数理解析研究所講究録
第 702 巻 1989 年 25-109

Riemann 面上の conformal feild theory

'89 2/21

京大・理　上野　健爾・述
(Ueno, Kenji)
京大・数研　大山　陽介・記
(Ohyama, Yousuke)

§0　はじめに

このノートの目的は、non-abelian なゲージ対称性を持つＣＦＴをリーマン面の上に構成することである。そのために、まず、affine Lie algebra の表現論をリーマン面の上に展開する。次に、リーマン面上のデータからゲージ条件を用いて、リーマン面の moduli 空間の上に真空を表す層を構成する。この真空を表す層は coherent になる。ここまでは代数的な話であるが、更に Virasoro 代数の作用を用いて、真空を表す層が確定特異点型のホロノミック系になることが分かる。この方程式の特異点は moduli 空間の境界、即ち double point をもつ semi-stable curve を表す divisor になるが、そこでの解の挙動を調べることにより、真空を表す層が、境界を込めて locally free であることを示すことができる。また、この理論を$\mathbb{P}^1$の場合に適用すると、[ＴＫ]の結果が得られる。

Riemann面上の conformal feild theory は affine algebra の表現論や、安定曲線のモジュライの理論など、いろいろな道具立てを必要とするため、その全貌を述べるにはかなりの手間がかかる。しかしながら、扱っている１つ１つのことは、むしろ当り前の事実の積み重ねであり、abelian の理論([ＫＮＴＹ]など)を知っていれば、すぐに理解できるものと思う。手法としては、リーマン面の上の留数定理に affine algebra の表現論を乗せた物と言えば端的に過ぎるであろうか。

なお、講義では制限された時間（実質、４時間ぐらいだったように思う）の中で、重要なポイントを取り出して解説した、実に簡にして要を得たものであったが、その際、多くの瑣末な事実や定義を端折った形になったので、その部分を補うことにした。しかしながら筆記者の能力不足のために、かえって講義本来の滑らかな調子を崩すことになり、幾分

冗長なものになったことを深くお詫びします。

目　次

§０．はじめに

§１．２次元共形場の理論 ········ 3

§２．Affine Lie algebras の表現論 ········ 6

2－1　Affine Lie algebras ······ 6

2－2　Affine Lie algebras の表現論 ······ 9

2－3　Energy Momentum tensor (Virasoro algebra) ······ 11

2－4　１変数の座標変換群 ······ 14

§３．Pointed stable curves ········ 18

3－1　Pointed stable curves ······ 18

3－2　真空の定義 ······ 27

3－3　カレントの相関函数（Ｎ点函数） ······ 33

3－4　$\mathbb{P}^1$の場合 ······ 43

§４．真空の作る層 ········ 45

4－1　Pointed stable curves の family ······ 45

4－2　相対 tangent 層と Kodaira-Spencer 写像 ······ 54

4－3　真空の作る層 ······ 58

4－4　twist した微分作用素 ······ 62

4－4　$\mathbb{P}^1$の場合 ······ 74

§５．境界での挙動 ········ 77

5－1　normalization と真空の伝播II ······ 77

5－2　境界での座標 ······ 79

§∞．おわりに ········ 84

文　献

§１．２次元共形場の理論

本論にはいる前に、物理的なアイデアについて述べておこう。本節は完全に独立しているので、直接§２から入ってもよい。何分、私自身物理については素人なので、逆に間違ったことを述べているかもしれません。何もないよりましという程度ですので、しっかりした話を知りたい方は、[BPZ],[KZ],[FS]などを見てください。この３つの文献の中に、ＣＦＴの物理的背景について数学者として知っておきたいことは、全て書かれていると言われています。

半単純な古典リー環$\mathfrak{g}$を固定する。compact Riemann 面Ｃを棲息地とする、次のような場の operators の生態について考察する。以下では、ｚ，ｚ’をＣの局所座標とする。

１）ゲージ場： $X\in\mathfrak{g}$に対して、Ｃ上の正則１次形式 $X(z)dz$ をゲージ場という。ここで、Ｘについては線形とする；$(X+Y)(z)dz=X(z)dz+Y(z)dz$.

２）重力場： Ｃ上の conformal anomally を持つ正則２次形式 $T(z)dz^2$をゲージ場を用いて定める。ここで、conformal anomally を持つ２次形式という意味は、$T(z)dz^2$ について

$$T(z')dz'^2=T(z)dz^2-\frac{1}{12}c_v\{z',z\}dz^2$$

という座標変換則が成り立つということである（厳密には、２次形式の作る直線束を自明な直線束で extention したベクトル束を考える）。ここで、anormally 項は Schwarz 微分であり、次で定義される：

$$\{z,x\}=z'''/z'-\frac{3}{2}(z''/z')^2 \qquad (\text{但し } z'=\frac{dz}{dx}) \quad .$$

ここで、c_v は理論を定める複素パラメタ（Virasoro algebra の center）である。

3）物質場：　$\mathfrak{g}$の有限次元既約表現の同値類からなる有限集合Ｉを固定する。１つ

１つの表現が、個々の粒子を表す。$\lambda \in I$に対して、operator-value の

Δ_λ-形式 $\Phi_\lambda(u,z)dz^{\Delta_\lambda}$を物質場と考える。ここで、$\Phi_\lambda$は$u \in V_\lambda$（$\lambda$にあたる$\mathfrak{g}$の表現空間）に付いて線形、ｚについて多価解析的とする。Δ_λはΦ_λの conformal 次元と呼ばれる定数で、理論を定めるパラメータである。

以上の場に対して、我々はＮ点函数をＣの上の正則形式（多少ひねりがあるかも知れないが）として定める。場の生態は直接観察できないが、Ｎ点函数全体を調べれば、生態系の仕組みは完全に分かる。このＮ点函数は特異点を持つが、その特異点での様子は次の operator 積展開からきまる：

1）Ｘ，Ｙ$\in \mathfrak{g}$に対して

$$X(z)Y(w) = \frac{\ell(X,Y)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}[X,Y](w) + （正則部分）$$

ここで、$\ell \in \mathbb{C}$は理論を表すパラメタ（affine algebra の center)である。また、（ , ）は$\mathfrak{g}$の不変双１次形式で、最長ルートθについて、$(\theta,\theta) = 2$となるように正規化したものである。

2）$$T(z)X(w) = \frac{X(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}X(w) + （正則部分）$$

3）$$T(z)T(w) = \frac{c_V}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}T(w) + （正則部分）$$

4）$$X(z)\Phi_\lambda(u,w) = \frac{1}{z-w}\Phi_\lambda(Xu,w) + （正則部分）$$

5) $$T(z)\Phi_\lambda(u,w)=\frac{\Delta_\lambda}{(z-w)^2}\Phi_\lambda(u,w)+\frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}\Phi_\lambda(u,w)+\text{(正則部分)}$$

6) $$\Phi_\lambda(u,w)\Phi_\mu(v,z)=\sum_{\nu\in I}(z-w)^{-(\Delta_\lambda+\Delta_\mu-\Delta_\nu)}\{\Phi_\nu(C_{\lambda\mu}^{\nu}u,w)+\mathcal{O}(z-w)\}$$

但し、$C_{\lambda\mu}^{\nu}$は適当な$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda\otimes V_\mu, V_\nu)$の元,

$\mathcal{O}(z-w)$は$z\to w$の時に0となる、$z=w$ の近傍で1価正則な函数

以上のデータから、N点函数を決める formalism が定まる。

さて、[TK]の定式化との関係を述べておこう。[TK]では、物質場$\Phi_\lambda(u,z)$を拡張して、uが affine algebra の場合にも定義している(Vertex operators)。カレントのN点函数$\langle X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_M(z_M)\Phi_\lambda(u,w)\rangle$ ($u\in V_\lambda$) のデータは$\langle\Phi_\lambda(u,w)\rangle$ (uは affine algebra の表現空間) のデータとほぼ等価である。そこで、リーマン面上のCFTを展開するに当っては、Vertex operators を構成する代わりに、$\langle\Phi_\lambda(u,w)\rangle$がリーマン面の上の正則形式になる条件(ゲージ条件)を置き、それで理論が決まると考える。P^1の場合と異なることは、ゲージ条件を満たす state は最早、primary field だけからでは決まらないということである。

我々数学者の立場としては、表現論の道具を用いて、以上の性質を持つ作用素を1つ1つ構成していく。リーマン面の上のCFTでは operator algebra の自然な表現が定まっている訳ではなく、単にN点函数を定める formalism が存在しているだけである。この当りが、少なくとも筆記者が最初に勉強したときの混乱の原因の1つであった。

また、最近の[MS]では、3点付きの球面から真空の層を得る sewing process について解説している。本稿とは相補的な関係にあるので、参照されたい。

§2. Affine Lie algebras の表現論

本節では affine Lie algebra の表現論について復習する。参考文献はいろいろあるが例えば[K]などを参照されたい。

2-1 Affine Lie algebras

$\mathfrak{g}$を$\mathbb{C}$上の半単純な古典リー環とする。$\mathfrak{g}$の Cartan 部分代数を$\mathfrak{h}$, $\Delta(\subset\mathfrak{h}^*)$を$\mathfrak{h}$に関するルート系とする。また、ルート系に適当な順序を入れることで、$\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$と、正のルート$\Delta_+$と負のルート$\Delta_-$に分解する。$\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\ell\}$を単純ルートの全体とする。$\theta$を極大ルートとして、$\mathfrak{g}$上の不変対称２次形式$(\, , \,)$を$(\theta, \theta)=2$となるように正規化する。この２次形式で、$\mathfrak{g}$と$\mathfrak{g}^*$とを同一視する。

また、

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$$

というルート空間分解が存在する。ここで、$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_\alpha=1$。

さて、$\mathfrak{g}$に付随する affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$を定めよう。
形式的 Laurant 級数の作る体$\mathbb{C}((\xi))$を

$$\mathbb{C}((\xi))=\{f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\xi^n \ , \ a_n\in\mathbb{C} \text{ はnが十分小さいとき}0\}$$

で定める。この$\mathbb{C}((\xi))$を用いて、 affin Lie algebra

$$\hat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\xi))\oplus\mathbb{C}c$$

を、次の演算則で定める：

・$\forall X,\ Y \in \mathfrak{g}\quad \forall f(\xi), g(\xi) \in \mathbb{C}((\xi))$ に対し

$$[X\otimes f(\xi), Y\otimes g(\xi)] = [X, Y]\otimes f(\xi)g(\xi) + (X, Y)\operatorname*{Res}_{\xi=0}(g(\xi)df(\xi))\cdot c.$$

・c は center.

普通は、$\mathbb{C}((\xi))$の代わりに$\mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$を用いている([K])。しかし、我々は、後でリー環をリーマン面の上に乗せたいので、$\mathbb{C}((\xi))$の方を使う。無限和から生ずる障害は、最高ウェイト表現を考えているかぎり、全く起こらない。

以下では、$X\otimes\xi^n$を$X(n)$と、$X\otimes f(\xi)$を$X[f]$と書くことにする。紛らわしい記号なので、良い書き方があれば教えて欲しい。また、$\mathfrak{g}$の部分代数

$$\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[[\xi]]\xi$$
$$\hat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1}$$

を良く用いる。この時、

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \hat{\mathfrak{g}}_-$$

という線形空間としての分解が得られる。ここで、$\mathfrak{g}$の元Xは、$\mathfrak{g}$の元$X(0)$と同一視している。この埋入は Lie 環としての準同型になる。この分解は普通用いる Lie 環の三角分割とは異なるが、次の小節で述べる、表現論の考察には簡明で便利なものである（もちろん、Lie 環論としては余り自然なものではないが）。

補足

本筋からは外れるが、affine Lie algebra の Cartan 行列などについて述べておこう。

affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\xi))\oplus\mathbb{C}c$ について、$\hat{\mathfrak{g}}$の Cartan 部分代数は $\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c$ である。$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\ell\}$を$\mathfrak{g}$の基本ルート系、また $\{H_1, H_2, \ldots H_\ell\}$を基本余ルート系とする。$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ を$\mathfrak{g}$の Cartan 行列とする時、$\langle H_i, \alpha_j\rangle$

$=a_{ij}$である。$E_i, F_i(i=1,2,\dots,\ell)$を Chevalley 基底とする。$X_\theta \in \mathfrak{g}_\theta$, $X_{-\theta} \in \mathfrak{g}_{-\theta}$ を$[X_\theta, X_{-\theta}] = -\theta$となるように取ると、この時、$(X_{-\theta}, X_\theta) = -1$。$E_0 = X_{-\theta}(1)$, $F_0 = X_\theta(-1)$と置くと、$[E_0, F_0] = c - \theta$。$\hat{\Pi} = \{\alpha_0 = \delta - \theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\ell\}$, $\Pi^\vee = \{H_0 = c - \theta, H_1, H_2, \dots H_\ell\}$ はそれぞれ affine Lie algebra の基本ルート系、基本余ルート系になる。ここでは、$\hat{\mathfrak{g}}$を拡大した $L(\mathfrak{g}) = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}(d/d\xi)$を考え、$\delta$は$\mathfrak{h}$を２次元拡張した $\mathfrak{h}^\# = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}(d/d\xi)$という可換な空間の上の線形函数で、$\delta(d/d\xi) = 1$, $\delta(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c) = 0$となるものとする。また、$E_i$, F_i $(i=0,1,2,\dots,\ell)$は$\mathfrak{g}$のChevalley 基底になる。$\hat{A} = (\langle H_i, \alpha_j \rangle)_{i,j=1}^{n}$ とおくと、Aは$\hat{\mathfrak{g}}$の Cartan 行列になる。$\hat{\mathfrak{g}}$のルート系を$\hat{\Delta}$とすると、$\hat{\Delta} = \{j\delta + \gamma ; \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{j\delta ; j \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$である。更に、$L(\mathfrak{g})$のルート空間分解は

$$L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}^\# \oplus \sum_{\alpha \in \hat{\Delta}} L(\mathfrak{g})_\alpha,$$

$$\text{但し}\quad L(\mathfrak{g})_\alpha = \mathfrak{g}_\gamma \otimes t^j \qquad \alpha \in \{j\delta + \gamma ; \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z}\}$$

$$L(\mathfrak{g})_\alpha = \mathfrak{h} \otimes t^j \qquad \alpha \in \{j\delta ; \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$$

となる。$\{j\delta + \gamma ; \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z}\}$の元を実ルート、$\{j\delta ; \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$の元を虚ルートという。実ルートのほうは、ルート空間が１次元になるなど、古典ルート系と同じ性質を持つが、虚ルートのほうはいろいろ異なる挙動を示す。

$\mathfrak{g}$の三角分割を$\mathfrak{g} = n_+ \oplus \mathfrak{g} \oplus n_-$とする。ここで、$n_+$(または$n_-$)は$E_i$(または$F_i$)などで生成される$\mathfrak{g}$の部分加群である。これから、$\hat{\mathfrak{g}}$の三角分割が次の様に得られる：

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{n}_+ \oplus (\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c) \oplus \hat{n}_-$$

$$\text{但し}\quad n_+ = n_+ \oplus \hat{\mathfrak{g}}_+, \quad n_- = n_- \oplus \hat{\mathfrak{g}}_-$$

こちらの方が普通の分解である。

2-2 Affine Lie algebras の表現論

この小節では、affine Lie algebras の integral 表現についてまとめる。

affine Lie algebra の center c の表現空間への作用は、以下では常に ℓid. であるものとする（レベル ℓ の表現）。

古典リー環 $\mathfrak{g}$ について

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* ;\ (\lambda, \alpha_i) \in \mathbb{Z}\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$
$$P_+ = \{\lambda \in P ;\ (\lambda, \alpha_i) \geqq 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$
$$P_\ell = \{\lambda \in P_+ ;\ \ell \geqq (\lambda, \alpha_i) \geqq 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

とおく。P，P_+の元をそれぞれ integral weight, dominant integral weight という。

定理２．２．１　$\hat{\mathfrak{g}}$のレベルℓの既約な最高ウェイトintegral表現はP_ℓで parametrize される。即ち、$\lambda \in P_\ell$に対して、次のような$\hat{\mathfrak{g}}$の既約表現 $\mathscr{H}_\lambda$ が一意に定まる：

1）　c の作用は、ℓid. である。

2）　$V_\lambda = \{|\Psi\rangle \in \mathscr{H}_\lambda\ ;\ \hat{\mathfrak{g}}_+ |\Psi\rangle = 0\}$ は$\mathfrak{g}$の既約表現空間で、最高ウェイトはλである。

3）$\hat{\mathfrak{g}}_+$はV_λへ自明に作用するものとすると、

$$\mathscr{H}_\lambda = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{g}}_+)} V_\lambda \big/ U(\hat{\mathfrak{g}}) X_\theta(-1)^{\ell-(\theta,\lambda)+1} |\lambda\rangle$$

ここで、θは$\mathfrak{g}$の最高ルート、X_θは$\mathfrak{g}_\theta$の基底、$|\lambda\rangle$はV_λの最高ウェイトベクトルとする。 □

実は、(３)の条件は次と同値である：

(３') $\forall \alpha \in \Delta,\ \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall |\Psi\rangle \in \mathscr{H}_\lambda,$

$\exists M \in \mathbf{N}, \quad X(n)^M |\Psi\rangle = 0.$ （実ルートに関して local nilpotent)

この(3')が integrable ということの本来の定義であった。あるいは、更に強く次の条件だけでもよい：

$$(3'')\quad \forall|\Psi>\in\mathscr{H}_\lambda,\ \exists M\in\mathbb{N},\qquad X_\theta(-1)^M\,|\Psi>=0.$$

(3")はある表現が既約かどうか判定するのに便利である。

補足

$A_1^{(1)}$の場合について、もう少し具体的に述べておこう。

良く知られているように、$sl(2.\mathbb{C})$の表現はスピンで決まる。

$$sl(2.\mathbb{C})=<E=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}>\ \text{over}\ \mathbb{C}\ .$$

であり、Cartan 部分代数は$\mathfrak{h}=\mathbb{C}H$, $\mathfrak{h}$の双対は$\mathfrak{h}^*=\mathbb{C}\alpha$, ここで、$<H,\alpha>=2$とする。Killing 形式は$(X,Y)=\mathrm{tr}\ XY$で定義される。$(H,H)=2$, $(E,F)=1$, $(H,E)=(H,F)=0$である。

weight lattice は$P=1/2\cdot\mathbb{Z}\alpha$　となる。

命題2.2.2　　半整数jを固定すると、$j\alpha$を最高ウエイトに持つ$sl(2.\mathbb{C})$の既約表現が一意に存在する。この表現空間の次元は、$(2j+1)$次元である。

命題2.2.3　　$\hat{\mathfrak{g}}=\widehat{sl}(2.\mathbb{C})$ のレベルℓの最高ウェイト既約表現は　$2j\leqq\ell$となる半整数jで parametrize される。この表現$\mathscr{H}_j$は次の性質を持つ：

$\mathscr{H}_j$には真空と呼ばれる(0でない)ベクトル$|j>$が存在して、

$$\mathfrak{g}_+|j>=E|j>=0,\ c|j>=\ell|j>,\ H|j>=j|j>,$$

$$E(-1)^{\ell-2j+1}|j>=0\ .$$

なお、条件より　$\ell-2j+1>0$　となる。　□

2-3 Energy Momentum tensor (Virasoro algebra)

この小節では、Energy Momentum tensor を Segal-Sugawara の方法で定める。これを用いることで、$\mathscr{H}_\lambda$ に新しい代数 Virasoro algebra が作用する。

定 義2.3.1 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\xi))$の２次式について、正規積(normal ordered product)を次で定める：

$$:X(m)Y(n): = \begin{cases} X(m)Y(n) & (m<n) \\ \frac{1}{2}\{X(m)Y(n)+Y(n)X(m)\} & (m=n) \\ Y(n)X(m) & (m>n) \end{cases} \quad \square$$

$\forall X\in\mathfrak{g}$ に対して、形式的 Laurent 級数 $X(z)$ を

$$X(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} X(n)z^{-n-1}$$

とし、$\{J_1, J_2, \ldots, J_D\}$ を、$\mathfrak{g}$ の $(\ ,\ )$ に関する正規直交基底とする($D=\dim\mathfrak{g}$)。

定 義2.3.2 Energy Momentum tensor、即ち、Sugawara 形式を

$$T(z)=\frac{1}{2(\ell+g^*)}\sum_{1\leq k\leq r} :J_k(z)J_k(z):$$

で定める。ここで、g^* は$\mathfrak{g}$の dual Coxeter 数である (dual Coxeter 数については何も説明しないが、例えば、A_n型の時は$(n+1)$, B_n型の時は$(2n-1)$, C_n型の時は$(n+1)$, D_n型の時は$(2n-2)$である) 。Energy Momentum tensor を Laurent 展開して、

$$T(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} L(m)z^{-m-2}$$

と書くことにすると

$$L(m)=\frac{1}{2(\ell+g^*)}\sum_{1\leq k\leq r}\sum_{n\in\mathbb{Z}} :J_k(m-n)J_k(n):$$

である。 □

このL(m)などは、各$\mathscr{H}_\lambda$ に作用できる。また、L(m), X(n)などの間には、次の交換関係が成り立つ：

補　題2.3.3

$$[L(n), L(m)]=(n-m)L(n+m)+\frac{c_v}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \ ,$$

$$[L(n), X(m)]=-mX(n+m) \ .$$

ここで、$c_v=\dfrac{\ell r}{(g^*+\ell)}$ である。c_v は Virasoro algebra の central charge である。 □

L(0)を用いて、$\mathscr{H}$に次のような gradation を入れる：

$$\mathscr{H}_\lambda(d) = \{|u>\in\mathscr{H}_\lambda \ ; \quad L(0)|u>=(d+\Delta_\lambda)|u>\} \qquad (d\in\mathbf{N})$$

ここで、$\Delta_\lambda=\dfrac{\{(\lambda,\lambda)+2(\lambda,\rho)\}}{2\ (g^*+\ell)}$ である。（実は、分子は Casimir 作用素の固有値である。Casimir 作用素 Ω とL(0) には、$L(0)=\dfrac{1}{2(g^*+\ell)}\Omega-t\dfrac{d}{d\xi}$ という関係がある。）ここで、ρは$\mathfrak{g}$の正のルートの和の半分である。この gradation は次のような性質を持つ。

補題2.3.4

0) $\mathcal{H}_\lambda = \underset{\lambda\in\mathbf{N}}{\oplus} \mathcal{H}_\lambda(d)$

1) $\mathcal{H}_\lambda(0) = V_\lambda$

2) $\mathcal{H}_\lambda(d) = \sum_{\substack{n_j<0 \\ n_1+\ldots+n_k=d}} X_1(-n_1)\cdot \cdots \cdot X_k(-n_k)\cdot V_\lambda$ は有限次元.

3) $L(n)\mathcal{H}_\lambda(d) \subset \mathcal{H}_\lambda(d-m)$

4) $X(n)\mathcal{H}_\lambda(d) \subset \mathcal{H}_\lambda(d-m)$ □

$\mathcal{H}_\lambda$のフィルタを、$F_m(\mathcal{H}_\lambda) = \sum_{d\leqq m} \mathcal{H}_\lambda(d)$ で定めると、この filtration により、$\mathcal{H}_\lambda$ に線形位相が入る。

これまで、$\hat{\mathfrak{g}}$の表現空間としては、$\hat{\mathfrak{g}}$の左加群を考えてきたが、これからは、右$\mathfrak{g}$加群も良く使用する。

定義2.3.5

$\hat{\mathfrak{g}}$の右加群 $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ を次で与える：

$\mathcal{H}_\lambda^\dagger(d) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda(d), \mathbb{C})$ として $\mathcal{H}_\lambda^\dagger = \prod_{d\geqq 0} \mathcal{H}_\lambda^\dagger(d)$ と定める。

$\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ の右$\mathfrak{g}$加群としての構造は次で定める：

$$\forall \langle v| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger, \ \forall |u\rangle \in \mathcal{H}_\lambda, \ \forall X \in \hat{\mathfrak{g}}, \ (\langle v|X)|u\rangle = \langle v|(X|u\rangle).$$

この時、特に $\mathcal{H}_\lambda^\dagger(0)$ は最高ウェイトλの既約右$\mathfrak{g}$加群 $V_\lambda^\dagger$ であり、

$$\mathcal{H}_\lambda^\dagger(0) = \{\langle v| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger \ ; \langle v|\hat{\mathfrak{g}}_- = 0\}.$$ □

この定義から明らかなように、$\mathcal{H}_\lambda$ と $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ との間には、非退化で$\hat{\mathfrak{g}}$不変な pairing

が存在する。V_λ と$V_\lambda^\dagger$ の$\mathfrak{g}$加群としての最高ウェイトベクトルをそれぞれ、$|\lambda>$，$<\lambda|$として、$<\lambda|\lambda>=1$となりように pairing を正規化する。このような性質を持つ pairing は一意であり、それを真空期待値という。

$\mathscr{H}_\lambda^\dagger$のフィルタを、$F_m(\mathscr{H}_\lambda^\dagger)=\sum_{d\geqq m}\mathscr{H}_\lambda^\dagger(d)$ で定めると、この filtration により、$\mathscr{H}_\lambda^\dagger$に線形位相が入る。

2-4　1変数の座標変換群

この小節では、$\mathbb{C}((\xi))$の環としての automorphism を考察する。この変換群のリー環は、Virasoro 代数の正の部分の作る部分リー環に他ならない。

$\mathscr{D}=\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}((\xi)))$ とおく。

補　題2.4.1　$\mathscr{D}$は次のような表示を持つ：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \xrightarrow{\sim} & \{\sum a_n\xi^{n+1} \mid a_0\neq 0\} \\ \Psi & & \Psi \\ \psi & \longrightarrow & \psi(\xi) \end{array} \quad . \qquad \square$$

この表示を用いると、$\psi_1\circ\psi_2$ は $\psi_2(\psi_1(\xi))$ に対応する。

$\underline{d}=\mathrm{Lie}(\mathscr{D})$と置くと、$\underline{d}=\mathbb{C}[[\xi]]\xi\frac{d}{d\xi}$ と書ける。

定　義2.4.2　　$\underline{\ell}=\ell(\xi)\dfrac{d}{d\xi}\in\mathbb{C}((\xi))\dfrac{d}{d\xi}$ に対して、

$$T[\underline{\ell}]=\mathrm{Res}_{z=0}(T(z)\ell(z)dz)$$

と置く。$\ell(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\ell_n z^{n+1}$ と展開すると、$T[\underline{\ell}]=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\ell_n L(n)$と書ける。　□

このように、留数を用いると、$f\in\mathbb{C}((\xi))$, $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$X[f]=\mathrm{Res}_{z=0}(X(z)f(z)dz)\quad(=X\otimes f(\xi))$$

と書くことができる。

補題2.4.3　$\underline{\ell}$, $\underline{\ell_i}\in\mathbb{C}((\xi))\dfrac{d}{d\xi}$ $(i=1,2)$, $f\in\mathbb{C}((\xi))$ に対して

1）　$[T[\underline{\ell}],X[f]]=-X[\underline{\ell}(f)]$

2）　$[T[\underline{\ell_1}],T[\underline{\ell_2}]]=-T([\underline{\ell_1},\underline{\ell_2}])+\dfrac{c_v}{12}\mathrm{Res}_{\xi=0}(\ell_1'''\cdot\ell_2\,d\xi)$　□

証明は補題2．3．3を用いれば直ちにできる。
(2)で、特に$\underline{\ell_i}\in\underline{d}$ の場合は極がないので、第2項はいつでも0になる。

$\mathcal{D}$, $\underline{d}$ には次のような自然なフィルタが入る：

$$\mathcal{D}^0=\mathcal{D}\supset\mathcal{D}^1\supset\mathcal{D}^2\supset\mathcal{D}^3\supset\mathcal{D}^4\supset.....$$

$$\mathcal{D}^p=\{\xi+0\xi^2+...+0\xi^p+a_p\xi^{p+1}+....\}\quad(p>0)$$

$$\underline{d}^p=\xi^{p+1}\mathbb{C}[[\xi]]\xi\frac{d}{d\xi}\quad.\qquad p=0,1,2,...$$

指数写像 exp: $\underline{d} \longrightarrow \mathscr{D}$ を次のように定義する。

$\underline{\ell} \in \underline{d}$とする。$\exp(\underline{\ell}) \in \mathscr{D}$ を、$f \in \mathbb{C}[[\xi]]$に対して、

$$\exp(\underline{\ell})(f(\xi)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n!} \underline{\ell}^n (f(\xi))$$

となるものとして定める。exp について次の事実が成り立つ。

補　題2.4.4　指数写像 exp による $\underline{d}^p$ の像は $\mathscr{D}^p$ に含まれ、次が成り立つ

1）　exp: $\underline{d} \longrightarrow \mathscr{D}$ は全射
2）　exp: $\underline{d}^p \longrightarrow \mathscr{D}^p$ は $p \geqq 1$ の時、1－1かつ全射である。 □

$T[\ell]$は無限和であるが、$\mathscr{H}_\lambda$ には作用できる。更に強く次のことが成り立つ：

補　題2.4.5　$p \geqq 1$の時 $\underline{\ell} \in \underline{d}^p$ に対して

$$T[\underline{\ell}] : F_m(\mathscr{H}_\lambda) \longrightarrow F_{m-p}(\mathscr{H}_\lambda)$$

となり、従って

$$\exp(T[\underline{\ell}]) : \mathscr{H}_\lambda \longrightarrow \mathscr{H}_\lambda$$

は連続な線形写像を与える。また、

$$gr_F \exp(T[\underline{\ell}]) : gr_F(\mathscr{H}_\lambda) \longrightarrow gr_F(\mathscr{H}_\lambda)$$

は恒等写像である。 □

補題2.4.4と補題2.4.5とを合わせると、$\mathscr{D}^p$ の元の$\mathscr{H}_\lambda$ への作用が定義できる。

定 義2. 4. 6

$\forall \psi \in \mathscr{D}^1$ に対して、次のような作用素 $\Phi(\psi)$: $\mathscr{H}_\lambda \longrightarrow \mathscr{H}_\lambda$ が存在する：

$\psi = \exp(\underline{\ell})$, $\underline{\ell} \in d^1$ とおいて　$\Phi(\psi) = \exp(-T[\underline{\ell}])$　□

この$\Phi(\psi)$は次のような性質を持つ：

補 題2.4.7　$\forall \psi \in \mathscr{D}^1$, $\forall f \in \mathbb{C}((\xi))$, $\forall X \in \mathfrak{g}$　に対して $\mathscr{H}_\lambda$ の上の作作用素として、次のことが成り立つ：

1)　$\Phi(\psi)\circ(X\otimes f)\circ\Phi(\psi^{-1}) = X\otimes\psi(f)$.

2)　$\forall f \in \mathbb{C}((\xi))$, $\forall X \in \mathfrak{g}$　に対して

$$\Phi(\psi_1)\circ\Phi(\psi_2) = \Phi(\psi_1\circ\psi_2) \quad .$$

3)　$\forall \underline{\ell} \in \mathbb{C}((\xi))\dfrac{d}{d\xi}$　に対して

$$\Phi(\psi)T[\ell]\Phi(\psi^{-1}) = T[(\mathrm{Ad}\ \psi)(\ell)] + \frac{c_v}{12}\operatorname{Res}_{\xi=0}(\{\psi(\xi),\xi\}\ell(\xi)d\xi)$$

ここで、{ , } は Schwarz 微分である：

$$\{\psi(\xi),\xi\} = \frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 \qquad \left(\text{但し}\quad \psi' = \frac{d\psi}{d\xi}\right).$$ □

§3. Pointed stable curves

この節では、特異点を持つリーマン面の理論について説明する。本節ではリーマン面は固定されて動かない。なお、リーマン面の話について初めて学ばれる方は、特異点がないものと思って読んで頂いて構わない。このノートの最後の部分、§5までは、必ずしも特異点での考察は本質的ではない。しかしながら、真空の次元を調べるためには、特異点のある場合に帰着させないといけないので、特異点のある場合の考察は本質的である。

なお、リーマン面の理論については、例えば[岩] 3章を参照されたい。

3-1 Pointed stable curves

以下では、N個の順序付けられた点を指定した（そして特異点を許した）リーマン面を考える。

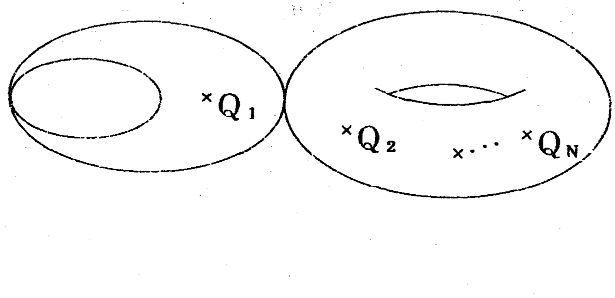
定 義3.1.1

$\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\ldots,Q_N)$ が type (g,N) の pointed semi-stable curve とは、次の条件(1)(2)が成り立つものをいう：

1) C は genus g の semi-stable curve，即ち、reduced, compact, connected curve／$\mathbb{C}$ 且つ、その特異点は (ordinary) double point しか持たない。

ここで、点 $P\in C$ がdouble point であるとは、CにおけるPのある近傍Uが存在して、Uが $\mathbb{C}^2$ の部分集合 $xy=0$ $(|x|<1, |y|<1, (x,y)\in\mathbb{C}^2)$ と正則同型であることをいう。この対応で、Pは $(0,0)\in\mathbb{C}^2$ と対応するものとする。

また、semi-stable curve Cの genus g を $g=\dim_{\mathbb{C}} H^1(C,\mathcal{O}_C)$ で定める。Cに特異点がない場合は、$g=\#\{$C上の1次独立な正則1次形式$\}$ となる。



，$g=2$ の場合

2)　$Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ はCの異なる non-singular point であり、順序が変われば違うものと思う。

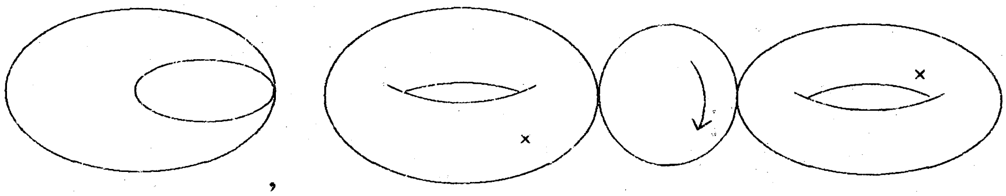
更に、次の条件(3)を満たすとき、$\mathfrak{X}$を type (g, N) の pointed stable curve という：

3)　$C = \cup C_i$ と既約成分に分解した時、各成分について

$$a(C_i) = \#\{C_i\text{と他の成分との交点}\} + \#\{C_i\text{上にある}Q_j\text{の数}\}$$

とすると、$C_i \simeq \mathbf{P}^1$ の時、$a(C_i) \geqq 3$, $a(C_i) \simeq$(楕円曲線) 又は (double point を1つ持った有理曲線) のとき、$a(C_i) \geqq 1$。C_iがそれ以外ならば、$a(C_i)$に条件はない。

条件(3)を満たさない場合：



回転の自由度がある　□

この(3)の条件は、$\#\mathrm{Aut}(C; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N) < \infty$ と同値な条件である。例えば、$C \simeq \mathbf{P}^1$, $N=1$の時、$Q_1 = \infty$ と思えば、$z \to az+b\ (a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$がAut($C$; ∞) の元になる。又、$N=2$であれば、$Q_1=0, Q_2=\infty$ と思えば、$z \to az\ (a \in \mathbb{C}^*)$がAut($C$; $0, \infty$) の元になる。更に、$\mathbf{P}^1$の上の正則変換で3点を固定するものが恒等写像しかないことはよく知られているとおりである。

定　義3.1.2

$\mathfrak{X}^{(n)} = (C; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N; t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_N^{(n)})$ が type (g, N) の punctured semi-stable curve でn次の無限小近傍の付いたもの(with n-th infinitesimal neiborhood, 日本語は本当に面倒です) とは次の条件を満たすものをいう：

1）（C；$Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$）は type (g,N) の punctured semi-stable curve。

2） 各 $t_j^{(n)}$ は次の環としての同型を定める：

$$t_j^{(n)} : \mathcal{O}_{C,Q_j} / m_{Q_j}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}[\xi]/(\xi^{n+1})$$

ここで、$\mathcal{O}_{C,Q_j}$ はCのQ_jにおける局所環、m_{Q_j} は $\mathcal{O}_{C,Q_j}$ の極大イデアルである。 □

$\mathfrak{X}^{(0)} = (C ; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N ; t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_N^{(0)})$ は$\mathfrak{X} = (C ; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ と同一視される。また、$n > m$のとき、自然な射 $\mathfrak{X}^{(n)} \longrightarrow \mathfrak{X}^{(m)}$ が存在する。

環としての同型$t_j^{(n)}$について、$n \to \infty$ の極限(射影極限)を考えよう：

$$\begin{array}{ccc} t_j^{(\infty)} : \hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j} & \longrightarrow & \mathbb{C}[[\xi]] \\ \| & & \| \\ \varprojlim_n \mathcal{O}_{C,Q_j} / m_{Q_j}^{n+1} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbb{C}[\xi]/(\xi^{n+1}) \end{array}$$

上のような環同型$t_j^{(\infty)}$を、Q_j での無限次の局所近傍という。言い換えれば、Q_j での形式的な局所座標を決めることにあたる。

定 義3.1.2

$\mathfrak{X}^{(\infty)} = (C ; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N ; t_1^{(\infty)}, t_2^{(\infty)}, \ldots, t_N^{(\infty)})$ が type (g,N) の punctured semi-stable curve で無限次の局所近傍の付いたものとは次の条件を満たすものをいう：

1）（C；$Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$）は type (g,N) の punctured semi-stable curve。

2） 各$t_j^{(\infty)}$はQ_jでの無限次の局所近傍。 □

以後、我々は理論を$\mathfrak{X}^{(\infty)}$ の上に展開していく。この空間$\mathfrak{X}^{(\infty)}$ は、座標変換を全て組み入れているので、この上では物事が自明になり、いろいろと話が簡単にすむ。しかしながら、$\mathfrak{X}^{(\infty)}$ 全体の作る空間は無限次元である(t_j の取り方が無限次元ある)ため、いろいろ扱いにくい面も多々ある。そこで、最終的には、全ての理論が$\mathfrak{X}^{(1)}$ にまで落ちることを示す。このあたり、有限と無限とを行き来する必要があって、多少煩瑣の感は否めない。

以下では、$\mathfrak{X}^{(\infty)} = (C\,;Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\,;\, t_1^{(\infty)}, t_2^{(\infty)}, \ldots, t_N^{(\infty)})$ を1つ固定する。

C上の$\mathcal{O}_C$加群の任意の層$\mathcal{F}$に対して、$\mathcal{O}_C$加群の層 $\mathcal{F}(*\Sigma Q_j)$ を $\mathcal{F}(*\Sigma Q_j) = \varprojlim_n \mathcal{F}(\sum(-n)Q_j)$ で定める。例えば、$\mathcal{O}_C(*\Sigma Q_j)$ は各Q_jの上でのみ極を持つ有理型函数の作る層である。

$\mathcal{A} = H^0(C, \mathcal{O}_C(*\Sigma Q_j))$ とおく。$\mathcal{A}$は、C上定義された各Q_j でのみ極を持つ有理型函数の全体である。

無限次の局所近傍$t_j^{(\infty)}$を

$$
\begin{array}{ccc}
t_j^{(\infty)} : \hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[[\xi]] \\
\cap & & \cap \\
K(\hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}((\xi))
\end{array}
$$

に拡張する。ここで、 $K(\hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j})$ は $\hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j}$ の商体を表す。この延長に対しても、同じ記号$t_j^{(\infty)}$を用いることにする(環同型を商体に拡張する仕方は一意である)。

定　義3．1．3　　次の自然な線形写像 t を

$$t = \bigoplus_{1 \le j \le N} t_j^{(\infty)} : \mathscr{A} \longrightarrow \bigoplus_{1 \le j \le N} \mathbb{C}((\xi_j))$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{1 \le j \le N} K(\hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j}) & \xrightarrow{t_j^{(\infty)}} & \displaystyle\bigoplus_{1 \le j \le N} \mathbb{C}((\xi_j)) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ f & \longrightarrow & \oplus\{ f \text{の各} Q_j \text{での芽}\} & \rightarrow & \{\text{座標} t_j^{(\infty)} \text{での展開}\} \end{array}$$

で定める。□

命　題3．1．4　　t は単射である。□

命題3．1．4は、リーマン面の上の函数が、極での展開だけで決まってしまうことから明らかである。

同じことを今度は微分形式の場合で行う。今の場合、リーマン面に特異点があるので、初めに dualizing sheaf ω_C について説明する。ω は特異点のない場合は、正則1次形式の層 Ω に一致する。迂遠なようではあるが、後の都合もあるので、Kähler 微分について復習しよう。証明などについては、例えば、[松]などを参照して欲しい。なお、必要なことは general nonsence ではなく、具体的な表示であるので、面倒な方は命題3．1．8まで読み飛ばして構わない。

定　義3．1．5　　A, Bを単位元を持つ可換環で、BはA-代数とする。積写像 $f : B \otimes_A B \longrightarrow B$ を $f(b \otimes b') = bb'$ で定める。なお、$b, b', b'' \in B$ に対して、$b \cdot b' \otimes b'' = bb' \otimes b''$ とBの作用を定めると、f はB加群の射となる。$I = \mathrm{Ker}(f)$ と置いて、I / I^2 を $\Omega_{B/A}$ と書き、BのA上の正則1次形式の加群という。□

写像 $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ を $d(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b \bmod I^2$ で定めると次の事実が成り立つ：

命 題3.1.6

1) $d(A)=0$.

2) $b, b' \in B$に対し $d(bb')=d(b)b'+bd(b')$,

特に、dはA加群としての射になる。

3) $\Omega_{B/A}$ は(1)(2)を満たすB加群の中で普遍性を持つ。即ち

$\forall$B加群Mで、(1)(2)を満たすA加群の写像$d' : B \longrightarrow M$を持つものに対して
一意にB加群の写像$\mu : \Omega_{B/A} \longrightarrow M$ が存在して、 $d'=\mu \circ d$。

4) $\Omega^1_{B/A}$はB加群として、 $\{db \,;\, b \in B\}$ で生成される。 □

以上の事実は、局所化できる。以下、$f : X \longrightarrow Y$ を分離的とする。なお、分離性の条件は必要ではないことを断っておく。$\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ を対角写像とすると、これは分離的の定義から閉埋入である。

定 義3.1.7 $\mathcal{I}$を$\Delta(X)$の定義イデアルとする。$\mathcal{O}_X$加群の層$\Omega_{X/Y}$を、$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$で定める。

$Y=\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ の場合、$\Omega_{X/Y}$を単にΩ_Xと書く。Ω_XはXが非特異のとき局所自由加群になるが、特異点の近傍ではそうならない。例えば、double point $xy=0$ では、$\mathcal{O}_{X,(0,0)}=\mathbb{C}\{\{x,y\}\}/(xy)$ であり、$\Omega_{X,(0,0)}=\mathcal{O}dx+\mathcal{O}dy/(ydx+xdy)$ となって、自由加群にならない。

そこで、Cが semi-stable curve の時には $\omega_C=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Hom}(\Omega_C,\mathcal{O}),\mathcal{O})$ と置く。

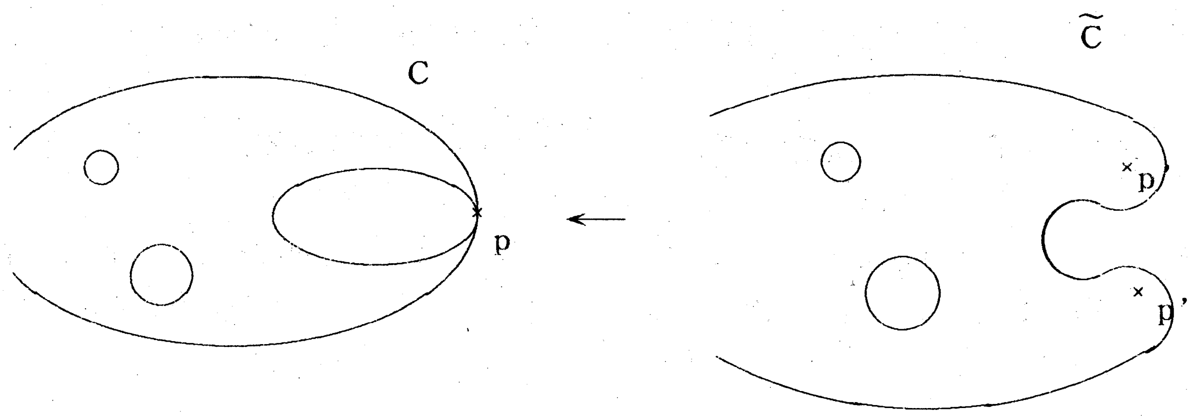
補足

もう少し一般に、XがP=$\mathbf{P}^N$の余次元rの代数多様体であれば、 dualizing sheaf ω_X は、

$$\omega_X=\underline{\mathrm{Ext}}^r_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_X,\Omega_P)$$

で定めることができる。より一般的な定義は省略する。興味のある方は、例えば、[H]など代数幾何の標準的教科書を見て下さい。 □

Cを semi-stable curve とする。Cの正規化$\tilde{C}$とはCに含まれる各特異点を除去したものである。また、$\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ を自然な写像とする。具体的に述べると、下の図のように、Cの double point p を局所的に、xy=0 と表したとき、x=0 と y=0 との2つの非特異な曲線に分ければよい。なお、下の図で、p', p"は、p に対応するCの点$\pi^{-1}(p)$を表す。



さて、Cの上の dualizing sheaf ω_C はその正規化$\tilde{C}$のdualizing sheaf $\omega_{\tilde{C}} = \Omega_{\tilde{C}}$をもちいると次のように表示できる：

命題3.1.8　Cを semi-stable curve 、また、$\pi : \tilde{C} \to C$ を正規化とする。この時、ω_C はC上の可逆な層であり、$\pi^* \omega_C$ は次のようになる：

$U \subset \tilde{C}$　が　特異点の逆像を含まない時

$$\pi^* \omega_C(U) = \Omega_{\tilde{C}}(U)$$

$U \subset \tilde{C}$　が　ただ1つの特異点pの逆像を含む時、$\pi^{-1} p = \{p', p''\}$とすると

$$\pi^* \omega_C(U) = \{ g(x)dx \in \Omega_{\tilde{C}}(-p'-p'')(U) ;$$
$$\mathrm{Res}_{p'}\, g(x)dx + \mathrm{Res}_{p''}\, g(x)dx = 0 \} \square$$

特異点 $p\in C$ の近傍で、局所的に $xy=0$ と表した時、$\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}=0$ と考えられ、

$$\omega_{C,p}=\mathcal{O}_C\frac{dx}{x}=\mathcal{O}_C\left(-\frac{dy}{y}\right)$$

と書けるので、ω_Cは 特異点pでも可逆である。

また、後で用いるが、Cの tangent sheaf Θ_C を

$$\Theta_C=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C,\mathcal{O}_C)$$

で定める。Cが非特異ならば、Θ_Cは普通のベクトル場の層である。Cが double point p を持つとき、p の近傍で、局所的に $xy=0$ と表した時に

$$\Theta_{C,p}=\{f(x)x\partial x+g(y)y\partial y;\ f,\ g\text{は原点の近傍での正則函数}\}$$

と書ける。$(ydx+xdy)(x\partial x)=(ydx+xdy)(y\partial y)=0$ となっていることに注意されたい。

$\mathscr{B}=H^0(C,\omega_C(*\Sigma Q_j))$ とおく。$\mathscr{B}$は、C上定義された各Q_j でのみ極を持つ有理型微分形式の全体である。

定　義3.1.9　次の自然な線形写像 t を

$$t=\bigoplus_{1\leq j\leq N}t_j^{(\infty)}:\mathscr{B}\longrightarrow\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))\,d\xi_j$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{B} & \longrightarrow & \bigoplus_{1\leq j\leq N}K(\hat{\mathcal{O}}_{C,Q_j})\otimes\omega_{C,Q_j} & \xrightarrow{t_j^{(\infty)}} & \bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j\\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow\\
g & \longrightarrow & \oplus\{g\text{の各}Q_j\text{での芽}\} & \longrightarrow & \{\text{座標}\,t_j^{(\infty)}\,\text{での展開}\}
\end{array}$$

で定める。 □

$\mathcal{A}$の場合と異なり、一般にはtは単射ではない。そこで、$\mathfrak{X}^{(\infty)}$に次の条件(Q)を置く：

(Q)：　$\mathfrak{X}^{(\infty)}=(C\,;Q_1,Q_2,\ldots,Q_N\,;t_1^{(\infty)},t_2^{(\infty)},\ldots,t_N^{(\infty)})$について、Cの各既約成分の上には、少なくとも1個のQ_jが存在する。

Q_jが1つもないような成分があった場合にも、後で述べる定理3.2.2を用いることにより、(Q)が成り立つようにできる。

補　題3.1.10　　条件(Q)の下で、tは単射になる。　□

補題3.1.10も各Q_jでの展開で正則形式が決まることから、直ちに従う。Q_jが1つもないような成分があった場合には、その成分の上に正則形式が存在しうるので、単射性が崩れる。正則函数の場合には、他の成分とに交点での値で函数が決まってしまうので(Q)は要らなかった。

命　題3.1.11　　次の Residue pairing

$$\mathrm{Res}:\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))\times\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j\longrightarrow\mathbb{C}$$

によって、$t(\mathcal{A})$と$t(\mathcal{B})$とはお互いの零化空間になっている。即ち、

$$t(\mathcal{A})=\{f\in\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))\quad;\quad \mathrm{Res}(f,t(\mathcal{B}))=0\}$$
$$t(\mathcal{B})=\{g\in\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j\,;\quad \mathrm{Res}(t(\mathcal{A}),g)=0\}\quad.$$
□

証明は[岩]を参照。留数定理の意味からして、こうでなければならない。なお、話者によれば、歳を取っている人なら必ず読んだ本だそうである。因みに、筆記者が大学に入った頃には品切れであった。

命題3.1.11は全てのQ_jである展開が与えられたとき、それを展開係数に持つ正則形式が存在するかどうかの判定に役立つ。

以上で、リーマン面に関する準備を終え、次から、リー環をリーマン面の上に乗せることを考える。

3-2　真空の定義

この小節では、type(g,N) の punctured semi-stable curve にリー環を乗せ、真空と呼ばれる、affine Lie 環の表現空間の部分空間を定義する。ここで、真空という言葉を用いるが、必ずしも、物理屋さんの感覚と一致するものではない。一つの理由は、正則な理論だけを考えているためで、本当は、反正則な部分との組を考えなければならない。また、この真空は1次元ではない（有限次元になることは後で示す。有限次元性はここでの主定理の1つである）。

さて、無限次元リー環$\hat{\mathfrak{g}}_N$を

$$\hat{\mathfrak{g}}_N = \bigoplus_{1\leq j\leq N} \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\xi_j)) \oplus \mathbb{C}c$$

で定義する。ここでcは center であり、リー環の構造は

$\forall X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$　$\forall f_j(\xi_j), g_j(\xi_j) \in \mathbb{C}((\xi_j))$　に対し

$$[\bigoplus_j X_j\otimes f_j(\xi_j), \bigoplus_j Y_j\otimes g_j(\xi_j)]$$
$$= \bigoplus_j [X_j, Y_j]\otimes f_j(\xi_j)g_j(\xi_j) + \sum_j (X_j, Y_j)\operatorname{Res}_{\xi=0}(g_j(\xi_j)df_j(\xi_j))\cdot c.$$

で定める。$\hat{\mathfrak{g}}_N$は、N個の$\hat{\mathfrak{g}}$を直和したものとは多少異なり、center を1つにまとめものである。

前節同様に、$\mathfrak{X}^{(\infty)} = (C; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N; t_1^{(\infty)}, t_2^{(\infty)}, \ldots, t_N^{(\infty)})$ を1つ固定する。$\mathscr{A} = H^0(C, \mathcal{O}_C(*\Sigma Q_j))$ であり、線形写像 t によって、$\mathscr{A}$ は $\bigoplus_{1 \leq j \leq N} \mathbb{C}((\xi_j))$ に埋め込まれる。

$\hat{\mathfrak{g}}_N$ の部分空間 $\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})$ を、

$$\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A}) = \mathfrak{g} \otimes t(\mathscr{A}) \subset \hat{\mathfrak{g}}_N$$

で定める。$\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})$ の元は、$X \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathscr{A}$ に対して、$(X \otimes f_1, X \otimes f_2, \ldots, X \otimes f_N)$ という形をしている。ここで、$f_j = f_j(\xi_j)$ は f の Q_j での展開である。留数定理から、$f, g \in \mathscr{A}$ の時、$\Sigma \mathrm{Res}(g df) = 0$ となり、積を取った時に center の項は生じないので、$\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})$ はリー環になる。

$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in (P_\ell)^N$ を固定する。$\hat{\mathfrak{g}}$ の表現空間 $\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$ を

$$\mathscr{H}_{\vec{\lambda}} = \mathscr{H}_{\lambda_1} \otimes \mathscr{H}_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_{\lambda_N}$$

とする。$\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$ の元 $|u_1\rangle \otimes |u_2\rangle \otimes \cdots \otimes |u_N\rangle$ を $|u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_N\rangle$ と略記する。$X \otimes f \in \hat{\mathfrak{g}}$ に対して、$\hat{\mathfrak{g}}$ の作用 ρ_j を $\rho_j(X \otimes f)\, |u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_N\rangle = |u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes (X \otimes f) u_j \otimes \cdots \otimes u_N\rangle$ で定める。

$\hat{\mathfrak{g}}_N$ も $\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$ に作用する：

$\bigoplus_j X_j \otimes f_j(\xi_j) \in \hat{\mathfrak{g}}_N$ に対して

$$\bigoplus_j X_j \otimes f_j(\xi_j)\, |u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_N\rangle = \sum_j \rho_j(X \otimes f)\, |u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_N\rangle.$$

もちろん、$\hat{\mathfrak{g}}_N$ の部分リー環 $\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})$ も $\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$ に作用できる。

また、同じようにして、右$\hat{\mathfrak{g}}_N$ 加群

$$\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}} = \mathscr{H}^{\dagger}_{\lambda_N} \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}^{\dagger}_{\lambda_2} \otimes \mathscr{H}^{\dagger}_{\lambda_1}$$

も考えられる。なお、矢印の向きに注意されたい。（講演で用いた記号とは、テンソル積の順番が違います。講演中の浪川さんの言葉から取らせて頂きました。）

以下で基本的になる真空の作る空間を定義しよう。

定　義3．2．1

真空の空間 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ と　その双対空間$\mathcal{V}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ とを

$$\mathcal{V}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A}) = \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}} / \hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})\mathscr{H}_{\lambda} ,$$

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A}) = \{ \langle\Psi| \in \mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}} ; \quad \langle\Psi|\mathfrak{g}(\mathscr{A}) = 0 \}$$

で定める。 □

$\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ を定義する式

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \ \forall f \in \mathscr{A}, \qquad \Sigma_{j=1}^{N} \langle\Psi|\rho_j(X \otimes f) = 0$$

をゲージ条件という。$\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ はこうして、無限次元空間の中で、無限個の条件を満たすものとして定義されるが、実は、$\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ 自体は有限次元になる。

$\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$と$\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$との間には、真空期待値と呼ばれる自然な pairing があったが、この pairing は $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ と$\mathcal{V}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ との間の complete pairing を引き起こす。

前節で、punctured semi-stable curve に条件(Q)を課したが、この条件が本質的なものでないことは次の定理から分かる。

定　理3.2.2

$\mathfrak{X}^{(\infty)} = (C\,;Q_1,Q_2,\ldots,Q_N\,;\,t_1^{(\infty)},t_2^{(\infty)},\ldots,t_N^{(\infty)})$ に対して、$\tilde{\mathfrak{X}}^{(\infty)}$ を

$$\tilde{\mathfrak{X}}^{(\infty)}=(C\,;Q_1,Q_2,\ldots,Q_N,Q_{N+1}\,;\,t_1^{(\infty)},t_2^{(\infty)},\ldots,t_N^{(\infty)},t_{N+1}^{(\infty)})$$

とする。ここで、Q_{N+1}は$Q_1,Q_2,\ldots,Q_N$とは異なるCの正則点、$t_{N+1}^{(\infty)}$ はQ_{N+1}の回りの勝手な形式座標とする。$\mathscr{A}=H^0(C,\mathcal{O}_C(*\sum_{1\leq j\leq N}Q_j))$，$\tilde{\mathscr{A}}=H^0(C,\mathcal{O}_C(*\sum_{1\leq j\leq N+1}Q_j))$ とおく。$0\in P_\ell$ に対して $\mathscr{H}_0$ を対応する$\hat{\mathfrak{g}}$の表現空間として、最高ウェイトベクトル$|0\rangle$を固定した時、自然な写像

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}\otimes\mathscr{H}_0 \\
\Cup & & \Cup \\
|u\rangle & \longrightarrow & |u\rangle\otimes|0\rangle
\end{array}$$

が存在するが、この双対写像によって、$\mathfrak{X}^{(\infty)}$，$\tilde{\mathfrak{X}}^{(\infty)}$ に対応する真空の空間は同型になる：

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}} & \xleftarrow{\iota^*} & \mathscr{H}^{\dagger}_0\otimes\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}} \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A}) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{V}^{\dagger}_{0,\overleftarrow{\lambda}}(\tilde{\mathscr{A}})
\end{array}$$

□

（証明）　簡単にスケッチだけしよう。 $\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\overleftarrow{\lambda}}(\widetilde{\mathscr{A}})\ni\langle\Phi|$ に対して、$\iota_*(\langle\Phi|)$ $=\langle\Phi'|$ と書くことにする。$\langle\Phi'|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ となることはゲージ条件から自明である：

$$\forall f\in\mathscr{A}\quad \forall|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}},$$

$$\sum_{1\le j\le N}\langle\Phi'|\rho_j(X\otimes f)|u\rangle=\sum_{1\le j\le N}\langle\Phi|\rho_j(X\otimes f)|u\otimes 0\rangle$$

$$=\sum_{1\le j\le N+1}\langle\Phi|\rho_j(X\otimes f)|u\otimes 0\rangle\quad=0.$$

ここで、f は Q_{N+1} で正則であるから、$\rho_{N+1}(X\otimes f)|u\otimes 0\rangle=0$ であることに注意する。

次に、ι_* が単射であることを示そう。$\langle\Phi'|=0$　と言うことは、ι_* の定義により任意の $|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ に対して、$\langle\Phi|u\otimes 0\rangle=0$　が成り立つことであるが、この時、p に関する帰納法により、

$$\forall|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}},\ \forall|v\rangle\in F_p\mathscr{H}_0\qquad \langle\Phi|u\otimes v\rangle=0$$

となることを示そう。$p=0$ のときは、$\langle\Phi|u\otimes 0\rangle=0$　より良い。ここで、次の補題に注意しよう。

補題3.2.3　$\forall|v\rangle\in\mathscr{H}_0$,　$\forall X(m)\in\hat{\mathfrak{g}}$　に対して

$$\exists f\in\widetilde{\mathscr{A}},\qquad \rho_{N+1}(X\otimes f)|v\rangle=X(m)|v\rangle \qquad \square$$

この補題は、Q_{N+1}　で $\xi_{N+1}^{m}+\xi_{N+1}^{M}\times$（正則部分）（$M\gg 0$）　という展開を持つ $f\in\widetilde{\mathscr{A}}$　が存在することから分かる。

$F_{p+1}\mathscr{H}_0$ の勝手な元は、$\exists|v>\in F_p\mathscr{H}_0$ を用いて、$X(m)|v>$と書くことができるので、上の補題を用いて

$$\begin{aligned}<\Phi|u\otimes X(m)|v> &= <\Phi|u\otimes(X\otimes f)|v> \\ &= -\sum_{1\leq j\leq N}<\Phi|\rho_j(X\otimes f)|u\otimes v> \quad .\end{aligned}$$

ところが、$\rho_j(X\otimes f)|u\otimes v>\in\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}\otimes F_p\mathscr{H}_0$ だから、帰納法の仮定より、$<\Phi|$をかますと0になる。これで、ι_*の単射性は示せた。

問題はι_*の全射性である。$\forall<\Phi'|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ に対して、$\iota_*<\Phi|=<\Phi'|$となる$<\Phi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\overleftarrow{\lambda}}(\widetilde{\mathscr{A}})$ を実際に構成する。まず、$L\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A})\otimes\mathscr{H}_0,\mathbb{C})$ を次のように作る。

$\forall|u>\in\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$, $\forall|v>\in F_p\mathscr{H}_0$ に対して、$L(|u>\otimes|v>)$ をpに関する帰納法で定めるわけだが、$p=0$の時には、$L(|u>\otimes|0>)=<\Phi'|u>$ で決まる。今、Lがpまで定義できて、

$$\forall g\in\mathscr{A}\text{に対して}\quad\sum_{1\leq j\leq N}L(\rho_j(X\otimes f)|u\otimes v>=0$$

が成り立っているとする。この時、単射性の証明の逆を行って、$X(m)|v>\in F_p\mathscr{H}_0$ に対して

$$L(|u>\otimes X(m)|v>)=-L(\sum_{1\leq j\leq N}\rho_j(X\otimes f)|u\otimes v>$$

によって $L(|u>\otimes X(m)|v>)$ を定義することで、$L\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A})\otimes M_0,\mathbb{C})$ が順に定まる（正確には、$F_p\mathscr{H}_0$の元を$X(m)|v>$の形に表す表し方は、一意ではないので、表示によらないことを示さなければならない）。ここで、M_0は $0\in P_\ell$ を最高ウ

ェイトとする Verma 加群である。次に、このLが$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}_{\lambda}(\mathscr{A})\otimes\mathscr{H}_0,\mathbb{C})$ の元になることを示そう。定理２．２．１の後に述べた条件(３")を用いて、

$$\forall|v>,\ \exists M\gg 0 \qquad L\,(|u>\otimes X_{\theta}(-1)^{M}\,|v>=0$$

となることを示せばよい。補題３．２．３を$X_{\theta}(-1)$に適用して、$\rho_{N+1}(X_{\theta}\otimes f)=X_{\theta}(-1)$ となるように$f\in\widetilde{\mathscr{A}}$ をとると

$$L\,(|u>\otimes X_{\theta}(-1)^{M}\,|v>$$

$$=(-)^{M}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_N\\=M}}\frac{M!}{n_1!\cdots n_N!}\,\Sigma\,L(\rho_1(X_{\theta}\otimes f)^{n_1}\cdots\rho_N(X_{\theta}\otimes f)^{n_N}|u>\otimes|v>)$$

となるので、Mを十分大きく取れば、 $\rho_1(X_{\theta}\otimes f)^{n_j}|u_j>=0 \quad (\exists j)$ となるので、integrality が示せたことになる。 □

なお、この定理３．２．２を“真空の伝播”と呼ぶ方もいらっしゃいますが、勉強不足の為、私にはその感じがよく分かりません。

３−３　カレントの相関函数（Ｎ点函数）

量子論において、実際に観測されるのは場の作用素などではなく、真空期待値を取ったもの、即ち相関函数(Ｎ点函数)である。従って、我々の理論でも相関函数の性質を調べることが重要になってくる。また、相関函数全てのデータから、真空の空間が復元できる。その意味では、相関函数は理論を決定付けるものである。また、相関函数は座標によらな

い不変的な表示ができるので、ＣＦＴの最終的な定式化と言えるかもしれない。

なお、ＣＦＴが今日や明日にでも実験で検証できるものではないことを、付け加えておく。そういう意味ではＣＦＴは本当に物理なのだろうか？　数学的に厳密に扱えない時、例えば path intgral などをもちいている場合は少なくとも数学とも言いにくいが、今のように operator 形式によっている場合、数学の１分野（代数幾何か表現論か情報幾何かは一先ず置くとして）であることは間違いない。ひょっとすると将来物理にもなるかもしれないけれども。

$\mathfrak{X}^{(\infty)}=(C\,;Q_1,Q_2,\dots,Q_N\,;t_1^{(\infty)},t_2^{(\infty)},\dots,t_N^{(\infty)})$ を type (g,N) の punctured semi-stable curve とする。この小節では、$\mathfrak{X}^{(\infty)}$ は条件(Q)を満たすとする。

まず、１点函数の場合を考えてみよう。１点函数というのは、$\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$, $X\in\mathfrak{g}$, $|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$として、$\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz$ のことである（ここで z はＣの局所座標）。 $\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz$ の意味は次の命題で明らかになる。

命　題３．３．１　　$\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$, $X\in\mathfrak{g}$, $|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ に対して

$$\omega_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|\rho_j(X(n))|u\rangle\,\xi_j^{-n-1}d\xi_j\ \in\mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j$$

と置いたとき、$(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N)\in t(\mathscr{B})$ となる。 □

命題３．３．１より、$\exists\tau\in\mathscr{B}$, $t(\tau)=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N)$ となるので、この正則１次形式 τ を $\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz$ と定める。

(命題３．３．１の証明)　$f\in\mathscr{A}$ について $t_j(f)=\Sigma\, a_m^{(j)}\xi_j^m$ とする。

$$\mathrm{Res}_{\xi_j=0}(t_j(f)\omega_j) = \sum_m a_m^{(j)} \langle\Psi|\rho_j(X(n))|u\rangle$$
$$=\langle\Psi|\rho_j(X\otimes t_j(f))|u\rangle$$

従って、ゲージ条件 $\sum_j \langle\Psi|\rho_j(X\otimes t_j(f))=0$ より

$$\sum_j \mathrm{Res}_{\xi_j=0}(t_j(f)\omega_j) = \sum_j \langle\Psi|\rho_j(X\otimes t_j(f))|u\rangle =0.$$

ゆえに、命題３．１．11より $(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N)\in t(\mathscr{B})$ となる。 □

続いて、N点函数を扱おう。

まず、$\pi_i : C^A=C\times C\times\cdots\times C\longrightarrow C$ を第 i 成分への射影とする。 また、

$$\Delta_{ij}=\{(z_1,z_2,\cdots z_A)\in C^A\ ;\ z_i=z_j\},$$
$$\omega_C^{\boxtimes A}=\pi_1^*(\omega_C)\otimes\pi_2^*(\omega_C)\otimes\cdots\otimes\pi_A^*(\omega_C)$$

とする。Δ_{ij}はCが double point を持つときには Weil 因子の意味しかないが、$2\Delta_{ij}$ は Cartier 因子として意味を持つ。従って、$*\Delta_{ij}$を考えるときには問題はない。

結局は１点函数の場合に帰着させることになるが、少し準備をしよう。

Pを、Q_jなどとは異なるC上の正則点とする。定理３．２．２．より、次の自然な同型が存在した：

$$\iota:\ \mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A})$$

ここで、$\widetilde{\mathscr{A}}=H^0(C,\mathcal{O}_C(*P+*\sum Q_j))$ である。以下、$\iota(\langle\Psi|)=\langle\Psi'|$ とし、P での局所座標を η とする。

補　題3.3.2　$\forall\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathscr{A}})$, $\forall|u\rangle\in\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}$, $\forall X\in\mathfrak{g}$ に対して、$\langle\Psi'|u\otimes X(-1)0\rangle d\eta$ はPでの cotangent vector を定める。ここで、η はPの回りの局所座標である。また、この cotangent vector は命題3．3．1で定めた $\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz$ のPでの値と一致する。

証明）　前半は、補題3．2．3を使って、座標変換に関する不変性を調べればよい。ここで、$X(-1)=X\otimes\eta^{-1}$ であることに注意する。後半についても、再び、補題3．2．3を用いて、$f\in H^0(C,\mathcal{O}_C(-P+*\sum Q_j))$ を $f=\eta^{-1}+$(正則) となるように取れば、

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi|X(z)|u\rangle_{z=P} &= \operatorname{Res}_{\eta=0}\left(\langle\Psi|X\otimes\frac{1}{\eta}|u\rangle d\eta\right)\\
&= \operatorname{Res}_{z=P}\left(f\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz\right)\\
&= -\sum_{0\leq j\leq N}\operatorname{Res}_{Q_j}\left(f\langle\Psi|X(z)|u\rangle dz\right)\quad\text{（留数定理により）}\\
&= -\sum_{0\leq j\leq N}\langle\Psi|\rho_j(X\otimes f)|u\rangle
\end{aligned}
$$

ところが、$\langle\Psi'|$ の定義と $\langle\Psi'|$ のゲージ条件により、

$$
\begin{aligned}
-\sum_{0\leq j\leq N}\langle\Psi|\rho_j(X\otimes f)|u\rangle dz &= -\sum_{0\leq j\leq N}\langle\Psi'|\rho_j(X\otimes f)|u\otimes 0\rangle dz\\
&= \langle\Psi'|u\otimes X(-1)0\rangle \qquad \square
\end{aligned}
$$

こうして、$|0\rangle$を一般点に差し込むことで、相関函数が目に見えるものになる。

定　理3．3．3　　$\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$ に対して、$A\in\mathbf{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_A\in\mathfrak{g}$ がいろいろ変わるとき、以下のような性質を持つ正則形式の族

$$\langle\Psi|X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_A(z_A)|u\rangle\, dz_1dz_2\cdots dz_A$$
$$\in H^0\left(C^A, \omega_C^{\boxtimes A}(*\sum_{i<j}\Delta_{ij}+*\sum_{i,p}\pi_i^{-1}(Q_p)\right)$$

が一意に存在する：

1）　$\langle\Psi|X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_A(z_A)|u\rangle\, dz_1dz_2\cdots dz_A$　は

$\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$, $|u\rangle\in\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$, $X_j\in\mathfrak{g}$　について線形であり

$A=0$の時、$\langle\Psi|u\rangle$は真空期待値に一致する。

2）$$\int d\xi_p\,\xi_p^n\langle\Psi|X(\xi_p)X_1(z_1)X_2(z_2)\cdot\cdots\cdot X_A(z_A)|u\rangle dz_1dz_2\cdots dz_A$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|X_1(z_1)\cdot\cdots\cdot X_A(z_A)|\rho_p(X(n))u\rangle\ dz_1\cdots dz_A.\quad(1\leqq p\leqq A)$$

ここで、積分路はQ_pの回りを他のQ_jを回らないように取る。　□

（2）は、$X(z)dz=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X(n)z^{-n-1}dz$ がリーマン面の上の1-形式として、自然な意味を持っていることを示している。

（証明）

P, $P_1, P_2, \ldots, P_A$　を、Q_iなどとは異なるC上の異なる正則点とする。定理3．2．2．より、次の自然な同型が存在した：

$$\iota_A : \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{0_A},\overleftarrow{\lambda}}(\tilde{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A}) \qquad \langle\Psi'| \longrightarrow \langle\Psi|$$

$$\iota' : \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{0_{A+1}},\overleftarrow{\lambda}}(\tilde{\tilde{\mathscr{A}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{0_A},\overleftarrow{\lambda}}(\tilde{\mathscr{A}}) \qquad \langle\Psi''| \longrightarrow \langle\Psi'|$$

ここで、$\tilde{\mathscr{A}} = H^0(C, \mathcal{O}_C(*\sum P_i + *\sum Q_j))$, $\tilde{\tilde{\mathscr{A}}} = H^0(C, \mathcal{O}_C(*P + *\sum P_i + *\sum Q_j))$ である。

$|u\rangle \in \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ に対して、 $|u'\rangle \in \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}} \otimes \mathscr{H}_{\overrightarrow{0}}$ を

$$|u'\rangle = |u\rangle \otimes X_1(-1)|0\rangle_{P_1} \otimes X_2(-1)|0\rangle_{P_2} \otimes \cdots \otimes X_A(-1)|0\rangle_{P_A}$$

で定める。補題3.3.2より、各P_iを変数と思うと、$\langle\Psi'|u'\rangle$ はP_iについて、有理函数であり、その特異点は、$P_i = Q_j$ または 他のP_i である。従って、Hartogs の定理により、$\langle\Psi'|u'\rangle$ は全変数について有理函数になる。 □

相関函数について、特異点 Δ_{ij} の回りの展開は次のようになる：

定　理3.3.4 (operator product expansion)　P, P'を semi-stable curve C の非特異点、z を非特異点Pの回りの局所座標、$X, Y, X_j (1 \leq j \leq A) \in \mathfrak{g}$、$\langle\Psi| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{A})$, $|u\rangle \in \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ とする。この時

$$
\begin{aligned}
&<\Psi|X(P)Y(P')X_1(z_1)X_2(z_2)\cdot\cdots\cdot X_A(z_A)|u>dz_1dz_2\cdots dz_A\\
&=\frac{\ell\cdot(X,Y)}{(z(P)-z(P'))^2}<\Psi|X_1(z_1)\cdot\cdots\cdot X_A(z_A)|u>dz_1\cdots dz_A\\
&+\frac{1}{z(P)-z(P')}\ <\Psi|[X,Y](z)X_1(z_1)\cdot\cdots\cdot X_A(z_A)|u>dz_1\cdots dz_A\\
&+(P=P'\ \text{で正則})
\end{aligned}
$$

となる。 □

$X_j(1\leqq j\leqq A)\in\mathfrak{g}$、$<\Psi|\in\mathcal{U}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathcal{A})$, $|u>\in\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ は任意であったから、上の式を簡単に、

$$
X(P)Y(P')=\frac{\ell\cdot(X,Y)}{(z(P)-z(P'))^2}+\frac{1}{z(P)-z(P')}[X,Y](z)
$$
$$
+(P=P'\ \text{で正則})
$$

と書く。これが、物理の人が普通に用いる operator product expansion であり、§１で６つ書いた式の最初のものである。物理屋は operand が何かということは普通考えない(あるいは物理的感覚で悟り切っている)のでこれでもいいが、数学者としては、あくまでも表現空間が何であるかを気にしながら進むべきであろう。

(証明)　点Pを固定して考える。定理３．２．２ より

$$
\iota_{A+2}:\ \mathcal{U}^{\dagger}_{\overleftarrow{0_{A+2},\lambda}}(\widetilde{\mathcal{A}})\ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \mathcal{U}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathcal{A})\qquad <\overline{\Psi}|\longrightarrow\ <\Psi|
$$

という同型が存在した。さらに、補題３．３．２を用いて、

$$
\begin{aligned}
|u''>&=|u>\otimes X(-1)0>_P\otimes Y(-1)0>_{P'}\otimes X_1(-1)0>_{P_1}\otimes\cdots\otimes X_A(-1)0>_{P_A}\\
&=|u'>\otimes X(-1)0>_P\otimes Y(-1)0>_{P'}
\end{aligned}
$$

とおくと（ここで、$|0>_P$ などの意味は、$\mathscr{H}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathscr{H}_{\vec{0}_{A+2}}$ の後ろの$\mathscr{H}_0$の最高ウエイトベクトルを区別するため添字をつけたコピーである） $z_j = P_j (0 \leqq j \leqq A)$で

$$<\Psi|X(P)Y(P')X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots\cdots X_A(z_A)|u> = <\bar{\Psi}|u''>$$

となる。ここで、有理函数 $f \in H^0(C, \mathcal{O}_C(*\Sigma Q_i + *\Sigma P_j - P + *P'))$ をPにおいて、$f = (z - z(P))^{-1}$となるように取ると、

$$\begin{aligned}<\bar{\Psi}|u''> &= <\Psi|u'\otimes(X\otimes f)0_P\otimes Y(-1)0_{P'}> \\ &= -\sum_{0\leqq j\leqq N+M}<\Psi|\rho_j(X\otimes f)u'\otimes 0_P\otimes Y(-1)0_{P'}> \\ &\qquad -<\Psi|u'\otimes 0_P\otimes\{(X\otimes f)\otimes Y(-1)\}0_{P'}>\end{aligned}$$

となる（留数定理）。ここで、初項は P'を動かしたとき、Pで正則である。第２項については、$a = z(P) - z(P')$, $w = z - z(P')$ とすると、P'で $f = (w - a)^{-1}$と書けるので

$$\begin{aligned}&(X\otimes f)\otimes Y(-1)0_{P'}> \\ &\quad = (X\otimes(w-a)^{-1})\otimes(Y\otimes w^{-1})0_{P'}> \\ &\quad = [X, Y]\otimes\frac{1}{w(w-a)}|0_{P'}> + \ell\cdot(X, Y)\ \mathrm{Res}_{w=0}\frac{1}{w}d\left(\frac{1}{w-a}\right)|0_{P'}> \\ &\quad = -\left\{\frac{[X, Y](-1)}{a}|0_{P'}> + \frac{\ell\cdot(X, Y)}{a^2}|0_{P'}>\right\}\quad .\end{aligned}$$

これが、求める展開式の特異部分であった。 □

相関函数の性質について少し補足する。

命　題3．3．5　記号はこれまで通りとする。

1）　$\sigma \in S_A$（A次の対称群）に対して

$$<\Psi|X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_A(z_A)|u>$$
$$=<\Psi|X_{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)})X_{\sigma(2)}(z_{\sigma(2)})\cdots X_{\sigma(A)}(z_{\sigma(A)})|u>$$

である。

2）　$|u>=|u_1>\otimes\cdots\otimes|u_A>$　において、$|u_j>\in V_{\lambda_j}$ とすると

$$<\Psi|X(z)X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_A(z_A)|u>$$
$$=\frac{1}{z-z(Q_j)}<\Psi|X_1(z_1)X_2(z_2)\cdots X_A(z_A)|\rho_j(X)u>$$
$$+(Q_j\text{での正則部分}) \qquad \square$$

証明は簡単である。(1)は、補題3．3．2から直ちに従う。(2)は定理3．3．4の(2)の条件から明らかである。$|u_j>\in V_{\lambda_j}$ の時、$X(z)|u_j>$ は z について正則であることに注意せよ。

最後に、相関函数について重要なことは、定理3．3．4の逆が成り立つことである。

定理3．3．6　$\mathfrak{X}^{(\infty)}$ を固定する。$A\in\mathbb{N}$，$|u>\in V_{\vec{\lambda}}$，$X_1,\ldots,X_A\in\mathfrak{g}$ に対して、以下の性質(1)〜(3)を満たす微分形式

$$F_A(X_1,\ldots,X_A;|u>)\in H^0(C^A,\omega_C^{\boxtimes A}(*\sum_{i<j}\Delta_{ij}+*\sum_{i,p}\pi_i^{-1}(Q_p)))$$

の族があったとする。ここで、F_A の条件とは

1） $\sigma \in S_A$（A次の対称群）に対して

$$F_A(X_1, X_2, \cdots, X_A; |u\rangle) = F_A(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(A)}; |u\rangle)$$

2） $F_{A+2}(X, Y, X_1, \cdots, X_A; |u\rangle)$

$$= \frac{\ell\cdot(X, Y)}{(z-z')^2} F_A(X_1, X_2, \cdots, X_A; |u\rangle)$$

$$+ \frac{1}{z-z'} F_{A+1}([X, Y], X_1, X_2, \cdots, X_A; |u\rangle) + (z = z' \text{ で正則}) .$$

ここで、z，z’ はそれぞれ、第1，第2成分の局所座標で、コピーである。

3） $F_{A+1}(X, X_1, X_2, \cdots, X_A; |u\rangle)$

$$= \frac{1}{z - z(Q_j)} F_A(X_1, X_2, \cdots, X_A; |\rho_j(X)u\rangle) + (z = Q_j \text{ で正則})$$

この時、一意に $\mathcal{U}^{\dagger}_{\underset{\lambda}{\leftarrow}}(\mathcal{A})$ の元 $\langle\Psi|$ が存在して、$F_A = \langle\Psi|$。 □

証明は略する。この定理のF_Aは座標によらない表示の仕方を取っているので、これがある意味で最良の表現であろう。このF_Aを$\mathscr{H}_{\underset{\lambda}{\leftarrow}}$の中に実現しようとすると、どうしても座標が必要になる。しかし、真空の空間はそれはそれで表現論的には自然なものである。もちろん、物理ではF_A による表示が先行していた。

3-4 P^1の場合

真空に親しむために、P^1の場合にどうなるか具体的に計算しよう。

$P^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ と考えて、$\mathbb{C}$上の大域的な座標 z をいつも考えることにする。Q_j ($1 \leqq j \leqq N$) を $z = a_j$ となる互いに異なる点とする。

真空の空間 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A})$ から、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}; \mathbb{C})$へ、次のように自然な写像が定まる：

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\text{inj.}} \mathscr{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_{\lambda_N}; \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{proj.}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}; \mathbb{C}).$$

命　題3.4.1　　上で定めた写像

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}; \mathbb{C})$$

は単射であり、さらにその像は、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}; \mathbb{C})$ に含まれる。 □

（証明） まず、後半から示そう。$\forall \langle \Psi | \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{A})$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall | u \rangle \in V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}$ に対して、$\sum_{0 \leqq j \leqq N} \langle \Psi | \rho_j(X) | u \rangle = 0$となることを示せばよいが、

$$\langle \Psi | X(t) | u \rangle \, dt = \sum \frac{1}{t - a_j} \langle \Psi | \rho_j(X) | u \rangle \, dt + (\text{正則部分})$$

である。さらに、P^1全体で定義された正則微分形式はないので、第２項は０である。ここで、$\langle \Psi | X \otimes t | u \rangle \, dt$ はP^1全体で定義された有理微分形式だから、留数を取ることにより

$$\sum \langle \Psi | \rho_j(X) | u \rangle = 0$$

次に単射性を示そう。定理３．３．６より、$\langle\Psi|u\rangle$ ($|u\rangle\in V_{\vec{\lambda}}$) から一般の相関函数 $\langle\Psi|X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle$が定まることを見ればよい。例えば、１点函数は既に

$$\langle\Psi|X(t)|u\rangle\, dt = \sum \frac{1}{t-a_j} \langle\Psi|\rho_j(X)|u\rangle\, dt$$

となっている。また、一般には operator 積展開から、z, w に関する極の部分を取って

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi|X(z)Y(w)X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&= \frac{\ell\cdot(X,Y)}{(z-w)^2}\langle\Psi|X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \frac{1}{z-w}\langle\Psi|[X,Y](w)X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{1}{z-a_j}\langle\Psi|Y(w)X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{1}{w-a_j}\langle\Psi|X(z)X_1(z_1)\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{\ell\cdot(X,X_j)}{(z-z_j)^2}\langle\Psi|Y(w)X_1(z_1)\cdots\overset{j}{\vee}\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{1}{z-z_j}\langle\Psi|[X,X_j](z)Y(w)X_1(z_1)\cdots\overset{j}{\vee}\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{\ell\cdot(Y,X_j)}{(w-z_j)^2}\langle\Psi|X(z)X_1(z_1)\cdots\overset{j}{\vee}\cdots X_A(z_A)|u\rangle \\
&\quad + \sum_{1\leqq j\leqq A}\frac{1}{w-z_j}\langle\Psi|[Y,X_j](w)X(z)X_1(z_1)\cdots\overset{j}{\vee}\cdots X_A(z_A)|u\rangle
\end{aligned}
$$

となって、(Ａ＋２)点函数が(Ａ＋１)点函数に帰着されたので、帰納的に定義できる。なお、$\mathbf{P}^1$全体で定義された正則微分形式はないから、上の式で正則部分はない。　□

§4．真空の作る層

この節から、リーマン面のモジュライを考えて、モジュライ空間の上で真空がどのような振るまいを示すかを見る。結論を先にいうと、真空の空間はモジュライ空間の上で確定特異点型の微分方程式を満たし、その特異点は semi-stable curve を表す divisor （モジュライ空間の境界）になる。従って、真空の層は、境界以外では局所自由層になるが、次節で述べるように、境界での振るまいを見ることにより、境界まで込めて局所自由層になるのである。

4-1 Pointed semi-stable curves の family

この小節では、semi-stable curve のモジュライ空間について説明しよう。我々が以下で行うことは、Kodaira-Spencer 写像を、N点でn次の無限小近傍がついた曲線に対して書き下すことである。非特異の場合、semi-stable curve の場合、N点の周りで局所座標を付けた場合、と似た話を3度繰り返すので煩わしいかもしれませんがお許しください。

初めに、Cが非特異の場合に、Cの複素構造の変形について復習しよう。Cの複素構造というのは、次のように局所座標とその貼りあわせで決まるのであった：

$C=\bigcup_{i\in I} U_i$ を開集合 U_i による被覆とする。z_i を U_i の局所座標として

$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ の時 $z_i=g_{ij}(z_j)$ が正則函数。

そして、この貼りあわせの函数 g_{ij} が変わると複素構造が変わる。g_{ij} の微小変形

$$z_i=g_{ij}(z_j)+\varepsilon h_{ij}(z_j)$$

を考えると、cocycle 条件 $g_{ik}(z_k)=g_{ij}(g_{jk}(z_k))$ より

$$h_{ik}(z_k)=h_{ij}(z_j)+h_{jk}(z_k)\frac{\partial z_i}{\partial z_j}\quad(\mathrm{mod}\ \varepsilon^2).$$

従って、$\{h_{ij}(z_j)\dfrac{\partial}{\partial z_i}\}$ は1-cocycle になる。ここで、座標変換

$$\begin{aligned} z_i &= z_i + \varepsilon h_i(z_i) \\ z_j &= z_j + \varepsilon h_j(z_j) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

による変換は複素構造を変えないので、$h_{ij}(z_j)$ を

$$h_{ij}(z_j) + \{h_j(z_j)\frac{\partial z_i}{\partial z_j} - h_i(z_i)\}$$

に変えても複素構造は同じである。上の式で、{ } の部分はちょうど coboundary になる。従って、

$$\{\text{複素構造の無限小変形}\} \simeq H^1(C, \Theta_C) \quad .$$

ここで、Θ_C はC上の正則ベクトル場の作る層である。Cの genus が g であるとき、この次元が$(3g-3)$であることはよく知られている。

次に、N点でn次の無限小近傍がついた曲線に対して、局所座標を保つ変形を考える。

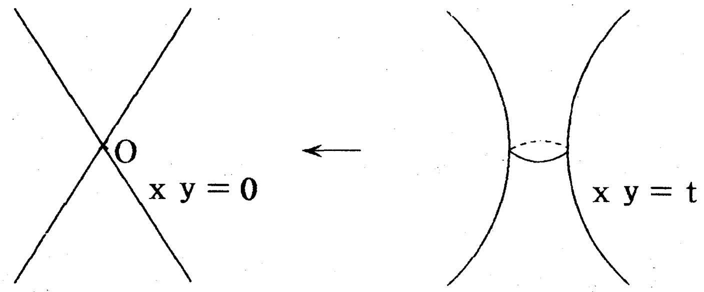
$\mathfrak{X}^{(n)} = (C; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N; t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_N^{(n)})$ を type (g,N) の pointed semi-stable curve n次の無限小近傍がついたものとする。ここで、Cは特異点を持たないとする。$\mathfrak{U} = \cup U_i$ を開被覆として、$U_i \cap U_j \not\ni Q_k$ $(i \neq j)$ となるものを取り、各 Q_kを含む開集合をU_kと書くことにする。また、局所座標z_kを $Q_k = \{z_k = 0\}$ となるように取る。今の場合では、貼りあわせ函数g_{ij}のとりかえは同じようにできるが、U_kでの座標変換$(*)$としては、t_k を変えないものしか許さないから、$h_k(z_k)$ はQ_kで少なくとも$(n+1)$位の零点を持たなければいけない。従って、$\mathfrak{X}^{(n)}$の無限小変形は、

$$\{\mathfrak{X}^{(n)}\text{の無限小変形}\} \simeq H^1(C, \Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j)) \quad .$$

Cの genus が g の時、この次元は$\{3g-3+N(n+1)\}$ である。

次に、Cが double point を持っている場合を扱おう。この場合、double point を保つ変形と、double point をなくす変形と２通り考えられる。

Cが非特異の場合のように、$H^1(C,\Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j))$を取ると、これは、局所座標を保つ、貼りあわせの仕方の変形であった（Θ_Cは特異点を保つ）から、double point は保存される。double point では、$xy=0$ を $xy=t$ に変える１次元の変形がある。



double point での変形は、$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C,0}}(\Omega_{C,0},\mathcal{O}_{C,0})$ で表され、これは $\mathcal{O}_{C,0}/(x,y)$ に等しい。

次の命題に注意する。

命　題４．１．１　次の自然な完全列がある：

$$0 \longrightarrow H^1(C,\Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C,\Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j))$$
$$\longrightarrow \sum_{1\leq k\leq m} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C,P_k}}(\Omega_{C,P_k},\mathcal{O}_{C,P_k}) \longrightarrow 0$$

ここで、$P_j(1\leqq j\leqq m)$ はCの double point である。　□

なお、最後の項は、$\mathbb{C}$上m次元である。

（証明）　$\Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j) \simeq \underline{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-(n+1)\Sigma Q_j))$ であり、次は完全：

$$0 \longrightarrow H^1(C, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-(n+1)\Sigma Q_j))) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j)) \longrightarrow H^0(C, \underline{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-(n+1)\Sigma Q_j))) \longrightarrow 0 \quad .$$

ところが、$\underline{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-(n+1)\Sigma Q_j)) \simeq \sum_{1\leq k\leq m} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C,P}}(\Omega_{C,P_k}, \mathcal{O}_{C,P_k})$ である。 □

この命題より、 double point を持つ場合の$\mathfrak{X}^{(n)}$の変形は、

$$\{\mathfrak{X}^{(n)}\text{の無限小変形}\} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(C, \Theta_C(-(n+1)\Sigma Q_j)) .$$

ここまで、$\mathfrak{X}^{(n)}$を１つ止めて、その無限小変形を考えてきた。次に、type(g,N) の pointed semi-stable curve のモジュライについて、結果のみ記す。

type(g,N) の pointed semi-stable curve の間の写像

$$f : (C ; Q_1, \ldots, Q_N) \longrightarrow (C' ; Q_1', \ldots, Q_N')$$

が正則同型であるというのは

$f : C \longrightarrow C'$ が semi-stable curve の間の射として正則同型で、
$f(Q_j) = Q_j'$ $(1 \leq j \leq N)$

となることをいう。

定 理4.1.2 (Mumford-Knudsun)
type(g,N) の pointed semi-stable curve の coarse moduli space

$$\overline{M}_{g,N} = \{(C ; Q_1, \ldots, Q_N) ;$$

type(g,N) の pointed semi-stable curveの正則同値類}

は射影代数多様体であり、特異点を持つが、V-多様体になる。 □

ここで、V-多様体というのは、$\mathbb{C}^M$ の0のある近傍Uと0を固定するUの解析的自己同型からなる有限群Gがあって、特異点が局所的には、U/G(正規解析空間になる)で書けるものをいう。

coarse moduli space の上には、universal family はのらないので、特異点のところでは covering にあげて、local universal family を考える。

定 義4.1.3. $(\pi : C \longrightarrow B ; s_1, s_2, \ldots, s_N)$ が type(g,N) の pointed semi-stable curve の正則 family であるとは、次の条件(1)~(4)が成り立つことをいう:

1) C, Bは連結な複素解析多様体である。
2) $\pi : C \longrightarrow B$ は proper, flat な正則写像である。
3) $s_1, s_2, \ldots, s_N$ は π の cross section である。
4) $\forall b \in B$ に対し $C_b = \pi^{-1}(b)$, $Q_i = s_i(b)$ とおくと
 $(C_b ; Q_1, \ldots, Q_N)$ は type(g,N) の pointed semi-stable curve になる。 □

ここで、正則写像が proper というのは、compact 集合の逆像が compact になることであり、また、複素多様体の間の正則写像が flat というのは、その fiber の次元が一定ということである。

正則 family に対して、次のような Kodaira-Spencer 写像が定義される:

命　題4．1．4　$(\pi : C \longrightarrow B\ ;\ s_1, s_2, \ldots, s_N)$ が type(g,N) の pointed semi-stable curve の正則 family であるとする。この時、$\forall b \in B$　に対して自然な写像

$$\rho_b :\ \ T_b B \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_b}}(\omega_{C_b}, \Theta_{C_b}(-\Sigma Q_j))$$

が存在する。□

なお、命題4．1．4で定めた ρ_b が、$\forall b$ で同型であるとき、この正則 family を local universal family といい、この時、　，　の次元はそれぞれ、$(3g-3+N+1)$, $(3g-3+N)$ である。

local universal family $\pi : C \longrightarrow B$ に対して、critical set Σ, discriminant set D を

$$\Sigma = \{p \in C\ ;\ d\pi_p : T_p C \longrightarrow T_{\pi(p)} B \quad \text{が全射でない}\}$$

$$D = \pi(\Sigma)$$

とすると

命　題4．1．5　　Σ は余次元2の非特異な部分多様体であり、$\pi|\Sigma$　は smooth な写像になる。DはBの normal crossing divisor である。□

$p \in \Sigma$, $\pi(p) \in D$　の周りでの局所座標として、それぞれ、

$$(t_1, \ldots, t_{M-1}, z, w), \quad \Sigma = \{zw = 0\} \quad , \quad M = \dim B$$

$$(\tau_1, \ldots, \tau_{M-1}, \tau), \quad D = \{\tau = 0\} \quad ,$$

$\pi : C \longrightarrow B$　は　　$\tau_j \circ \pi = t_j\ (1 \leqq j \leqq M)$,　$\tau \circ \pi = zw$　と書けるものが存在することから、命題4．1．5は簡単に分かる。

我々が用いるのは座標付きのモジュライ空間であった。$\mathfrak{X}^{(n)}$の local universal family というのは定義4.1.3とほとんど同様に定義できる：

定 義4.1.6

$(\pi^{(n)}: C^{(n)} \longrightarrow B^{(n)}; s_1, s_2, \ldots, s_N; t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_N^{(n)})$ が type (g,N) の pointed semi-stable curve でn次の無限小近傍の付いたものの local universal family とは次の条件(1)〜(6)が成り立つことをいう：

1) $C^{(n)}, B^{(n)}$ は連結な複素解析多様体である。

2) $\pi^{(n)}: C^{(n)} \longrightarrow B^{(n)}$ は proper, flat な正則写像である。

3) $s_1, s_2, \ldots, s_N$ は π の cross section である。

4) I_{s_j} を$s_j(B^{(n)})$の定義イデアルとすると、$t_j^{(n)}$ は

$$t_j^{(n)}: \mathcal{O}_{C,Q_j} / I_{s_j}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{B^{(n)}}[\xi]/(\xi^{n+1})$$

を与える。

5) $\forall b \in B$ に対し $C_b = \pi^{-1}(b)$, $Q_i = s_i(b)$, $\tilde{t}_j^{(n)} = t_j|_{\pi^{-1}(b)}$ とおくと $(C_b; Q_1, \ldots, Q_N; \tilde{t}_1^{(n)}, \tilde{t}_2^{(n)}, \ldots, \tilde{t}_N^{(n)})$ は type (g,N) の pointed semi-stable curve でn次の無限小近傍の付いたものになる。

6) (local universality) $\forall b \in B$ に対して Kodaira-Spencer 写像

$$\rho_b: \quad T_b B \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_b}}(\omega_{C_b}, \Theta_{C_b}(-(n+1)\Sigma Q_j))$$

が同型である。 □

また、定義4.1.6の条件(1)〜(5)を満たす族 $\pi': C' \longrightarrow B'$ を単に type (g,N) の pointed semi-stable curve でn次の無限小近傍の付いたものの正則 family という。

無限小近傍の付いたものの local universal family について、局所的な一意存在定理が成り立つ。

定　理4．1．7　　nを自然数とする。勝手な type (g,N) の n次の無限小近傍の付いた pointed semi-stable curve $(C\,;Q_1,\dots,Q_N;t_1^{(n)},t_2^{(n)},\dots,t_N^{(n)})$ に対して、local universal family $(\pi^{(n)}:C^{(n)}\longrightarrow B^{(n)}\,;s_1,s_2,\dots,s_N\,;t_1,t_2,\dots,t_N)$ で、ある$b\in B^{(n)}$　について、$C_b=\pi^{-1}(b)\simeq C$　で

$$Q_i=s_i(b),\quad t_j^{(n)}=\tilde{t}_j^{(n)}|_{\pi^{-1}(b)}$$

となるものが存在する。また、勝手な正則 family　$\pi':C'\longrightarrow B'$ に対して、$b\in B'$ に対して、局所座標を込みにした正則同型 $f:\pi'^{-1}(b')\longrightarrow\pi^{-1}(b)$が存在すれば、局所的に一意に、次のような可換な写像が存在する：

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\mu} & C^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[\nu]{} & B^{(n)}, \end{array}$$

但し、$\nu(b')=b$,　$\mu|_{\pi^{-1}(b)}=f$.　□

定理4．1．7で、n＝0の時は、pointed semi-stable curve の local universal family の存在を意味する。

我々が扱いたいのは、無限次の局所近傍が付いたものであった。この local universal family は無限次元になるので注意が必要である。そこで、n次の無限小近傍の付いた semi-stable curve の local universal family の構成について述べよう。

$\mathcal{F}=(\pi^{(0)}:C^{(0)}\longrightarrow B^{(0)}\,;s_1,s_2,\dots,s_N)$　を　pointed semi-stable curve の local universal family とする。この$B^{(0)}$に対して、$B^{(n)}$　を次のように構成する。

$b\in B^{(0)}$　に対して、pointed semi-stable curve $(C_b,Q_1,Q_2,\dots,Q_N)$を

$$C_b=\pi^{(0)-1}(b),\quad Q_j=s_j(b)\ (1\leqq j\leqq N)$$

で定める。そこで、

$$B^{(n)} = \{ (b\,;(\overset{(n)}{t}_1, \overset{(n)}{t}_2, \ldots, \overset{(n)}{t}_N)) \in B^{(0)} \times (\mathscr{D}/\mathscr{D}^n)^N\ ;$$

$$\overset{(n)}{t}_j : \mathcal{O}_{C_b, Q_j} \Big/ m_{Q_j}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\xi]/(\xi^{n+1}) \}$$

とおくと、$B^{(n)}$は 複素多様体の構造をもち、自然な写像 $\chi^{(n)} : B^{(n)} \longrightarrow B^{(0)}$ は正則で、ファイバを $(\mathscr{D}/\mathscr{D}^n)^N$ とする主ファイバ束になる。ファイバ積の列

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^{(0)} & \longleftarrow & C^{(1)} & \longleftarrow & C^{(2)} & \longleftarrow \cdots\cdots \longleftarrow & C^{(n)} & \longleftarrow & \cdots\cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
B^{(0)} & \longleftarrow & B^{(1)} & \longleftarrow & B^{(2)} & \longleftarrow \cdots\cdots \longleftarrow & B^{(n)} & \longleftarrow & \cdots\cdots
\end{array}$$

を考えると、$\overline{\chi}^{(n)} : C^{(n)} \longrightarrow C^{(0)}$ もファイバを $(\mathscr{D}/\mathscr{D}^n)^N$ とする主ファイバ束になる。さらに、$s_1, s_2, \ldots, s_N$ を $\pi^{(n)}$ で引き戻したものを $\overset{(n)}{s}_1, \overset{(n)}{s}_2, \ldots, \overset{(n)}{s}_N$ とすると、$(\pi^{(n)} : C^{(n)} \longrightarrow B^{(n)}\ ; \overset{(n)}{s}_1, \overset{(n)}{s}_2, \ldots, \overset{(n)}{s}_N\ ; \overset{(n)}{t}_1, \overset{(n)}{t}_2, \ldots, \overset{(n)}{t}_N)$ はn次の無限小近傍の付いた semi-stable curve の local universal family となる。

上のファイバ積の極限として得られる族 $(\pi^{(\infty)} : C^{(\infty)} \longrightarrow B^{(\infty)}\ ; \overset{(\infty)}{s}_1, \overset{(\infty)}{s}_2, \ldots, \overset{(\infty)}{s}_N\ ; \overset{(\infty)}{t}_1, \overset{(\infty)}{t}_2, \ldots, \overset{(\infty)}{t}_N)$ を無限次の局所近傍の付いた semi-stable curve の local universal family と定める。また、上の極限として自然に定まる写像を

$\psi^{(n)} : B^{(\infty)} \longrightarrow B^{(n)}$, $\overline{\psi}^{(n)} : C^{(\infty)} \longrightarrow C^{(n)}$ と書く。

リーマン面の moduli の方向については局所的に、解析的に考えるのに対して、座標変換の方向は大域的に、代数的に考えるのは不統一のそしりを免れませんが、今は取扱い易いやり方で話を進めさせていただきます。

4-2　相対 tangent 層と Kodaira-Spencer 写像

前節の初めに、semi-stable curve の無限小変形について説明したが、本節ではこれを層化しよう。その前に、相対 tangent 層についてまとめる。この層は、後で真空の層が満たす微分方程式を調べるのに重要な役割を果たす。

無限小近傍の付いた semi-stable curve の local universal family $\pi^{(n)}: C^{(n)} \longrightarrow B^{(n)}$ を考える。以下では、$C = C^{(n)}$，$B = B^{(n)}$ と省略する。

定　義4.2.1　相対微分形式の層 $\Omega^1_{C/B}$ を次で定める：

$$\Omega^1_{C/B} = \mathrm{Coker}\,(\pi^{(n)^{-1}}\Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_C) \quad . \qquad \square$$

命題4.1.5で用いた、Cの局所座標 $(t_1, \ldots, t_{M-1}, z, w)$ を使うと

$$p \in C \setminus \Sigma \quad で \quad \Omega^1_{C/B,\,p} = \mathcal{O}_{C,\,p}\,dz \;,$$

$$p \in \Sigma \quad で \quad \Omega^1_{C/B,\,p} = (\mathcal{O}_{C,\,p}\,dz + \mathcal{O}_{C,\,p}\,dw) / \mathcal{O}_C(w\,dz + z\,dw).$$

ここで、$\Sigma = \Sigma^{(n)}$ である。代数的に言えば、定義3.1.5のA，Bを、それぞれ、$B^{(n)}$，$C^{(n)}$の函数環にしたものになる。但し、今は解析的な category で扱っている。

更に、§3 で定義した、tangent sheaf，dualizing sheaf を相対化しよう。

定　義4.2.2　$C \longrightarrow B$ の相対 tangent sheaf $\Theta_{C/B}$ を

$$\Theta_{C/B} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_{C/B}, \mathcal{O}_C)$$

で定める。また、相対 dualizing sheaf $\omega_{C/B}$ を

$$\omega_{C/B} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\Theta_{C/B}, \mathcal{O}_C)$$

で定める。 □

$\Omega^1_{C/B}$ と同様に、局所座標を用いると、次のように書ける。

$$p \in C \setminus \Sigma \quad で \quad \Theta^1_{C/B,p} = \mathcal{O}_{C,p} \frac{\partial}{\partial z},$$
$$p \in \Sigma \quad で \quad \Theta^1_{C/B,p} = \mathcal{O}_{C,p} \left(z \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial w} \right) .$$

$$p \in C \setminus \Sigma \quad で \quad \omega_{C/B,p} = \mathcal{O}_{C,p}\, dz ,$$
$$p \in \Sigma \quad で \quad \omega_{C/B,p} = \mathcal{O}_{C,p} \frac{dz}{z} = \mathcal{O}_{C,p} \frac{dw}{w} .$$

特に、$\Theta_{C/B}$, $\omega_{C/B}$ はともに局所自由層である。double point を持つ stable curve の tangent sheaf は、double point で局所自由にならなかったが、相対化すると局所自由になることに注意されたい。flat でも tangent sheaf の嫌らしいところである。しかし、感じとしてはファイバごとの tangent sheaf, dualizing sheaf を並べたものと思ってよい。

$B^{(n)}$ の tangent sheaf Θ_B に対して、$D = D^{(n)}$ に沿っての logarithmic tangent sheaf $\Theta_B(-\log D)$ を

$$\Theta_B(-\log D) = \{ v \in \Theta_B \ ; \ v(I_D) \subset I_D \}$$

で定める。ここで、I_D はDの定義イデアルである。局所的に $D=\{\tau=0\}$ と書けているとすると

$$\Theta_B(-\log D)=\bigoplus_{1\leq j<M}\mathcal{O}_B\frac{\partial}{\partial\tau_j}\oplus\mathcal{O}_B(\tau\frac{\partial}{\partial\tau})$$

となる。

層化した Kodaira-Spencer 写像を定めよう：

定　理4.2.3　　$\mathcal{F}=(\pi^{(n)}:C^{(n)}\longrightarrow B^{(n)};s_1,s_2,\ldots,s_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)$ をn次の無限小近傍の付いた、locally universal family とする。この時、次の自然な $\mathcal{O}_B$-加群の同型

$$\rho:\Theta_B(-\log D)\longrightarrow R^1\pi_*(\Theta_{C/B}(-(n+1)\Sigma S_j)$$

が存在する。ここで、$S_j=s_j(B^{(n)})$ $(1\leqq j\leqq N)$ である。 □

定義4.1.3と比べていただければ、これが Kodaira-Spencer 写像の層化になっていることは分かると思う。

次に問題になるのは、$B^{(\infty)}$ の tangent sheaf である。$B^{(\infty)}$ は無限次元多様体であるから、この上のベクトル場は各$B^{(n)}$ のベクトル場の極限として定める：

$$\Theta_{B^{(\infty)}}(-\log D)=\varprojlim_n \Theta_{B^{(n)}}(-\log D)\otimes_{\mathcal{O}_{B^{(n)}}}\mathcal{O}_{B^{(\infty)}}\ .$$

定理4.2.3からの帰結として、

命　題4.2.4　　$\mathcal{F}=(\pi^{(\infty)}:C^{(\infty)}\longrightarrow B^{(\infty)};s_1,s_2,\ldots,s_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)$ を無限次の無限小近傍の付いた、locally universal family とする。この時、次の自然な $\mathcal{O}_B$-加群の同型

$$\rho:\Theta_{B^{(\infty)}}(-\log D)\longrightarrow \varprojlim_n (R^1\pi_*(\Theta_{C^{(n)}/B^{(n)}}(-(n+1)\Sigma S_j))$$

が存在する。　□

この同型をもう少し詳しく見よう。$R^1\pi_*$ を Ceck cohomology で書いてみる。ここで開被覆としては、$C^{(n)}=(C-\Sigma S_j)\cup(S_1$ の小近傍$)\cup\ldots\cup(S_N$ の小近傍$)$　を取ることにする。

命　題4.2.5　　§3.1 の条件(Q)が各ファイバごとにみたされているとする。この時、次の $\mathcal{O}_B$-加群の完全列が成り立つ：

$$0\longrightarrow R^0\pi_*\Theta_{C/B}(\Sigma*S_j)\longrightarrow \sum_{1\leqq j\leqq N}\mathcal{O}_B((\xi_j))\frac{\partial}{\partial\xi_j}$$
$$\xrightarrow{\theta}\Theta_B(-\log D)\longrightarrow 0\ .$$

ここで、π, C, Bは全て (∞) を省略した。　□

上の完全列で、θ は実はリー環の準同型になる。　$\Sigma\mathcal{O}_B((\xi_j))\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ にリー環の構造を入れよう。まず、$\mathcal{O}_B((\xi))\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ の $\mathcal{O}_B$-リー環の積 $[\ ,\ ]_0$ を普通に、

$$[f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi},\ g(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}]_0 = f(\xi)\frac{\partial g}{\partial\xi}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi} - g(\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}$$

で定める。更に、θがリー環の順同型になるように、$\mathcal{O}_B((\xi))\frac{\partial}{\partial\xi}$ の新しい積を

$$[f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi},\ g(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}]_1 = [f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi},\ g(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}]_0 + \theta(f\frac{\partial}{\partial\xi})(g)\frac{\partial}{\partial\xi} - \theta(g\frac{\partial}{\partial\xi})(f)\frac{\partial}{\partial\xi}$$

で定める（$[\ ,\ ]_1$ と書いたのは、後に別の積を定めるからである）。なお、$[\ ,\ ]_1$ は最早 $\mathcal{O}_B$-リー環の積ではないことを注意しておく。もともと、ξ は 局所座標であり、その意味では、ξ-微分が$B=B^{(\infty)}$ の函数にかかってくるのはむしろ自然なことである。

4-3　真空の作る層

3.2節で定めた、真空の空間を層化する。今までに定めたことを組み合わせるだけで別に新しいことをやるわけではない。

$\mathcal{F}=(\pi^{(\infty)}:C^{(\infty)}\longrightarrow B^{(\infty)};\ s_1^{(\infty)}, s_2^{(\infty)},\dots, s_N^{(\infty)};\ t_1^{(\infty)}, t_2^{(\infty)},\dots, t_N^{(\infty)})$ を無限小近傍の付いたものの local universal family とする。以下では、繁雑を避けるため、誤解を生じない場合は、(∞)を省略することもある。

定　義4.3.1　　次のような$B^{(\infty)}$の上の層を用いる：

$$\tilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\overrightarrow{\lambda}} = \mathcal{O}_B \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}} \ , \qquad \tilde{\mathscr{H}}^{\dagger(\infty)}_{\overleftarrow{\lambda}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}, \mathcal{O}_B) \ ,$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_N = \mathfrak{g} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Big(\bigoplus_{1 \leq j \leq N} \mathcal{O}_B((\xi_j)) \Big) \oplus \mathcal{O}_B \cdot c \quad .$$

以上は、$\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$, $\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$, $\hat{\mathfrak{g}}_N$ の層化であり、$B^{(\infty)}$ で考えているため、単なる直積である。

$\tilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\overrightarrow{\lambda}}$, $\tilde{\mathscr{H}}^{\dagger(\infty)}_{\overleftarrow{\lambda}}$ は、それぞれ、左及び右$\tilde{\mathfrak{g}}_N$-加群である：

$\forall a_k \in \mathcal{O}_B$, $\forall F \in \mathcal{O}_B$, $\forall X_j \in \mathfrak{g}$, $\forall |\Psi> \in \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$　に対して

$$\oplus_j (X_j \otimes \textstyle\sum_k a_k \xi_j^k) \circ (F \otimes |\Psi>) = \displaystyle\sum_{j,k} (a_k F) \otimes \rho_j (X_j \otimes \xi_j^k) |\Psi> \ .$$

更に、$\hat{\mathfrak{g}}(\mathscr{A})$ の層化を次で定める：

$$\tilde{\mathfrak{g}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{g} \otimes \pi_* \mathcal{O}_C(*\Sigma s_j(B)) \quad .$$

$\tilde{\mathfrak{g}}(\mathscr{F})$は、局所座標（$t_1^{(\infty)}, \ldots, t_N^{(\infty)}$）を用いて、$\tilde{\mathfrak{g}}_N$ に埋め込むことができる。また、$\tilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\overrightarrow{\lambda}}$, $\tilde{\mathscr{H}}^{\dagger(\infty)}_{\overleftarrow{\lambda}}$ は、それぞれ、左及び右$\tilde{\mathfrak{g}}(\mathscr{F})$-加群にもなる。これらの記号の下に、$B^{(\infty)}$ の上に、真空の層と呼ばれる、$\mathcal{O}_B$-加群 $\mathcal{V}_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathscr{F})$, $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathscr{F})$ を次で定める：

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F}) = \tilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}} / \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\tilde{\mathcal{H}}_{\vec{\lambda}} ,$$

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathcal{F}) = \{<\Psi| \in \tilde{\mathcal{H}}^{\dagger(\infty)}_{\overleftarrow{\lambda}} ; <\Psi| a = 0, \ \forall a \in \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\}$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F}), \mathcal{O}_B) . \qquad \square$$

以下では、この真空の層の性質を調べていくわけだが、$B^{(\infty)}$ は無限次元多様体であるから、いろいろ不都合もある。そこで、上で定めた層を$B^{(1)}$ に落とすことを考える。

$\psi^{(1)} : B^{(\infty)} \longrightarrow B^{(1)}$ はファイバが $(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ の主束であった。そこで、$B^{(\infty)}$ の話を、$B^{(1)}$ に落とすためには、$\mathcal{D}^1$ による作用を調べればよい。まず、$(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ の $\Sigma\mathcal{O}_B((\xi_j))$ への作用は

$$\forall \vec{h} \in (\mathcal{D}^1)^{\oplus N} , \ \forall \sum_{k,j} a_{k,j}\xi_j^k \in \Sigma\mathcal{O}_B((\xi_j)) \text{ に対して}$$

$$\vec{h} \circ (\Sigma a_{k,j}\xi_j^k) = \Sigma L_{\vec{h}}(a_{k,j}) h(\xi_j^k)$$

$$\text{ここで} \quad L_{\vec{h}}(a_{k,j})s = a_{k,j}(\vec{h}^{-1} \circ s), \qquad \forall s \in \Sigma_j \mathbb{C}((\xi_j))$$

である(2-4節を参照)。$\tilde{\mathcal{G}}_N$ への作用は、上の作用をそのまま自明に拡張する。また、$\tilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ への作用 σ は、

$$\forall \vec{h} = (h_1, \ldots, h_N) \in (\mathcal{D}^1)^{\oplus N} , \ \forall F \otimes |\Psi> \in \tilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}} \text{ に対して}$$

$$\sigma(\vec{h})(F\otimes|\Psi>)=L_{\vec{h}}(F)\otimes\Pi_j(\rho_j(G[h_j])|\Psi>$$

で定める。ここで、$h=\exp(\underline{\ell})\in\mathcal{D}^1$ の時、$G[h]=\exp(-T[\ell])$。

以上の準備のもとで、

補 題4.3.2　$\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$, $\widetilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ は$(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$の作用で不変である。従って、特に$(\mathcal{D}^1)^{\otimes N}$ は $\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ に作用できる。 □

定 理4.3.3　$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F})$に対して、$B^{(1)}$上の層 $\mathcal{U}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ が存在して、

$$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F})=\psi^{(1)*}(\mathcal{U}^{(1)}_{\vec{\lambda}})\quad.$$ □

実際、$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F})$ の $(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$-不変部分 $\mathcal{U}'$ を取ると、$\mathcal{U}'=\psi^{(1)-1}(\mathcal{U}^{(1)}_{\vec{\lambda}})$ となる$\mathcal{U}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ が取れて、$\mathcal{U}'\otimes\mathcal{O}_{B^{(\infty)}}\simeq\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{F})$。

従って、真空の層は1次の無限小近傍のついた local universal family から決まってしまう。同様に、$\mathcal{U}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathcal{F})$ についても、$B^{(1)}$上の層 $\mathcal{U}^{\dagger(1)}_{\overleftarrow{\lambda}}$ が存在して、$\mathcal{U}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}(\mathcal{F})=\psi^{(1)*}(\mathcal{U}^{\dagger(1)}_{\overleftarrow{\lambda}})$ となる。

$B^{(1)}$ は有限次元多様体であるから、ここでは、coherent であるということが意味を持つ（$B^{(\infty)}$ だけを考えられない理由の1つはここにある）。次の定理が、本稿の1つの主定理である：

定　理4.3.4　$\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$, $\mathcal{V}^{\dagger(1)}_{\overleftarrow{\lambda}}$ は coherent $\mathcal{O}_{B^{(1)}}$-加群の層である。

証明は省略する。原典[TUY]を参照されたい。証明に Gabber の定理を用いているため、定理4.3.3を直接に$B^{(\infty)}$で示すことは、今のところできない。なお、この定理の証明には、proper flat family であること以外に何も使わない。

4-4　twist した微分作用素

前節で、真空の層が coherent であることを示したが、ここでは更に、真空の層が discriminant set $D^{(\infty)}$ を除いた部分で locally free であることを見る。実際にはより強く、$D^{(\infty)}$ の上でも locally free になるが、この事実を示すためには、境界での挙動を調べなければならないので、第5章に回すことにする。

この節の目標は、$\tilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ の上に、$\Theta_B(-\log D^{(\infty)})$ の作用を[BMS]の類似で、定義することであるが、その前に、4-2節で定めたリー環の層 $\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathcal{O}_B((\xi))\frac{d}{d\xi_j}$、のある拡大が、$\tilde{\mathcal{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ に作用することを見る。

$\mathcal{F}=(\pi^{(\infty)}:C^{(\infty)}\longrightarrow B^{(\infty)},\ s^{(\infty)}_1, s^{(\infty)}_2, \ldots, s^{(\infty)}_N;\ t^{(\infty)}_1, t^{(\infty)}_2, \ldots, t^{(\infty)}_N)$ を無限小近傍の付いたものの local universal family とする。以後、stable curve の family のみを考える。$\mathcal{O}_B$-加群の層 $\widetilde{Vir}_B(c_v)$ を

$$\widetilde{Vir}_B(c_v) = (\bigoplus \mathcal{O}_B((\xi))\frac{d}{d\xi}) \oplus \mathcal{O}_B\cdot c_v$$

で定める。この $\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ のリー環の構造を次で定める。

定　義4.4.1　$\vec{\ell}_k=(\ell_k^1,\ell_k^2,\dots,\ell_k^N)\in\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathcal{O}_B((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j}$ $(k=1,2)$

$r_1, r_2\in\mathcal{O}_B$ とする。$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ の元 $(\vec{\ell}_1, r_1\cdot c_v), (\vec{\ell}_2, r_2\cdot c_v)$ に対して

リー環としての積[,] を

$$[(\vec{\ell}_1, r_1),(\vec{\ell}_2, r_2)]=[\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2]_1+\frac{c_v}{12}\sum_{1\leq j\leq N}\mathrm{Res}\left(\frac{d\ell_1^j}{d\xi_j^3}\ell_2^j\, d\xi_j\right)$$
$$+(\theta(\vec{\ell}_1)(r_2)-\theta(\vec{\ell}_2)(r_1))\cdot c_v$$

で定める。$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ は $\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathcal{O}_B((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j}$ をBの上の trivial 束 $\mathcal{O}_B\cdot c_v$ で拡大したものになる。c_v は center であるが、$\mathcal{O}_B$ に作用するので、中心拡大ではない。

更に、$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ の $\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ への作用 D を次で定める：

$V=(\vec{\ell}, r\cdot c_v)\in\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$, $f\in\mathcal{O}_B$, $|\Psi\rangle\in\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$D(V)(f\otimes|\Psi\rangle)=\theta(\vec{\ell})(f)\otimes|\Psi\rangle-f\otimes\Sigma_j T[\ell^j]|\Psi\rangle$$
$$+c_v\, r\, f\otimes|\Psi\rangle.$$

ここで、$c_v=\dfrac{\ell\dim\mathfrak{g}}{\ell+g^*}$ である（2-3節を参照）。□

また、$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ から $\bigoplus_{1\leq j\leq N} \mathcal{O}_B((\xi_j))\dfrac{d}{d\xi_j}$ への自然な射影 p を

$$V=(\vec{\ell},\ r\cdot c)\in\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v) \quad \text{に対して} \quad p(V)=\vec{\ell}$$

で定める。$\bar{\theta}=p\circ\theta$ と書く。

$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ の積や $\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ への作用について、次の公式が成り立つ：

補 題4.4.2 $V, V_1, V_2 \in\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$, $f\in\mathcal{O}_B$, $|\Psi>\in\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ に対し

1) $[V_1, fV_2] = f[V_1,V_2] + \bar{\theta}(V_1)(f)V_2$.

1') $[fV_1,V_2] = f[V_1,V_2] - \bar{\theta}(V_2)(f)V_1$.

2) $D(fV)=fD(V)$.

3) $[D(V_1),D(V_2)] =D([V_1,V_2])$.

4) $D(V)(f\otimes|\Psi>) =(\bar{\theta}(V)f)\otimes|\Psi> + f\otimes D(V)|\Psi>$. □

証明はいずれもたやすい。

このリー環の作用 D は、真空の層の作用に落ちる。なぜならば、

命 題4.4.3 $\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ の作用Dは、$\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\cdot\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ を保つ。

証明) $\vec{X}\in \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}(\bigoplus_{1\leq j\leq N}\mathcal{O}_B((\xi_j)))$, $V\in\widetilde{\mathrm{Vir}}(c_v)$ について $\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ の上の作用素として、

$$[D(V),\vec{X}] = \bar{\theta}(V)(\vec{X})$$

となる。ここで、$\bar{\theta}(V)\in\Theta_B(-\log D)$ は $\vec{X}$ の $\mathcal{O}_B((\xi_j))$ の部分に作用する。□

系4.4.4 $\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ に作用する。 □

我々が本当に欲しいのは、$\Theta_B(-\log D)$ の$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ への作用である。$\bar{\theta}:\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v) \longrightarrow \Theta\ (-\log D)$ は全射であったから、その kernel がどうなるか調べればよい。命題4.2.5より、$\mathrm{Ker}(\bar{\theta})=\mathrm{Ker}(\theta)+\mathcal{O}_B c_v = R^0\pi_*\Theta_{C/B}(\Sigma * S_j)$ である。

残念ながら、kernel が0で作用するわけではない。しかし、

定 理4.4.5 一意に $\mathcal{O}_B$-加群の写像 $a:\mathrm{Ker}(\bar{\theta})\longrightarrow\mathcal{O}_B$ が存在して、$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ の上の作用素として

$$D(V) = a(V)\cdot \mathrm{id}.,\qquad \forall V\in\mathrm{Ker}(\bar{\theta}) \quad .$$ □

ここで、$D(V)$ は、$\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ の上の作用素としては、必ずしも、$a(V)\cdot\mathrm{id}.$ にならないことに注意しておく。

証明） 以下、多少ごまかした証明を書いておく。方針は正しい。

$|\Psi\rangle \in \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$, $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$, $\vec{\ell} \in \mathrm{Ker}(\theta)$ に対して、定義により

$$\langle\Phi|D(\vec{\ell},0)|\Psi\rangle = -\sum_{1\leq j\leq N} \langle\Phi|\rho_j(T(\ell^j)|\Psi\rangle$$

$$= \quad \Sigma\, \mathrm{Res}_{\xi_j=0}(\ell_j(\xi_j)\langle\Phi|\rho_j(T(\xi_j))|\Psi\rangle d\xi_j).$$

ここで、 $\rho_j(T(\xi_j))$ の作用は

$$\langle\Phi|\rho_j(T(\xi_j))|\Psi\rangle = \lim_{\xi\to\xi_j} \left\{\frac{1}{2(\ell+g^*)}\Sigma_k\langle\Phi|J_k(\xi)J_k(\xi_j)|\Psi\rangle - \frac{c_v}{2(\xi-\xi_j)^2}\langle\Phi|\Psi\rangle\right\} \quad \cdots\cdots(☆)$$

となるが（2-3節を参照）、ここで

$$\omega=\omega(w,z)\,dw\,dz = \frac{dw\,dz}{(w-z)^2} + (z=w \text{ で正則})$$

となるような、$\omega \in H^0(C \times_B C\,;\omega^{\boxtimes 2}_{C/B}(2\Delta))$ が存在する(一意とは限らない)。

この ω に対して、

$$S_\omega(z)(dz)^2 = -\frac{1}{2}\lim_{w\to z}\left\{\omega(w,z)\,dw\,dz - \frac{dw\,dz}{(w-z)^2}\right\}$$

は ω を別の ω' に取り替えても、$S_{\omega} - S_{\omega'}$ は大域的２次形式になる([F]を参照)。
そこで、

$$<\Phi|\rho_j(\widetilde{T}(\xi_j))|\Psi>(d\xi_j)^2 = \lim_{\xi \to \xi_j} \{\frac{1}{2(\ell+g^*)} \Sigma_k <\Phi| J_k(\xi) J_k(\xi_j)|\Psi> - \frac{c_v}{2}\omega(w, z)<\Phi|\Psi>\}$$

とおくと、

$$<\Phi|D(\vec{\ell}, 0)|\Psi> = \Sigma \operatorname{Res}_{\xi_j=0}(\ell_j(\xi_j)<\Phi|\rho_j(\widetilde{T}(\xi_j))|\Psi>d\xi_j). + \Sigma \operatorname{Res}_{\xi_j=0}(c_v<\Phi|\Psi>\ell_j(\xi_j)S_{\omega}d\xi_j)$$

となるが、ここで $(\ell_j(\xi_j)<\Phi|\rho_j(T(\xi_j))|\Psi>d\xi_j)$ は大域的な有理形式であるから、初項＝０。それゆえ、

$$a_{\omega}(\vec{\ell}) = \operatorname{Res}_{\xi_j=0}(\ell_j(\xi_j)S_{\omega}d\xi_j)$$

とおけば、これは S_{ω} の性質から、ωによらない。 □

実はさらに、上の a の定義式を使って、

命 題4.4.6 上で定めた a は、$\mathcal{O}_B$-加群の写像 $a' : \widetilde{Vir}_B(c_v) \longrightarrow \mathcal{O}_B$ へ canonical ではないが、伸ばすことができる。 □

従って、$\Theta_B(-\log D)$ はそのままでは、$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ に作用しないが、少しひねると、作用できるようになる：

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_B \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\theta) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathrm{Vir}_B(c_v) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "p"] & D^1_\infty(-\log D, c_v) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\theta) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \sum_{1\leq j\leq N} \mathcal{O}_B((\xi_j))\dfrac{\partial}{\partial \xi_j} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \Theta_B(-\log D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

ここで、写像 h は $V \in \mathrm{Ker}(\vec{\ell})$ に対して、$h(\vec{\ell}) = (i(\vec{\ell}),\ a'(\vec{\ell}))$ で定め、$D^1_\infty(-\log D, c_v)$ を $\mathrm{Coker}(h)$ で定義する。この時、$D^1_\infty(-\log D, c_v)$ はリー環として、$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ に作用できる。各列は、$\mathcal{O}_B$-加群として split する。

上の完全列からだけでは、$D^1_\infty(-\log D, c_v)$ がリー環になることは自明ではない。リー環としての構造を見るために、話を $B^{(1)}$ に移して考える。

定理4．3．3で見たように、真空の層は $B^{(1)}$ まで落ちる。 $\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ の作用が、$B^{(1)}$ に落ちることを見るためには、$(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ の作用との compatibility を見ればよい。ところが、$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ も $(\mathcal{D}^1)$ も座標変換を表す($\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ はリー環のレベル)ものであり、いわば一つ穴のムジナである。$(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ の $\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$ への作用を見よう：

$\vec{h}=(h_1, h_2, \ldots, h_N)\in(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$, $\quad V=(\vec{\ell}, r\cdot c_v)\in\widetilde{Vir}_B(c_v)$ に対し

$V=((0,\ldots,\ell_j=\Sigma_k a_k \xi_j^k,\ldots,0)\ ,0\cdot c_v)$ の時 $(a_k\in\mathcal{O}_B)$

$$\pi(\vec{h})V=\ (\Sigma L_{\vec{h}}(a_k)Ad(h_j)\ (\xi_j^k \frac{d}{d\xi_j}),$$

$$\frac{c_v}{12}\mathrm{Res}_{\xi_j=0}\ [L_{\vec{h}}(\ell_j)\{h_j, \xi_j\}(\frac{dh_j}{d\xi_j})^{-1}d\xi_j]),$$

$V=(0, r\cdot c_v)$ の時 $(r\in\mathcal{O}_B)$

$$\pi(\vec{h})V=(0,\ L_{\vec{h}}(r)\cdot c_v).$$

$L_{\vec{h}}$ については、4-3節を参照されたい。この作用πについて、次のことが成り立つ。

命　題4.4.7　　$\forall\vec{h}\in(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ に対して、$\pi(\vec{h})$ は $\widetilde{Vir}\ (c_v)$ の、リー環としての automorphism である。更に、$\forall f\in\mathcal{O}_B$ に対して、

$$\pi(\vec{h})(fV)=L_{\vec{h}}(f)\pi(\vec{h})V\ . \qquad\square$$

調べることは、$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ への作用であった。$(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$ の $\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ への作用σも4-3節で定義している：

命　題4.4.8　　$\forall h\in(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}$, $\forall V\in\widetilde{Vir}_B(c_v)$ に対して、$\widetilde{\mathscr{H}}^{(\infty)}_{\vec{\lambda}}$ の上の作用素として、

$$\sigma(\vec{h})\circ D(V)\circ\sigma(\vec{h})=D(\pi(\vec{h})V)\ .$$

もちろん、この関係式は、$\mathcal{U}_{\vec{\lambda}}$ の上の作用素と見ても成り立つ。 □

この命題4.4.8から直ちに、

系　4.4.9　　$V\in\mathrm{Ker}(\bar{\theta})$ とする。$a(V)\in\mathcal{O}_B$について

$$a(V)(\vec{h}(b))=a(\pi(\vec{h})V)(b),\qquad \forall b\in B^{(\infty)},\ \forall\vec{h}\in(\mathcal{D}^1)^{\oplus N}.$$ □

以上で、aを含めて、$\mathcal{D}^1$ の作用との関係が全て分かった。以上のことから、

命　題4.4.10　　$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)$, $\mathrm{Ker}(\theta)$ に対して、$B^{(1)}$上の層 $\widetilde{\mathrm{Vir}}^{(1)}_B(c_v)$, $\mathrm{Ker}^{(1)}(\theta)$ が存在して

$$\widetilde{\mathrm{Vir}}_B(c_v)=\psi^{(1)*}\widetilde{\mathrm{Vir}}^{(1)}_B(c_v)\ .$$

$$\mathrm{Ker}(\theta)=\psi^{(1)*}\mathrm{Ker}^{(1)}(\theta)\ .$$

そして、リー環としての完全列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{B^{(1)}}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{Vir}}^{(1)}_B(c_v)\longrightarrow\sum_j\mathcal{O}_{B^{(1)}}((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j}\longrightarrow 0\ ,$$

$$0\to\mathrm{Ker}^{(1)}(\theta)\longrightarrow\sum_j\mathcal{O}_{B^{(1)}}((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j}\longrightarrow\Theta_{B^{(1)}}(-\log D^{(1)})\to 0$$

が成り立つ。この、後のほうの完全列の全射を、$\theta^{(1)}$ と書く。即ち、$\mathrm{Ker}^{(1)}(\theta)=\mathrm{Ker}(\theta^{(1)})$ である。 □

ここで話を変えて、直接、$D^1_B(-\log D, c_v)$ を定義しよう。

まず、$C^{(1)}$の上の層 $V_{C/B}(c_v)$ を次の完全列(※)で定める：

$$0 \to \omega_{C^{(1)}/B^{(1)}} \longrightarrow V_{C/B}(c_v) \longrightarrow \Theta_{C^{(1)}/B^{(1)}}(-\Sigma 2S_j) \to 0. \quad (※)$$

$V_{C/B}(c_v)$ は局所的には $\Theta_{C^{(1)}/B^{(1)}}(-\Sigma 2S_j) \oplus \omega_{C^{(1)}/B^{(1)}}$ と書けており、その貼合わせは次で定める：

$t=(t_1,\ldots,t_M)$ を$C^{(1)}$の、zをファイバ方向の局所座標とする。

$$(\ell(t,z)\frac{\partial}{\partial z},\ f(t,z)dz) \in \Theta_{C^{(1)}/B^{(1)}}(-\Sigma 2S_j) \oplus \omega_{C^{(1)}/B^{(1)}}$$

を別の局所座標(t', z')で表して、

$$(\ell'(t',z')\frac{\partial}{\partial z'},\ ,f'(t',z')dz') \quad \text{と書くと}$$

$$\ell'(t',z')\frac{\partial}{\partial z'} = \ell(t,z)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$f'(t',z')dz' = f(t,z)dz + \frac{c_v}{12}\{z',z\}\ \ell(t,z)dz .$$

実は、上では貼合わせを、$C^{(1)}-\Sigma^{(1)}$ でしか定義していないが、$\Sigma^{(1)}$は余次元2であるから、自然に伸びる。

局所的には、次のような splitting が存在する。定理4.4.5の証明で用いた$S(z)(dz)^2 = S_\omega(z)(dz)^2$ を用いて（$S(z)$ はファイバ方向の2次形式で、$C^{(1)}$でも$C^{(\infty)}$でも同様に定義できる）：

$$\begin{array}{ccc}\Theta_{C^{(1)}/B^{(1)}}(-\Sigma 2S_j)\oplus\omega_{C^{(1)}/B^{(1)}} & \simeq & V_{C^{(1)}/B^{(1)}}(c_v) \\ \Psi & & \Psi \\ (\ell\frac{d}{dz}, fdz) & \longrightarrow & (\ell\frac{d}{dz}, (f+c_v\cdot\ell S(z))dz)\end{array}$$

で与えられる。S(z) は座標変換で次のような変換則を持つことに注意されたい：

$$S(w)(dw)^2=S(z)(dz)^2+\frac{1}{12}\{w,z\}\,dz^2.$$

従って、$V_{C/B}(c_v)$ の変換則と合わせて、上の splitting は、座標にはよらない。また、この splitting により、$V_{C/B}=V_{C/B}(c_v)$ にリー環の構造が入る。

完全列(※)を、$R\pi_*$ で落としてやると

$$\begin{array}{ccccccccc}R^0\pi_*\Theta_{C/B}(-2) & \to & R^1\pi_*\omega_{C/B} & \to & R^1\pi_*V_{C/B} & \to & R^1\pi_*\Theta_{C/B}(-2) & \to & 0 \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & D^1_B(-\log D, c_v) & \longrightarrow & \Theta_B(-\log D) & \to & 0\end{array}$$

となる。ここで、$\Theta_{C/B}(-2)$ など、記号を省略したが、意味は分かると思う。また、最初の等号は明らか、２番目は duality、４番目は Kodaira-Spencer 写像である。そして、３番目の等号で、$D^1_B(-\log D, c_v)$ を定義する。$V_{C/B}$ のリー環としての構造から、$D^1_B(-\log D, c_v)$ もリー環になる。上の図式の下の行は、リー環としての拡大になっている。

また、先ほど述べた $V_{C/B}$ の splitting を用いると

$$D^1_B(-\log D, c_v) \simeq \mathcal{O}_{B^{(1)}} \oplus \Theta_{B^{(1)}}(-\log D)$$

という、$\mathcal{O}_{B^{(1)}}$-加群としての同型を得る。しかしながら、上の splitting は $\omega \in H^0(C \times_B C ; \omega^{\boxtimes 2}_{C/B}(2\Delta))$ の取り方による。

命題4.4.10と合わせて、命題4.4.6の後で述べた図式の完全列が、$B^{(1)}$の上で、構成されたことになる。あの図式で述べた写像 ρ は今の場合、次のように構成される。
命題4.4.6で述べた a' は、系4.4.9により、$B^{(1)}$に落ちる。定義を再録すると

$$\omega = \frac{dw\,dz}{(w-z)^2} + (z=w \text{ で正則}) \quad \text{となる} \quad \omega \in H^0(C \times_B C ; \omega^{\boxtimes 2}_{C/B}(2\Delta))$$

を用いて、

$$\begin{array}{rccc} a' : & \widetilde{Vir}^{(1)}_B(c_v) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{B^{(1)}} \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & (\vec{\ell}, r) & \longrightarrow & \mathrm{Res}_{\xi_j=0}(\ell_j(\xi_j) S_\omega d\xi_j) + r \end{array}$$

で定める。この a' と、$\theta^{(1)}$ とを合わせて、

$$\begin{array}{rccc} \rho^{(1)} : & Vir^{(1)}_B(c_v) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{B^{(1)}} \oplus \Theta_{B^{(1)}}(-\log D) \simeq D^1_B(-\log D, c_v) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & V & \longrightarrow & (a'(V), \ \theta^{(1)}(V)) \end{array}$$

で定義する。これはリー環としての準同型になる。$Vir^{(1)}_B(c_v)$ は $\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ に作用するが

ここで、$\ker\ \rho^{(1)}$ は、$\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ に0-写像で作用するので、$D^{1}_{B}(-\log D, c_{v})$ は $\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ に作用できる。

ようやく、この節の主定理を得た：

定　理4.4.11　$\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$ の上に、リー環 $D^{1}_{B}(-\log D, c_{v})$ は twist された1階の微分作用素として作用する。特に、$\mathcal{V}^{(1)}_{\vec{\lambda}}$, $\mathcal{V}^{\dagger(1)}_{\overleftarrow{\lambda}}$ は、$B^{(1)} \setminus C^{(1)}$ の上で、局所自由層になる。　□

4-5　$\mathbf{P}^1$の場合

$\mathbf{P}^1$のときに、真空の方程式がどうなるか、調べてみよう。簡単のため、境界を外して考える。仮定より、$N \geqq 3$ である。$\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ と考え、$\mathbb{C}$の通常の座標を z とする。$B = \{(\mathbf{P}^1; Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$の正則同値類；$Q_1, Q_2, \ldots, Q_N \in \mathbf{P}^1\}$ である。

我々は、$B^{(1)}$ の上で考えるわけだが、$\mathbf{P}^1$の場合は、自然な座標 z が存在するので、座標を固定して進めることができる。即ち、$X_N = \{(z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N - \Delta\}$ （但し、$\Delta = \{$ある $z_i = z_j\}$ ）と置くと、$X_N \longrightarrow B^{(1)}$ という写像がある。つまり、各点Qの周りの局所座標(の１次無限小の同値類)として、z (の１次無限小の同値類)を取ればよい。そこで、以下では、真空の層を、このX_Nの上で考える。

命題3.4.1より、真空の層 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$ は自明束 $X_N \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}; \mathbb{C})$ の部分束になる。

命　題4.5.1　　$\langle\Phi|\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N};\mathbb{C})$ が $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$ に属するための条件は、$L_p=\ell-(\lambda_p,\theta)+1$ として

$$\sum_{m=(m_1,\dots,\underset{p}{\wedge},\dots,m_N)}\binom{L_p}{m}\prod_{j\neq p}(z_j-z_p)^{-m_j}\langle\Phi|\rho_1(X_\theta)^{m_1}\cdots\overset{p}{\vee}\cdots\rho_N(X_\theta)^{m_N}|\Psi\rangle=0$$

が、$\forall p$, $\forall|\Psi\rangle=|u_1\rangle\otimes\cdots\otimes|\lambda_p\rangle\otimes\cdots\otimes|u_N\rangle\in V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}$ に対して成立つことである。ここで、$|\lambda_p\rangle$は V_pの最高ウェイトベクトルである。　□

証明）　$\langle\Phi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N};\mathbb{C})$ の中で特徴づけると、

$$\langle\Phi|(|u_1\rangle\otimes\cdots\otimes\rho_p(X_\theta(-1))|\lambda_p\rangle\otimes\cdots|u_N\rangle)=0$$

となるので、ゲージ条件から、この左辺は

$$-\sum_{m=(m_1,\dots,\underset{p}{\wedge},\dots,m_N)}\binom{L_p}{m}\langle\Phi|\rho_1(X_\theta\otimes f(\xi_1))^{m_1}|u_1\rangle\otimes\cdots\overset{p}{\vee}\cdots\otimes\rho_N(X_\theta\otimes f(\xi_N))^{m_N}|u_N\rangle$$

となる。ここで、$f(\xi)=\xi^{-1}$，$\xi_j=z-z_j$（局所座標）である。この式を書き直せば、命題を得る。　□

真空の層の上に、$D^1_B(c_v)$ が作用するが、実はP^1の特殊性により、この作用には twist がない（今は境界を考えていないので、$(-\log D)$は書かない）。

命　題4．5．2　　$\langle\Phi| \in X_N \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N};\mathbb{C})$ に対し、$\dfrac{\partial}{\partial z_j} \in \Theta_{X_N}$

の作用 $D(\dfrac{\partial}{\partial z_j})$ は次のようになる：

$$D(\frac{\partial}{\partial z_j})\langle\Phi| = \frac{\partial}{\partial z_j}\langle\Phi| + \frac{1}{(\ell+g)}\sum_{i\neq j}\frac{\Omega_{ij}}{z_j - z_i}\langle\Phi| \ .$$

ここで、Ω_{ij}はカシミール作用素

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq r}\rho_i(J_k)\rho_j(J_k) \quad , \{J_k\}_{1\leq k\leq r} \text{ は}\mathfrak{g}\text{の正規直交基底}$$

である。　□

ここで、Ω は次の pure braid 関係を満たす：

$$[\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] = 0. \qquad (i,j,k,l \text{ はお互いに異なる})$$

$$[\Omega_{ij}, \Omega_{ik} + \Omega_{kj}] = 0. \qquad (i,j,k, \text{ はお互いに異なる})$$

このことから、命題４．５．２の微分方程式は完全積分可能である。

命題４．５．１，命題４．５．２で得た方程式は、ちょうど、[TK]の定理３．１(Ⅲ)(Ⅳ)に一致する。元々は、[KZ]によって得られたものである。

§5. 境界での挙動

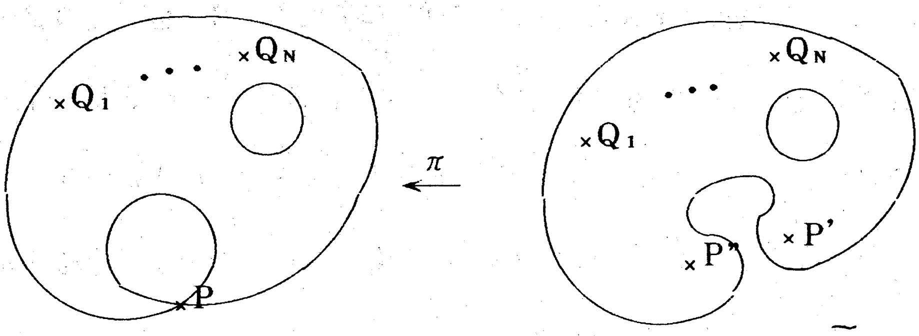
本章はこれまでの章と違って、スケッチをのべるだけにします。詳細は、原典[TUY]を見て下さい。

5-1 Normalization と真空の伝播II

3.1節で、semi-stable curve の正規化を定めたが、double point を持つ曲線の上の真空と、その正規化の上の真空との関係を見てみよう。

$\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\ldots,Q_N)$ を type(g,N) の punctured semi-stablecurve 、PをCの double point とする。Cの正規化 $\pi:\widetilde{C}\longrightarrow C$ について、$\pi^{-1}(P)=P'\cup P''$ とおく(p24 の絵を参照)。ここで、$\widetilde{\mathfrak{X}}=(\widetilde{C};Q_1,Q_2,\ldots,Q_N,P',P'')$ を考える。$\widetilde{C}$は連結とは限らないが、その時は、連結成分に分けて、punctured semi-stable curve が複数(今は高々2つ)あると見る。その場合、真空 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ は各成分の真空のテンソル積であると思う。$\vec{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\in(P_\ell)^N$, $\mu_1,\mu_2\in P_\ell$ として、$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ と $\mathcal{V}_{\vec{\lambda},\mu_1,\mu_2}(\widetilde{\mathfrak{X}})$ とを比較する。

なお、$\mu\in P_\ell$ に対して、$\mu^\dagger\in P_\ell$ を $(-\mu^\dagger)$ がV_μ の最低ウェイトになるように定める。言い換えると、Weyl 群の最長元wを用いて、$-\mu^\dagger=w(\mu)$。



C　　　　　　　　$\widetilde{C}$

定　理5．1．1　　以上の記号のもとで、

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \simeq \sum_{\mu \in P_\ell} \mathcal{V}_{\vec{\lambda},\mu_1,\mu_2}(\widetilde{\mathfrak{X}}) . \qquad \square$$

証明は省略します。[TUY]では、本稿とは順序が異なり、§2で示されています。

次に、定理5．1．1を層化しよう。type(g,N) の punctured semi-stable curves の local universal family　$\pi^{(1)}: C^{(1)} \longrightarrow B^{(1)}$ で話を進める。discriminant set $D^{(1)}$ を既約成分に分解して、$D^{(1)} = \cup D_j^{(1)}$ とおく。ここで、話を局所的に限って、各成分 $D^{(1)}$ は非特異とする。以後、$b \in D^{(1)}$ を固定しよう。bを通る既約成分を、必要なら番号を付け替えて、$D_1^{(1)}, \ldots, D_k^{(1)}$ として、$E^{(1)} = D_1^{(1)} \cap \ldots \cap D_k^{(1)}$ とおく。$D^{(1)}$は normal crossing であるから、$E^{(1)}$ は余次元kの非特異部分多様体になる。

補　題5．1．2　　$(\pi^{(1)})^{-1}(E^{(1)}) = C_E$ とすると、$\pi^{(1)}\big|_{C_E} : C_E \longrightarrow E^{(1)}$ は同時に正規化

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{C}_E & \longrightarrow & C_E & \longrightarrow & C \\
{\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{(1)}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{(1)}} \\
E^{(1)} & = & E^{(1)} & \longrightarrow & B^{(1)}
\end{array}$$

ができる。更に、$E^{(1)}$に於て、double point の逆像にあたる、2k個の点の周りの、1次の無限小近傍のデータを加えたものを、$\widetilde{E}^{(1)}$ とする。$\widetilde{E}^{(1)} \longrightarrow E^{(1)}$ は、ファイバが $(\mathbb{C}^\times)^{2k}$ の主バンドルになる。上の図式の π' をこの$\widetilde{E}^{(1)}$ の上に引き戻した $\pi'' : \widetilde{C}_E \times_{E^{(1)}} \widetilde{E}^{(1)} \longrightarrow \widetilde{E}^{(1)}$ はファイバが連結とは限らないが、連結成分ごとに考えれば、local universal family になる。　$\square$

以後、$\widetilde{C}_E \times_{E^{(1)}} \widetilde{E}^{(1)}$ を簡単のため、単に$\widetilde{C}_E$と書こう。

この補題5.1.2を用いれば、定理5.1.1の層化は次のような形に書ける：

定　理5.1.3　　$\pi^{(1)} : C^{(1)} \longrightarrow B^{(1)}$ に関する真空の層を $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ とする。また $\pi'' : \widetilde{C}_E \longrightarrow \widetilde{E}^{(1)}$ で double point の逆像に当る2k個の点 $(P'_1, P''_1, \ldots, P'_k, P''_k)$ の各々に表現のクラス $(\mu'_1, \mu''_1, \ldots, \mu'_k, \mu''_k) \in (P_\ell)^{2k}$ を対応させる真空の層を、$\mathcal{V}_{\vec{\lambda},(\mu'_1, \mu''_1, \ldots, \mu'_k, \mu''_k)}$ とする。この時、$D^1_{E^{(1)}}(c_v)$加群として、

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}\Big|_{\widetilde{E}^{(1)}} \simeq \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_k \in P_\ell} \mathcal{V}_{\vec{\lambda},(\mu_1, \mu_1^{\dagger}, \ldots, \mu_k, \mu_k^{\dagger})}$$

ここで、$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}\Big|_{\widetilde{E}^{(1)}} = \mathcal{V}_{\vec{\lambda}} \otimes_{\mathcal{O}_{B^{(1)}}} \mathcal{O}_{E^{(1)}} \otimes_{\mathcal{O}_{E^{(1)}}} \mathcal{O}_{\widetilde{E}^{(1)}}$ である。　□

この定理5.1.3(あるいは定理5.1.1)を真空の伝播IIと言います。ここまで書き進めてくると、“真空の伝播”という表現にも説得力を感じてしまいます。不思議な魅力のある言葉です。

5-2　境界での座標

前節で、境界での真空の様子は、非特異な曲線の真空の言葉で、完全に記述できることを見た。それでは、境界に非常に近いところの真空との関係は、どうなっているのだろうか。この節では、境界での normal 方向での座標を調べて、真空の層が境界まで込めて局所自由層になっていることを見る。

境界の normal 方向というのは、double point をはずす方向である。即ち、double point の近傍で見た場合、τ を normal 方向のパラメタ、z, w を C の座標と見ると、$zw=\tau$ という曲面で、$\tau=0$ が境界に当る。そこで簡単のために、以下では double point が1つしかないと仮定する。また、記号は前節のものをそのまま用いるが、繁を避けるため、$^{(1)}$ は略する。無限次の局所近傍は考えない。

少し、表現空間について、準備をしておこう。$\mathscr{H}_\lambda$ と $\mathscr{H}_{\lambda^\dagger}$ との間には、次のような pairing が、定数倍を除いて一意に存在する：

$$(\ |\ ) : \mathscr{H}_\lambda \times \mathscr{H}_{\lambda^\dagger} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ここで、$(X(n)u|v)+(u|X(-n)v)=0,\quad \forall X\in\mathfrak{g},\ \forall n\in\mathbb{Z}.$

この時、$\mathscr{H}_\lambda(d)$ と $\mathscr{H}_{\lambda^\dagger}(d)$ とは、双対空間になる。そこで $\mathscr{H}_\lambda(d)$ の基底を $\{v_1(d),\ldots,v_{m_d}(d)\}$，$\mathscr{H}_{\lambda^\dagger}(d)$ の双対基底を $\{v^1(d),\ldots,v^{m_d}(d)\}$ と書くことにする。

Bの局所座標を $(\tau,\tau_1,\ldots,\tau_{M-1})$ と取り、境界 $D=\{\tau=0\}$ とする。$B_1=\{\tau\in\mathbb{C}; |\tau|<1\}$ と置くと、局所的には $B=B_1\times D$ と思ってもよい。そこで、次のような埋込みを考える。

補　題5.2.1　$\pi' : \tilde{C}_E \longrightarrow E$ の section σ', σ''を double point の2つの逆像への写像として定義する。この時、次のような、$\mathcal{O}_E$-加群の埋入が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \pi_*\mathcal{O}_C(*S) & \longrightarrow & \pi'_*\mathcal{O}_{\tilde{C}_E}(*(\sigma'+\sigma''+S))[[\tau]] \\ \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup \\ f & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k\tau^k \end{array}$$

ここで、$f_k\in\pi'_*\mathcal{O}_{\tilde{C}_E}(k(\sigma'+\sigma'')+*S)$ 。 □

証明)　話を double point の近傍に限る。命題4.1.4の後で述べた座標を用いて

$$f = f(t_1, \ldots, t_{M-1}, z, w) = \sum_{i,j \geqq 0} f_{ij}(t) z^i w^j$$

と展開すると、 $zw = \tau$ であるから、

$$z \neq 0 \text{ では} \qquad f = \Sigma f_{ij}(t) z^i \left(\frac{\tau}{z}\right)^j \quad , \ f_k := \sum_{i \geqq 0} f_{ik} z^{i-k}$$

$$w \neq 0 \text{ では} \qquad f = \Sigma f_{ij}(t) \left(\frac{\tau}{w}\right)^i w^j \quad , \ f_k := \sum_{j \geqq 0} f_{kj} w^{j-k}$$

とすればよい。 □

この埋入を用いて、形式的なゲージ条件を定義することができる：

$<\Phi| \in \mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}, E}[[\tau]]$ が

$$\sum_{1 \leqq j \leqq N} <\Phi| \Sigma_k \rho_j (X \otimes f_k) \tau^k = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, \ \forall f \in \pi_* \mathcal{O}_C(*S)$$

となる時、形式的ゲージ条件を満たすと言う。ここで、$\mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}, E} = j^* \mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$ 。但し、$j : E \longrightarrow B$。

この形式的ゲージ条件をみたす$<\Phi|$を $\mathcal{V}^{\dagger}_{\mu^\dagger, \mu, \overleftarrow{\lambda},}$ の元を延長することで構成しよう。

命　題5.2.1　$<\Psi| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\mu^\dagger, \mu, \overleftarrow{\lambda}}$ を flat な section、即ち、$D^1_E(c_v)$の作用で0になる元とする。この時、$d \in \mathbb{N}$ に対して、$<\Psi_d| \in \mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}, E}$ を

$$\langle \Psi_d | u \rangle = \sum_{1 \leq j \leq m_d} \langle \Psi | v_j(d) \otimes v^j(d) \otimes u \rangle \qquad \forall | u \rangle \in \mathscr{H}_{\vec{\lambda}, E}$$

として、$\langle \widetilde{\Psi} | \in \mathscr{H}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}, E}[[\tau]]$ を

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \tau^{\Delta_\mu} \sum_{d \geqq 0} \langle \Psi_d | \Phi \rangle \tau^d \qquad \forall | \Phi \rangle \in \mathscr{H}_{\vec{\lambda}, E}$$

で定めると、$\langle \Psi |$は形式的ゲージ条件を満たす。更に、形式解$\langle \Psi |$は収束して、実際に $\mathcal{V}^{\dagger}_{\overleftarrow{\lambda}}$ の元になる。 □

証明は長くなるので、[TUY]に委ねる。真空の満たす微分方程式は確定特異点型であるから、形式的に解を作ってやれば収束する。

以上のことから、次の結果を得る：

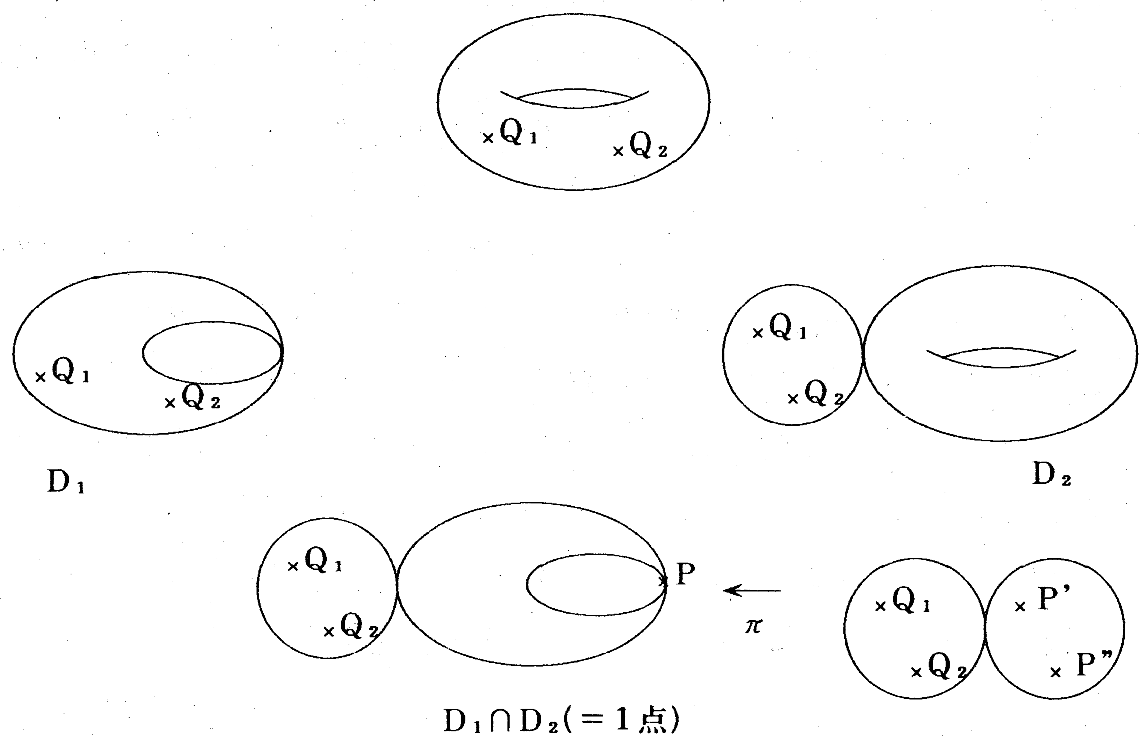
定　理５．２．４　　真空の層$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ は境界まで込めて、局所自由である。 □

この定理を用いて、真空の層の rank が次のように計算できる：

系　５．２．５　　真空の層の rank は、(g,N)=(0,3)の場合から、組合せ論的に計算できる。即ち、境界で曲線を正規化して、定理５．１．３を用いればよい。この時、最終的に、全て(g,N)=(0,3) の場合に帰着される。 □

(g,N)=(0,3)の場合の rank については、[TK]で計算されている。このことから、例えば、真空の層の rank が実際に０でないことが分かる。

$(g,N)=(1,2)$ の場合に境界の様子を見ておこう。楕円曲線に２点Q_1, Q_2がのっている場合であるから、楕円曲線の自己同型を用いて、１点Q_1は楕円曲線の原点(群と見たときの単位元)にあるものとする。従って、moduli 空間Ｂは２次元である。境界の一つの成分D_1 は、楕円曲線のサイクルを１つ潰した場合であり、もう一つの成分D_2 はQ_2をQ_1に近付けた場合である。



こうして、$D_1 \cap D_2$の上の曲線を正規化すると、$(g,N)=(0,3)$ の曲線２つをくっつけたものを得る。

§∞. おわりに

本稿を書くに当って、上野先生の当日('89 2/21)の講演を叩き台にしたことは言うまでもありませんが、他にも、同じような内容について話された、土屋先生の様々な話や、上野先生御自身が京大で行った特別講義('88 11月より'89 2月)をも参考にしました。結果的に、土屋先生が名古屋大学で行った講義('89 2月末)の内容は、ほとんど含まれています。また、土屋先生には、原稿を丁寧に目を通して下さり、多くの誤りを教授してくださいました。心よりお礼申し上げます。本稿をまとめるにあたり、東北大の黒木玄氏のノートが随所で役立ちました。更に、黒木氏からは未稿の段階から、いろいろと助言をいただきました。黒木氏のユニークな労苦と合わせて謝辞を述べます。

affine Lie 環やリーマン面の理論について何ら予備知識のない方に、この理論について解説するためにはかなりの時間が必要です（むしろ、物理的な知識は要りません。今やＣＦＴは数学の一分野です）。その意味でも、上野先生の講義をこのようにまとめることができたことは誠に喜ばしいことです。ただ、後半は駆け足になってしまい、先生の明解な講義に対して、礼を欠いたものになったことを深くお詫びいたします。最後に、私の如く浅学短才にして識また乏しき者にこのような機会を与えてくださった、上野健爾先生, 土屋昭博先生, 三輪神保両先生はじめ、多くの方々に感謝いたします。

なお、佐藤幹夫先生の'84～'85年の京大での講義記録が出版されております。ＫＰ方程式系の話を中心にして、ごくごく初等的な話から代数解析の奥義に至るまでを分かり易く解説した名講義です。いつでもどこでもどこからでも気軽に読める、梅田さんの労作（＋御本人の序文！）はＣＦＴの副読本としても最適でしょう。数理研２階の研究部で扱っておりますので、皆様是非この好機にお買い求め下さい．．．以上ＣＭでした。

文　献

[BMS] Beilinson-Manin-Schechtman, Sheaves of Virasoro and Neuvew-Schwarz algebras,
Lecture Notes in Math.1289 52-66, Springer(1987)

[BPZ] Belavin-Polyakov-Zamolodcikov, Infinite conformal symmetries in two dimensional quantum field theory,
NP,B241(1984) 333-380

[FS] Friedan-Shenker, The analytic geomrtry of two-dimensional conformal field theory, NP,B281(1987) 509-545

[H] Hartshorn, Algebraic Geometry, Springer(1977)

[K] V.Kac, Infinite dimensinal Lie algebras, Birkhäuser(1983)

[KNTY] Kawamoto-Namikawa-Tuchiya-Yamada, Geometric realization of conformal field theory on Riemannian surfaces,
CMP,116(1988) 247-

[KZ] Knizhnik-Zamolodocikov, Current Algebra and Wess-Zumino models in two dimensions, NP,B247 (1984)83-103

[MS] Moore-Seiberg, Classical and Quantum Conformal Field Theory,
CMP,123,177-254(1989)

[TK] Tuchiya-Kanie, Vertex operators in conformal field theory on $\mathbf{P}^1$ and Monodromy representations of braid group,
Advanced Stud. Pure Math.,16 (1988)297-372

[TUY] Tuchiya-Ueno-Yamada, Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries,
Advanced Stud. Pure Math.,19 (1989), to appear

[岩] 岩沢健吉　代数函数論（岩波書店）

[松] 松村英之　可換環論（共立出版）　第９章

[佐] 佐藤幹夫（梅田　亨・記）　数理解析レクチャーノート，好評発売中