t}$$

従って仮定 1.2 より

(3.6)　$\| f(u(t+h)) - f(u(t)) \|_p$

$$\leqq C_{14} h^{\delta} g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda\nu t} + C_{15} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda\nu t}$$

注意　Pazy [6] により命題 3.1 から (IE) は $t \in (0, T]$ について微分可能, すなわち (P') について定理 1 が成立する.

命題 3.2　$t \in (0, T]$ に対し

(3.7)　$\| A u(t) \|_p \leqq C_{16} [g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$

(3.8)　$\| u_t(t) \|_p \leqq C_{16} [g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$

$$+ C_5 C^{\nu} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda\nu t}$$

(証明)　$g(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \| A e^{-tA} \phi \|_p \leqq C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$

である. 続いて次の様に分けて考える:

$$A \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds$$
$$= \int_0^{t/2} A e^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds + \int_{t/2}^{t} A e^{-(t-s)A} \{ f(u(s)) - f(u(t)) \}\, ds$$
$$+ (I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t))$$

$$g(t)^{1-\theta}e^{\lambda t}\|(I-e^{-\frac{t}{2}A})f(u(t))\|_p \leqq C_{17}$$

$$g(t)^{1-\theta}e^{\lambda t}\int_0^{t/2}\|Ae^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds \leqq C_{18}$$

がわかる．(3.6) より

$$\int_{t/2}^{t}\|Ae^{-(t-s)A}\{f(u(s))-f(u(t))\}\|_p\,ds$$

$$\leqq C_3C_{13}\,g\left(\frac{t}{2}\right)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}}e^{-\lambda t}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-1+\delta}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds$$

$$+C_3C_{14}\,g\left(\frac{t}{2}\right)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}e^{-\lambda t}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds$$

$$\leqq C_{19}\,g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}}e^{-\lambda t}+C_{20}\,g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}e^{-\lambda t}$$

であるから (3.7) が成立する．(3.8) は (P′)，補題2.3 よりいえる．

（定理２の証明）　$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)>0$ のとき：C を

$$C_8(2C)^{\nu-1}<1$$

を満たすようにとり，次に ϕ を

$$C_3\|A^\theta\phi\|_p \leqq C-C_8C^\nu$$

が成立するようにすると $g(T)=1$ として (3.3′)，(3.5) が成り立つ．従って $T=\infty$ ととることができる．

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)=0$ のとき：上と同様に C をとり

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^\alpha e^{-tA}\phi\|_p \leqq C_3\|A^\theta\phi\|_p$$

だから

$$C_3\|A^\theta\phi\|_p \leqq C-C_8C^\nu$$

と ϕ をとれば，T の大きさを絞る必要はない．

§4. $\mathrm{Re}\,\sigma(A)\ni 0$ の場合

$\sigma_1=\sigma(A)\cap\{z:\mathrm{Re}\,z<0\}$，$\sigma_2=\sigma(A)\cap\{z:\mathrm{Re}\,z>0\}$ とおく．σ_1 は有限集合である．

$$P_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-A)^{-1}\,dz\,,\qquad P_2=I-P_1$$

と定義する．但し Γ は σ_1 を内部に含み $\sigma(A)\setminus\sigma_1$ を外部におく単純閉曲線である．$k=1,2$ に対して P_k は $X=L^p(\Omega)$ 上の射影作用素となる．$X_k=P_kL^p(\Omega)$ とし，

$$A_k\equiv A|_{X_k}\,,\ \sigma(A_k)=\sigma_k\,,\qquad k=1,2$$

として $A=A_1+A_2$ と分解できる．X_1 は有限次元であるから，$-A_1$ は有界作用素で群 e^{-tA_1} $(t\in\mathbb{R})$ を生成し，$-A_2$ は解析的半群 e^{-tA_2} $(t\geqq 0)$ を生成する．(P$'$) は

$$\begin{cases}(u_k)_t+A_ku_k=P_kf(u)\,, & t>0\\ u_k(0)=\phi_k\end{cases}$$

と分解される $(k=1,2)$．ここで $u_k=P_ku$，$\phi_k=P_k\phi$．よって (IE) は $k=1,2$ に対し

$$u_k(t)=e^{-tA_k}\phi_k+\int_0^t e^{-(t-s)A_k}P_kf(u(s))\,ds\,,\quad t>0$$

となる．

$C_{21}>0$ を適当にとり $\tilde{A}\equiv A+C_{21}I$ と定義し，$\mathrm{Re}\,\sigma(\tilde{A})>0$ となるようにする．

次のことに注意しておく．$C_{22}>0$，$\omega>0$ が存在して任意の $v\in L^p(\Omega)$，$\gamma\geqq 0$ に対して

$$
(4.1)\quad \left.\begin{array}{l} \|\tilde{A}^{\gamma}e^{-t\tilde{A}}v\|_p \\ \|\tilde{A}^{\gamma}e^{-tA_2}v\|_p \end{array}\right\} \leqq C_{22}t^{-\gamma}e^{-\omega t}\|v\|_p \leqq C_{22}g(t)^{-\gamma}e^{-\omega t}\|v\|_p,\ t>0
$$

$$
\|\tilde{A}^{\gamma}e^{-tA_1}v\|_p \leqq C_{22}e^{\omega t},\quad t<0
$$

定理3をより詳しく述べそれを定理4.1とする．この節は定理4.1を証明する．

<u>定理4.1</u>　以下を満足する安定多様体Mが存在する：

(i) $M=\{w_1+w_2 : w_k\in P_kD(\tilde{A}^{\theta}),\ w_1=\Phi(w_2),\ \Phi$ は連続$\}$

(ii) $\phi\in M$ ならば（IE）の大域解 u が存在し

$$
\|\tilde{A}^{\alpha}u(t)\|_p \leqq C_{23}\,g(t)^{-(\alpha-\theta)}e^{-\omega t}\quad \textit{for all}\ t>0
$$

$$
\|\tilde{A}^{\theta}u(t)\|_p \leqq C_{24}\,e^{-\omega t}\quad \textit{for all}\ t\geqq 0
$$

(iii) $\phi\in M$ ならば任意の $t\geqq 0$ に対し $u(t)\in M$．

(iv) u を（IE）の大域解で(ii)の評価をもつとする．

$\|\tilde{A}^{\theta}P_2\phi\|_p\leqq C_{25}$ ならば $\phi\in M$ である．

$\psi\in P_2D(\tilde{A}^{\theta})$，$t>0$ に対して積分方程式

$$
(4.2)\quad v(t)=e^{-tA_2}\psi-\int_t^{\infty}e^{-(t-s)A_1}P_1f(v(s))\,ds + \int_0^t e^{-(t-s)A_2}P_2f(v(s))\,ds
$$

を考える．

<u>補題4.2</u>　$\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p$ が十分小さいとき（4.2）の大域解 $v(t;\psi)$ が存在し，$v\in C((0,\infty);D(\tilde{A}^{\alpha}))$ で一意．さらに任意の $\beta\in[\theta,1)$ に対して

$$\| \tilde{A}^{\beta} v(t;\psi) \|_p \leqq C_{26}(\beta)\, g(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\omega t}, \quad t>0$$

（証明） 定理1と同じ様に任意の$\beta \in [\theta, 1)$に対して次の空間を定義する：

$$E_\beta \equiv \{ v \in C((0,\infty); D(\tilde{A}^\beta)) : \sup_{0<t<\infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \| \tilde{A}^\beta v(t) \|_p < \infty \}$$
$$= \{ v : g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} v(t) \in B((0,\infty); D(\tilde{A}^\beta)) \}$$

E_βは $|||v|||_\beta \equiv \sup_{0<t<\infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \| \tilde{A}^\beta v(t) \|_p$ をノルムとしてBanach空間になる. E_αの閉球

$$B \equiv \{ v \in E_\alpha : |||v|||_\alpha \leqq C \}$$

を考え, $v \in B$ に対して写像Fを

(4.3) $$F v(t) \equiv e^{-tA_2}\psi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\, ds + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s))\, ds, \quad t>0$$

と定義する.

(i) $\tilde{A}^\beta F v(t)$は$t \in (0,\infty)$について（Hölder-）連続であることを示す. 次のことに注意する：

(4.4) $$\begin{cases} \tilde{A}^\gamma e^{-tA_k} = e^{-tA_k} \tilde{A}^\gamma \quad \text{on } D(\tilde{A}^\gamma), \quad k = 1, 2 \\ \| (e^{tA_1} - I) v \|_p \leqq C_{27} (1 - e^{-\omega t}) \| v \|_p, \quad v \in P_1 L^p(\Omega),\ t>0 \\ \| (e^{-tA_2} - I) v \|_p \leqq C_{28}\, t^\gamma \| \tilde{A}^\gamma v \|_p, \quad v \in D(\tilde{A}^\gamma),\ t>0 \end{cases}$$

$0 < t < t+h < \infty$, $\delta \in (0, 1-\beta)$とする.

$$\| \tilde{A}^\beta F v(t+h) - \tilde{A}^\beta F v(t) \|_p$$
$$\leqq \| (e^{-hA_2} - I) \tilde{A}^\beta e^{-tA_2} \psi \|_p + \int_t^{t+h} \| \tilde{A}^\beta e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) \|_p\, ds$$

$$+\int_{t+h}^{\infty}\|(e^{hA_1}-I)\tilde{A}^{\beta}e^{-(t+h-s)A_1}P_1 f(v(s))\|_p\,ds$$
$$+\int_{t}^{t+h}\|\tilde{A}^{\beta}e^{-(t+h-s)A_2}P_2 f(v(s))\|_p\,ds$$
$$+\int_0^t\|(e^{-tA_2}-I)\tilde{A}^{\beta}e^{-(t-s)A_2}P_2 f(v(s))\|_p\,ds$$
$$\leqq C_{29}h^{\delta}g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)}e^{-\omega t}+C_{30}h^{\delta}g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega t}$$
$$+C_{31}h^{1-\beta}g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega t}$$

(ii) $F: B\to B$であることを調べる．(4.3)より $v\in B$のとき

$$g(t)^{\beta-\theta}e^{\omega t}\|\tilde{A}^{\beta}Fv(t)\|_p$$
$$\leqq C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p$$
$$+C_5C_{22}\|P_1\|C^{\nu}g(t)^{\beta-\theta}e^{\omega t}\int_t^{\infty}e^{\omega(t-s)}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega\nu s}ds$$
$$+C_5C_{22}\|P_2\|C^{\nu}g(t)^{\beta-\theta}\int_0^t g(t-s)^{-\beta}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega(\nu-1)s}ds$$

ここで

$$g(t)^{\beta-\theta}e^{\omega t}\int_t^{\infty}e^{\omega(t-s)}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega\nu s}ds$$
$$\leqq\int_0^1 s^{-(\alpha-\theta)\nu}ds+\int_1^{\infty}e^{-\omega(\nu-1)s}ds$$

また補題2.4より

$$g(t)^{\beta-\theta}\int_0^t g(t-s)^{-\beta}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega(\nu-1)s}ds$$
$$\leqq C_{32}(\beta)\,g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)}\leqq C_{32}(\beta)$$

であるから

$$|||Fv|||_{\beta}\leqq C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p+C_{33}(\beta)C^{\nu}$$

特に $\beta=\alpha$ とおいて

$$|||Fv|||_{\alpha}\leqq C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p+C_{34}C^{\nu}$$

を得る．Cのとり方として

(4.5) $\quad C_{34}(2C)^{\nu-1} < 1$

とし，φを $C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\varphi\|_p \leqq C - C_{34}C^{\nu}$ とすると $|||Fv|||_{\alpha} \leqq C$

すなわち $F: B \longrightarrow B$ である．

(iii) FはB上の *strictly contraction* であることを示す．$v, w \in B$

とする．(4.3)より

$$|||Fv - Fw|||_{\alpha} \leqq C_{34}(2C)^{\nu-1}|||v - w|||_{\alpha}$$

(4.5)より示すことができた．FはB内に一意の不動点vをもち(4.2)を満足する．$g(t)^{\alpha-\theta}e^{\omega t}v(t) \in B((0,\infty); D(\tilde{A}^{\alpha}))$.

上の計算からわかるように

$$|||v|||_{\beta} \leqq C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\varphi\|_p + C_{33}(\beta)C^{\nu}$$

特に $\beta=\alpha$ のとき $t>0$ に対し

$$\|\tilde{A}^{\alpha}v(t)\|_p \leqq C\, g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega t}$$

また $\beta=\theta$ のとき $t \geqq 0$ に対し

(4.6) $\quad \|\tilde{A}^{\theta}v(t)\|_p \leqq (C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\varphi\|_p + C_{35}C^{\nu})e^{-\omega t}$

<u>補題4.3</u> $\quad v(t;\varphi)$は

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = \varphi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(v(s;\varphi))\,ds \end{cases}$$

を満足する．

(証明) 積分方程式として考える．(4.2)を変形して

$$v(t) = e^{-tA_1}P_1\left(\varphi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(v(s))\,ds\right)$$

$$+ e^{-tA_2} P_2 (\psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s))\, ds)$$
$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\, ds$$
$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s))\, ds$$

多様体M，M(C)を

$$M = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds \ : \ \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ v : (4.2) \text{ の解} \\ |||v|||_\alpha : \text{有界} \end{array} \right\}$$

$$M(C) = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds : \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ C_{22} \|\tilde{A}^\theta \psi\|_p \leqq C - C_{34} C^\nu \\ v : (4.2) \text{の解},\ |||v|||_\alpha \leqq C \end{array} \right\}$$

と定義する．明らかに $0 \in M(C) \subset M$．

<u>補題4.4</u>　$u(t;\phi)$を(IE)((P′))の大域解とする．

(i) $\phi \in M$ならばすべての$t \geqq 0$に対し$u(t;\phi) \in M$．

(ii) $\phi \in M(C)$ならば$T_1 \in [0,\infty)$が存在してすべての$t \geqq T_1$に対して$u(t;\phi) \in M(C)$．

(証明)　$\phi \in M$とする．$\psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$として

$$\phi = \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds$$

と表される．(P′)の解はBで一意である．補題4.3より任意の$t \geqq 0$に対して$u(t;\phi) = v(t;\psi)$．$\tau > 0$を任意にとり固定し$t \geqq 0$に対して

$$w(t) \equiv v(t+\tau;\psi)$$

と定義する．

$$
\begin{aligned}
w(t) &= e^{-(t+\tau)A_2}\psi \\
&\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s;\psi))\,ds \\
&\quad + \int_0^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds \\
&= e^{-tA_2}\left\{e^{-\tau A_2}\psi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds\right\} \\
&\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s;\psi))\,ds \\
&\quad + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds \\
&= e^{-tA_2}\left\{e^{-\tau A_2}\psi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds\right\} \\
&\quad - \int_{t}^{\infty} e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s+\tau;\psi))\,ds \\
&\quad + \int_0^{t} e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s+\tau;\psi))\,ds
\end{aligned}
$$

よって w は (4.2) で ψ の代わりに $P_2 v(t;\psi)$ としたものを満足する．すべての $t \geqq 0$ に対して

$$
v(t+\tau;\psi) = w(t) = v(t;\, P_2 v(\tau;\psi))
$$

従って

$$
\begin{aligned}
u(\tau;\phi) &= v(\tau;\psi) = w(0) \\
&= P_2 v(\tau;\psi) - \int_0^{\infty} e^{sA_1} P_1 f(v(s;\, P_2 v(\tau;\psi)))\,ds
\end{aligned}
$$

また $P_2 v(\tau;\psi) \in P_2 D(\tilde{A}^{\theta})$ である．よって (i) が成立する．$u(t;\phi) = v(t;\psi)$ だから u も補題 4.2 の評価 (4.6) を満足する．よって $T_1 \in [0,\infty)$ が存在して

$$
C_{22} \|\tilde{A}^{\theta} P_2 v(t;\psi)\|_p \leqq C - C_{34} C^{\nu}, \qquad t \geqq T_1
$$

とすることができ，(ii) が成り立つ．

<u>補題4.5</u>　u は (IE) ((P')) の大域解で，補題4.2と同じ評価をもつとする．$C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}P_2\phi\|_p \leqq C - C_{34}C^{\nu}$ ならば，$\phi\in M(C)$ である．

(証明)　$P_1u(t) = e^{-tA_1}P_1\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A_1}P_1f(u(s))ds$

(4.1) 及び $e^{sA_1}P_1f(u(s))$ は $(0,\infty)$ 上で可積分であるから

$$e^{tA_1}P_1u(t) = P_1\phi + \int_0^t e^{sA_1}P_1f(u(s))\,ds \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$$

従って

$$P_1\phi = -\int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1f(u(s))\,ds$$

でなくてはならない．$u(t;\phi) = v(t;\psi)$ から

$$\phi = v(0;\psi) = \psi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1f(v(s;\psi))\,ds$$

また $P_2\phi = \psi$ より $\phi\in M(C)$ である．

なお $\psi_1,\psi_2\in P_2D(\tilde{A}^{\theta})$ とし，$v_1(t;\psi_1)$，$v_2(t;\psi_2)$ を (4.2) の大域解とすると

$$|||v_1 - v_2|||_{\alpha} \leqq C_{36}\|\tilde{A}^{\theta}\psi_1 - \tilde{A}^{\theta}\psi_2\|_p$$

となり定理4.1(i)がいえる．

<u>命題4.6</u>　$v\in B$ を (4.2) の大域解とし，$0<t<t+h<\infty$，$\delta\in(0,1-\alpha)$ とする．

(i) $\|\tilde{A}^{\alpha}v(t+h) - \tilde{A}^{\alpha}v(t)\|_p$

$$\leqq C_{37}h^{\delta}\left[g(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} + g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}\right]e^{-\omega t}$$

$$+ C_{38} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$

(ii) $\| f(v(t+h)) - f(v(t)) \|_p$

$$\leqq C_{39} h^{\delta} [g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\omega\nu t}$$

$$+ C_{40} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\omega\nu t}$$

(iii) $\| \tilde{A} v(t) \|_p$

$$\leqq C_{41} [g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\omega t}$$

以上の結果の証明などの詳細は Hoshino - Yamada [11] を参照していただきたい。

文　献

1. A. Friedman; Remarks on nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. Appl. Math. 17 (1965), 3-23.

2. Y. Hashimoto, Y. Niikura and Y. Yamada; Stability and instability for semilinear parabolic equations with free boundary conditions, Nonlinear Analysis 8 (1984), 683-694.

3. D. Henry; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

4. M. Ito; The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 25 (1978), 263-275.

5. H. Kielhöfer; On the Lyapunov-stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Differential Equations 22 (1976), 193-208.

6. A. Pazy; A class of semi-linear equations of evolution, Israel J. Math. 20 (1975), 23-36.

7. A. Pazy; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

8. F. Rothe; Global Solutions Of Reaction-Diffusion Systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

9. 田辺広城 関数解析 上，下 実教出版，1978，1981.

10. F. Weissler; Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79-102.

11. H. Hoshino and Y. Yamada; Global solutions for semilinear parabolic equations of higher order. (準備中)