

# 可解格子模型

について

山田 裕二  
(Yuji Yamada)

## 目次

	頁
序言	3
§1 Introduction	4
§2 おもてあひの face-vertex 対応	16
§3 Quantum R matrix	24
§4 $X_m^{(1) \#1}$ Face model	29
§5 STR の証明	33
§6 Restriction	40
§7 Fusion procedure	47
§8 Corner transfer matrix	64
§9 Local state probabilities in terms of 1-D sums vertex model in face formulation	75
§10 1D sums for finite $m$	88
§11 1D sums in terms of modular forms	98
References	111

はしがき

本稿のもととなったのは平成元年の二月に京都の関西セミナーハウスで行われた尾角正人氏と国場敦夫氏による可解格子模型についての15時間弱にわたった講義であります。この時に前半8時から9時を尾角氏が、後半9時から11時を国場氏が担当されました。

もとの講義はOHPなども多用して説得力に富むものでありましたが、このノートを書くに当たっては筆者の勝手な判断に巧削する部分も加えた部分があるために原講義の流暢さが失われていることを恐れず。

また当然ながらノートの責任は筆者にあります。

最後に、筆者の納得のいくまで辛抱強く議論に応じて下さった尾角氏、国場氏には心こめて深く感謝させて頂きます。それらはこのノートによって不可欠なものでありました。

平成元年 八月 小田裕二

## Part 1, § 1 Introduction

格子模型、特に可解な(分配函数及び  
1点相関函数が厳密に計算可能な)格子模型  
として Ising model がよく知られている。

2次元の Ising model と1次元の Ising model  
である。正方格子の各頂点上に  $+1$  または  $-1$   
なる値をとる変数 (spin) があり、これらの各  
頂点の隣り合うもの同士のみ相互作用する  
ものとする。つまり、 $N \times M$  なる大きさの格子を  
考え、各頂点上の値を  $\sigma_{ij}$  で表せば、系  
の Hamiltonian  $H$  は

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (K \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + L' \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1})$$

で与えられる。ここで  $K, L'$  はそれぞれ格子の  
横、縦方向の相互作用の係数である。

統計力学における Boltzmann の原理より、  
ある定子、 $T$  の値の組  $\sigma = (\sigma_{ij})$ : configuration  
が実際に現象として起る相対確率は

$$\exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\} = \prod_{i,j} \exp \left\{ -\frac{K}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} - \frac{L'}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1} \right\}$$

4

$k_B$  : Boltzmann constant

$T$  : 絶対温度

であり、統計力学において中心的な量である  
分配関数  $Z$  は

$$Z_{NM} = \sum_{\text{configuration}} \exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

に  $N$  と  $M$  とらされる。この  $Z$  に  $N$  系の自由エネルギー  $F$  は

$$F = -k_B T \log Z$$

で与えられるのである。さらに興味深い量として点  
関数 (Local State Probability)  $P_a$

$$P_a = \frac{1}{Z} \sum_{\text{conf}} \delta(\sigma_i, a) \exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

$a$  : local state

$\sigma_i$  : 定まった頂点 (site)

である。

Ising model において分配関数および点  
関数  $P_a$  を求めた。L. Onsager (1944) と  
C. N. Yang (1952) において求められた。その結果  
は、熱力学的極限  $\rightarrow$  格子 size 無限大  
の極限において、

$$\lim_{\substack{N, M \rightarrow \infty \\ M/N: \text{fixed}}} \frac{1}{NM} \log Z_{NM} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$$

$$F(\theta) := \log \left\{ 2 \left( \cosh 2K \cosh 2L + k^{-1} (1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{1/2} \right) \right\}$$

$$K = -\frac{K'}{k_B T}, \quad L = -\frac{L'}{k_B T}$$

$$k = 2 \sinh 2K \sinh 2L$$

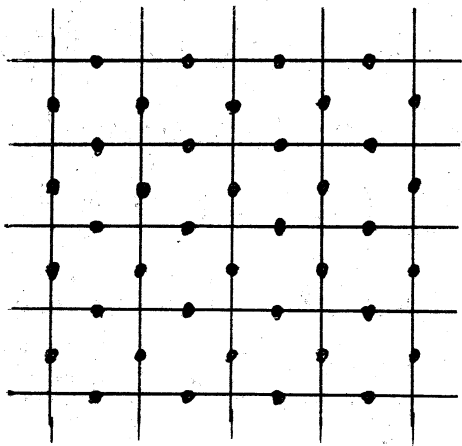
$$P = (1 - k^2)^{1/8} \quad ; \quad \text{1点函数}$$

であった。このとき1点函数  $P$  が系の詳細に依らず  $k$  のみに依存する、と訂正目に通ずる。

我々が対象として考察する model は次の通り Type の model — vertex model 及び face model であるが、当然それらだけ先の 2-D Ising model なるものをその特殊な場合として含む。そして当面の目標となる問題はそれらの分配函数と一点相関函数を求めよ、とである。

まず vertex model, face model といふのは、それぞれ  $\sigma$  の  $\pm 1$  のかき定の  $\sigma$ 。いす  $\sigma$  の model も 2次元の正方格子上で考える。

vertex model として正方格子の各 edge の上に自由度があり、それらに与えられた集合  $\mathcal{D}$  (Ising model の場合の  $\{\pm 1\}$  に対応) に値を取る。



$$R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{array}{c} \alpha \\ \bullet \\ \mu \text{ --- } \bullet \text{ --- } \beta \\ \bullet \\ \nu \end{array}$$

$\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathcal{D}$

そして1つの頂点の周りの4つの edge が与えられたとき、その周りの1頂点の周りの状態の生じる相対確率  $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$  ( $u \in \mathcal{D}$ ; parameter) を与えることに  $\mathcal{M}$  model が定まるのである。Ising model では1頂点の上に local state  $\{\pm 1\}$  があり、隣り合う2状態  $\sigma, \sigma'$  の生じる相対確率 (Boltzmann weight) が

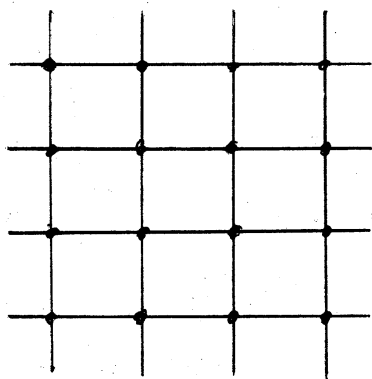
$$\exp(K\sigma\sigma') \quad \text{for } T=1 \quad \exp(L\sigma\sigma')$$

であり、これは Boltzmann の原理  $\mathcal{M}$  を与えられた  $T$  ののである。  $\rightarrow \mathcal{M}$   $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$  を与えることは Ising

model として  $K, L$  を与える.  $\beta$  に相当し. parameter  $u$  として 先の Ising model の導入の際に  $\beta$  として  $\beta J$  にか

$\sinh 2K = \sinh(u)$ ,  $\sinh 2L = (k \sinh(u))^+$ ,  $0 < k < 1$  なる  $K, L$  の parametrization に現れる変数  $u$  に対応する.  $u$  は model の homogeneity を表わす parameter である.  $\beta$  を与える.  $\beta$  として与える.

face model (IRF-model; Interaction-round-a-face model) として. 正方格子の各頂点 (site) の上に local state の集合  $\mathcal{S}$  に属する自由度がある.



$$w \left( \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right) = \text{square with vertices } a, b, c, d$$

$a, b, c, d \in \mathcal{S}$

今度  $\beta$  一つの面 (face) の周りの頂点の 4 状態の全  $\beta$  相対確率 (Boltzmann weight)  $w \left( \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right)$  を与える.  $\beta$  として  $\beta J$  model が定まるのである.

Boltzmann weight  $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $w \left( \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right)$  を与える.  $\beta$  (Ising model での  $K, L$  を与える.  $\beta$ ) に



$R$  model が定まるのであるが、model が可解であるためには、この Boltzmann weight が Yang-Baxter equation (Star-Triangle relation) を満たしていることが肝要である。特に 1 点函数 (LSP) を求めることに用いる。Corner Transfer Matrix の方法では Boltzmann weight が YBE (STR) を満たすことがその前提となっている (§ 8)。従って、この model を設定する際には、常に Boltzmann weight が YBE (STR) を満たすようにしなければならない。

本文の構成の概略は次の通りである。

§ 2, § 3 では Lie algebra  $A_1$  の vector 表現に対する quantum R-matrix  $R$  が YBE (STR) を満たす Boltzmann weight を与える。§ 4 ではこの拡張として一般の  $A_n$  の vector 表現に対する Boltzmann weight の結果を記す。この section において weak-admissibility - local state の配置に課される条件  $\tau_i$  を述べる。§ 5 ではこの Boltzmann weight が STR を満たすことを証明する。この § 7 では unrestricted picture (local state が  $h^*$  の generic  $\tau$  値を取るという picture)

と呼ばれる状況についての話であるが、§6に  
 おいて restricted picture (local state の  $h^*$  の  
 dominant integral weight のみに制限した  $T$ -model)  
 を定め、この場合においても Boltzmann weight  
 が STR を満たすことを示す。 unrestricted model  
 restricted model の Local State Probability の  
 ことである affine Lie algebra の string function  
 branching coefficient については §9, §10, §11  
 の話題である。(正確な statement は該当  
 部分を参照のこと) §7 では  $A_n$  の vector 表現  
 以外の次数の高い表現に対応する model を与え  
 る。このときの Boltzmann weight は vector 表現の  
 Boltzmann weight を利用して構成されるが、  
 この手続のことを fusion と呼ぶのである。  
 このことは主に restricted model について論  
 じる。以上 §2 から §7 までが model の設  
 定であり、以降 §8 から §11 において  $A_n$   
 の vector 表現に対する model について 1 点函数  
 (LSP) を求めるための議論を行う。 Baxter  
 の Corner Transfer Matrix の方法についての概説  
 は §8 にあるが、これは現在までのところ

数学的に rigorous な方法で行ない、種々の仮定が設けられていることに注意を要する。  
 §9で CTM の方法により 2次元格子上的の和が 1次元格子の上の和に書き換えられる。この1次元格子上の和の表示を格子 size 無限大の極限での状況が分かりやすい形に §10において表示を取り直し、§11で格子 size を無限大としたときに LSP が Lie algebra の表現に関連した modular function となることを示す。

Yang-Baxter equation (YBE) と  
Star triangle relation (STR)

YBE 及び STR の後に Corner Transfer Matrix の方法により一点函数を求めよという問題がある。Baxter の主張 (98) はこの問題を解決した上でのものである。

YBE とは  $R(u) \in \text{End}_d(V \otimes V)$  に対して

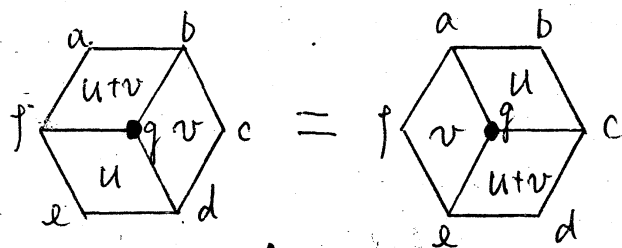
$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u))$$

が  $V^{\otimes 3}$  上の方程式の形である。

STR とは

$$\sum_g W \begin{pmatrix} ab \\ fg \\ |u+v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} bc \\ gd \\ |v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} fg \\ ed \\ |u \end{pmatrix} = \sum_g W \begin{pmatrix} ab \\ gc \\ |u \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} ag \\ fe \\ |v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} gc \\ ed \\ |u+v \end{pmatrix}$$

$$W \begin{pmatrix} ab \\ dc \\ |u \end{pmatrix} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ d \quad c \end{array} \quad \text{と } \frac{F}{k} \text{ と } 1 \text{ と}$$



• 1 と 和 E と

is graphical in the following.

## Notations

$\mathfrak{g}$ : Lie algebra

$U(\mathfrak{g})$ :  $\mathfrak{g}$ 's universal enveloping algebra

$U_q(\mathfrak{g})$ :  $U(\mathfrak{g})$ 's  $q$ -analogue.

$X_n$ : classical simple Lie algebra of rank  $n$

$X_n^{(1)}$ :  $X_n$ 's affine Lie algebra

$\mathfrak{h}$ : Cartan subalgebra of  $X_n^{(1)}$

$\mathfrak{h}^*$ : dual of  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ : fundamental root

$\delta$ : null root

$$\rho = \sum_i \Lambda_i$$

特異点:  $X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$  の場合

$\Lambda_{\mu+n+1} = \Lambda_\mu + \delta$  の添字  $\in \mathbb{Z}$  で拡張する

$$\bar{\Lambda}_\mu := \Lambda_\mu - \Lambda_0 \quad (\text{classical part})$$

$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$  の orthonormal vector として

$$\bar{\Lambda}_\mu = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

である。

内積

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

$i = 1, \dots, n$  とする。

$$\hat{D} := \Lambda_{\nu+1} - \Lambda_\nu \quad (\because \sum_{\nu=0}^m \hat{D} = 0)$$

$$\begin{aligned} A &:= \{ \chi_m \text{ の vector 表現 の weight の 集合 } \} \\ &= \{ \hat{D} \mid \nu = 0, \dots, m \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} := \mathfrak{h}^*$$

$$\mathcal{J}_1 := \{ \text{dominant integral weights of level 1} \}$$

$$\mathcal{J}_x := \mathcal{J} \text{ or } \mathcal{J}_1$$

$$a \in \mathfrak{h}^* \quad i = \overline{1, n} \quad \bar{a} : a \text{ の classical part}$$

$$a_\mu := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_\mu - a_\nu$$

$$\sigma : \text{Dynkin diagram automorphism} \in \text{End}(\mathfrak{h}^*)$$

$$V_0 : \chi_m^{(1)} (\chi_m) \text{ の vector 表現}$$

$$V(\alpha) : \chi_m \text{ の highest weight } \alpha \text{ の 既約表現}$$

$$L(\omega), V_a : \chi_m^{(1)} \text{ の highest weight } a \text{ の 既約表現}$$

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ c \mid a^{(0)} \dots a^{(N)} \mid \begin{array}{l} a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{J}, \quad a^{(i+1)} - a^{(i)} \in A \end{array} \right\}$$

$Y = (f_1, \dots, f_m)$  : Young diagram

$m$  段目  $n$  box の数  $or$   $f_m$  個

$\deg Y := f_1 + \dots + f_m$  :  $Y$   $n$  box の数

$$[a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} \quad ; \quad a \text{ の } q\text{-analogue}$$

$$[u] := \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2i\pi\tau}, \quad \text{Im } \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) := 2p^{\frac{1}{8}} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z p^{k\omega} \cos u + p^{2k})(1 - p^k)$$

$$E(z, q) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z q^{k-1})(1 - z^{-1} q^k)(1 - q^k)$$

$$(q)_k := \prod_{j=1}^k (1 - q^j)$$

$$(q)_0 := 1$$

$$[r_0, \dots, r_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} \dots (q)_{r_m}}, & \text{if } \sum r_\mu = m \\ & r_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$G_m$  :  $n$  次対称群

§ 2 おける vertex-face 対応.

### McGuire-Yang の解

vertex model に対する YBE の解の例を挙げる

$V_0$ :  $sl(2, \mathbb{C})$  の vector 表現空間  $= \mathbb{C}\langle e_1, e_{-1} \rangle$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$$

とす.

$$R(u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_0 \otimes V_0)$$

と

$$R(u) := \begin{pmatrix} 1+u & & & \\ & 1 & u & \\ & u & 1 & \\ & & & 1+u \end{pmatrix}$$

足

$$e_1 \otimes e_1$$

$$e_1 \otimes e_{-1}$$

$$e_{-1} \otimes e_1$$

$$e_{-1} \otimes e_{-1}$$

とす。また、 $\sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu} R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} E_{\alpha\mu} \otimes E_{\beta\nu}$

$$R(u) = \sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu} R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} E_{\alpha\mu} \otimes E_{\beta\nu}$$

$$\therefore E_{\alpha\mu} e_{\nu} = \delta_{\mu\nu} e_{\alpha}$$

と展開して、 $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$  は YBE の解となる。

YBE と  $R(u)$  自身を用いて書き直せば、



それより  $\text{End}_{\mathbb{C}}(V_R \otimes V_R \otimes V_R)$  中の方程式を  
 して.

$$\begin{aligned} & (1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ &= (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1) \end{aligned}$$

を解く。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解る  $P$ . すぐわかる。

$$P(u \otimes v) = v \otimes u$$

解る  $P$  を用いて  $R(u)$  は

$$R(u) = 1 + uP$$

と表わすことができる。  $T = 1 \otimes R(u) = 1 + uP_{23}$

解る  $P$  (  $P_{ij}$  は  $V_R^{\otimes 3}$  の  $i, j$  成分の交換 )

YBE を書くと.

$$(1 + uP_{23})(1 + (u+v)P_{12})(1 + vP_{33})$$

$$= (1 + vP_{12})(1 + (u+v)P_{23})(1 + uP_{23})$$

を解く。この式は  $\mathcal{U}(\mathfrak{S}_3)$  中では確かに

成立するから、先の通りに定めると  $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$  は

YBE の解を解っている。

McGuire-Yang の解 JY Face model の解  $\mathcal{E}$  について

以下  $\mathcal{E}$  には notation を定めておく

$V_a$ :  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の  $a+1$  次元の既約表現空間

$$= \mathbb{C} \langle \ell_m \mid m = a, a-2, \dots, -a+2, -a \rangle$$

$\{\ell_m\}$ : orthonormal basis in  $V_a$

$V_a \otimes V_b \otimes V_c$  の既約表現空間への分解  $\mathcal{E}$

$$V_a \otimes V_b \otimes V_c = \sum_c \Omega_{abc} \otimes V_c$$

$\therefore$  1:

$$\dim \Omega_{a, a \pm 2} = 1$$

$$\dim \Omega_{a, a} = 2 \quad (= 1 \text{ if } a=0)$$

$$\dim \Omega_{a, c} = 0 \quad (c; \text{その他})$$

である。

すなわち具体的に  $\Omega_{abc}$  の basis  $\mathcal{E}$  を構成する  $\mathcal{E}$  を考えよう。

$a \neq 0$  「5.5.11」.

$$|(a)_m\rangle = \ell_m \in V_a$$

$\mathcal{E}$  を  $\langle \mathcal{E} \mid 1=1 \rangle$ .  $|(ab)_m\rangle, |(abc)_m\rangle$  「5.5.11」

$\mathcal{E}$  inductive に

$$|(ab)_m\rangle := \sum_{m', j} C(bm' | am' - 1 j) |(a)_{m'}\rangle \otimes \ell_j$$

$$|(abc)_m\rangle := \sum_{m', j} C(cm' | bm' - 1 j) |(ab)_{m'}\rangle \otimes \ell_j$$

と定める。  $\therefore \exists \ell_j \in V_{\lambda}$  である。

$C(j_1 | j_1 j_2)$ : Clebsch-Gordan 係数

(J. 既約表現の Tensor 積  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  へ

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_j$$

と既約表現に分解して可。 右辺の  $V_j$  の weight  $m$  の base vector  $\ell_m \in V_j$ ,  $V_{j_1}, V_{j_2}$  の固定基底 (T: weight vector から成る basis 1: J)

$$\ell_m = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m | j_1, m_1, j_2, m_2) \ell_{m_1} \otimes \ell_{m_2}$$

と表わして T: 可の係数として定めらる。

さらに  $\|abc\rangle \in$

$$\|abc\rangle := |(abc)_c\rangle$$

と定める。

可と  $\Omega_{ac}$  の basis 1 J

$$\Omega_{a, a+2} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a+2\rangle, \|a, a-1, a-2\rangle \}$$

$$\Omega_{a, a} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a\rangle, \|a, a-1, a\rangle \}$$

Clebsch-Gordan 係数を用いて表わせば

$$\|a, a+1, a+2\rangle = \ell_a \otimes \ell_1 \otimes \ell_1$$

$$\|a, a+1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a+1}{a+2}} \varrho_a \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1 - \frac{1}{\sqrt{(a+1)(a+2)}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 \\ - \sqrt{\frac{a}{(a+1)(a+2)}} \varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$$\|a, a-1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 - \sqrt{\frac{1}{a+1}} \varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$$\|a, a-1, a-2\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_{-1} - \sqrt{\frac{a-1}{a(a+1)}} \left( \varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_{-1} \right. \\ \left. + \varrho_{a-2} \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 \right) \\ + \sqrt{\frac{2}{a(a+1)}} \varrho_{a-4} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$R(u)$  に  $\mathbb{Z}$  を表わす  $\mathbb{Z}$   $\downarrow$   $(T = YBE)$   $\mathbb{Z}$   $V_a \otimes V_b \otimes V_c$   
 上の方程式であるから、 $1 \otimes R(u)$  の様子  $\in \sum_c \Omega_{ac} \otimes V_c$   
 の上で見てみる。

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

$U_{\mathfrak{g}}$ :  $\mathfrak{g}$  の普遍展開環

$$\Delta: U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}}$$

$\psi$

$$X \longmapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

217

$$[R(u), \Delta(U_q)] = 0$$

$\therefore [R(u), X \otimes X] = [1 + uP, X \otimes X]$  と  
 $v_1 \otimes v_2$  に施し計算すればいい。

より

$$[1 \otimes R(u), \Delta^{(3)}(U_q)] = 0$$

すなわち Schur の補題より  $1 \otimes R(u)$  は  
 $\Omega_{a,c}$  に作用していることになる。その作  
 用は先の  $\Omega_{a,c}$  の basis への  $R(u)$  の作用  
 を確かめて

$$R(u) = (1+u) \text{id} \quad \text{on } \Omega_{a, a+2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A-u}{A} & u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} \\ u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} & \frac{A+u}{A} \end{pmatrix}$$

$$\text{on } \Omega_{a, a}$$

$$\therefore A = a+1$$

であることが通ちになる。

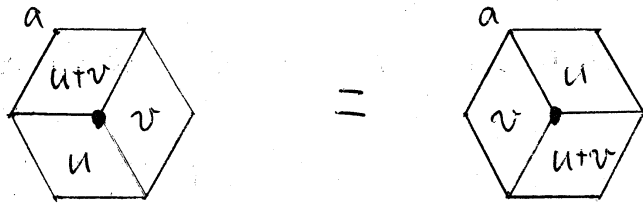
$\therefore$  Face model の Boltzmann weight 上  
 に得られる  $T = R(u)$  の行列要素より

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = 1 + u, \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = \frac{A \mp u}{A}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = u \sqrt{\frac{(A-1)(A+1)}{A^2}}, \quad (a: \text{generic})$$

とすると、これは Boltzmann weight の STR (star-triangle relation) を満たすのである。

実際に満足する  $u$  を確かめるには、



に代入して直接計算すればいい。

本節では YBE の McGuire-Yang の解 (vertex model の Boltzmann weight) より STR を満たすような face model の Boltzmann weight を構成した。(おもしろい vertex-face 対応)

1-1. 得られた face model の Boltzmann weight は  $u$  に関して rational である。以下では、この対応を vertex-face 対応 と trigonometric

に拡張することについても議論する。本来は  $\mathbb{R}$  に elliptic に于て拡張したいのだが、その点について  $\mathbb{R}$  に于ては触れない。文献を参照して欲しい。

## § 3 Quantum R-matrix

Quantum R-matrix は non-exceptional の Lie 環の vector 表現に対してはすべて書けるようにしている。

記号を少し決めておく

$\mathfrak{g}$ : classical Lie algebra

$U_q(\mathfrak{g})$ :  $\mathfrak{g}$  の 普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の  $q$ -deformation.

特に、 $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  は generator  $E, H_i, X_i^\pm (i=1, \dots, n)$  によって次のように定められる。

$$q^{H_i} X_i^\pm q^{-H_i} = q^\pm X_i^\pm$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = q^{\mp \frac{1}{2}} X_j^\pm \quad |i-j|=1$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = X_j^\pm \quad |i-j| \geq 2$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{q^{2H_i} - q^{-2H_i}}{q - q^{-1}}$$

$$(X_i^\pm)^2 X_j^\pm - \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} X_i^\pm X_j^\pm X_i^\pm + X_j^\pm (X_i^\pm)^2 = 0 \quad |i-j|=1$$

$$X_i^\pm X_j^\pm = X_j^\pm X_i^\pm \quad \text{otherwise}$$



また

$$\Delta: U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

(comultiplication)

$$\Delta(H_i) = 1 \otimes H_i + H_i \otimes 1$$

$$\Delta(X_i^\pm) = q^{H_i} \otimes X_i^\pm + X_i^\pm \otimes q^{-H_i}$$

とする。

上の  $U_q(\mathfrak{g})$  は  $q \rightarrow 1$  のとき通常の  $\mathfrak{g}$  の普遍展開環となるが、“generic な  $q$ ” に対して次のことが知られている。

命題  $q$  が generic なとき algebra  $U_q(\mathfrak{g})$  の有限次元既約表現は  $\mathfrak{g}$  のそれ (に  $\mathbb{R}$ ) parametrize される。

このとき quantum R-matrix とは  $\mathfrak{g}$  の既約表現  $V$  に対し  $R(\omega) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$  で

$$(1) [R(\omega), \Delta(U_q(\mathfrak{g}))] = 0$$

$$(2) R(\omega) (\omega q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) \\ = (q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + \omega X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) R(\omega)$$

$\theta$ : highest root,  $\omega = e^\alpha$

を満たするものが  $\mathfrak{g}$  であるとして定義される。

また、このおかげで (1), (2) を満たす  $R(u)$  は YBE

$$(1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ = (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1)$$

を満たす。

現在までのところ  $X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$  の vector 表現に対して YBE の trigonometric solution が見つかっている。

例  $A_n$

$V_0 = \mathbb{C} \langle \varrho_1, \varrho_{-1} \rangle$  : vector 表現

$$R(u) = \begin{pmatrix} [1+u]_q & & & \\ & q^u [u]_q & & \\ & [u]_q & q^u & \\ & & & [1+u]_q \end{pmatrix}$$

$$\therefore [a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} = \frac{\sin \pi a/L}{\sin \pi/L} \quad (q = e^{i\pi/L})$$

上の例での  $[a]_q$  は  $\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q = a$  である。意味では  $a$  の  $q$ -analogue である。

例の  $R(u)$  を用いて Jacobi model を与える。前節と同様に  $R$  matrix の定義 (1) による。

さらに Schur の補題を用いて、今度は Wigner calculus の  $q$ -analogue を実行し  $R(u)$  の

$V_a \otimes V_D \otimes V_D \wedge$  の action が次のようになる。結果の  $q$  と記す。

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \pm 2 \end{array} = [1+u]_q \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]_q}{[A]_q}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \end{array} = [u]_q \sqrt{\frac{[A+1]_q [A-1]_q}{[A]_q^2}} \quad (\text{複号同順})$$

であるが、これは § 2 で得た Boltzmann weight の  $q$ -analogue であり、 $q \rightarrow 1$  であるとき § 2 の結果となる。

上の Boltzmann weight の  $u$  について Trigonometric ( $\because [u]_q = \sin \frac{\pi u}{L} / \sin \frac{\pi}{L}$ ) であるが、これは elliptic に昇格させることができる。

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im} \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) = 2p^{1/8} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2p^k \cos 2u + p^{2k})(1 - p^k)$$

$$\text{であるが } p \rightarrow 0 \text{ であるとき } \frac{[u]}{[1]} \rightarrow [u]_q \text{ である}$$

Boltzmann weight と

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \pm 2 \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]} \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]}{[A]}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\pm 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[A+1][A-1]}{[A]^2}}$$

とす。このとき、これは elliptic への拡張を与えている。STR 条件に対することは § 5 において証明する。とす。

§ 2 から、これは vertex model から face model へとくりかえして来たこと。face model から vertex model への対応は、trigonometric の段階で

$$\lim_{\substack{|A| \rightarrow \infty \\ |q| < 1}} \begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\pm 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \begin{array}{c} \pm \\ | \\ u \\ | \\ \mp \end{array} \quad (A = a+1)$$

として得ることが出来る。しかし elliptic の段階での face から vertex への対応は、まだ知られていない。

§ 4  $X_n^{(1)}$  Jacobi model  
(unrestricted model)

1.2.5

$X_n^{(1)}$ : affine Lie algebra  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$   
 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ : fundamental weight  
 ( $A_n^{(1)}$  のときは  $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \in \emptyset$ )

$$\rho := \sum_i \Lambda_i$$

$\delta$ : null root

$$\bar{\Lambda}_\mu := \Lambda_\mu - \Lambda_0$$

$$\mathfrak{h}^* := \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$  のときは  $\mathfrak{h}^*$  の内積は  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$

$\varepsilon$   $\mathfrak{h}^*$  の orthonormal basis として

$$\bar{\Lambda}_\mu = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

2.7

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

$\lambda = \delta \gamma$  として  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の vector 表現  
 の weight  $\varepsilon$

$$\hat{D} := \Lambda_{\nu+1} - \Lambda_\nu = \varepsilon_\nu - \varepsilon$$

$$\text{と書く: } \epsilon \in \mathbb{1} \quad \left( \sum_{\nu=0}^n \widehat{D} = 0 \right)$$

$A := \{ X_m \text{ の vector 表現の weight の集合} \}$   
 であるとする。

### $X_m^{(1)}$ -型 face model

次のようにして model を設定する。

local state (自由度の取り得る値) の集合  $\mathcal{A}$  は

$\mathcal{A} = \mathfrak{h}^*$  :  $\mathfrak{h}$  は  $X_m^{(1)}$  の Cartan subalgebra  
 $\epsilon \mathbb{1}$ .  $\mathcal{A}$  の 2 元に対して weak admissibility を  
 いう事とする。

$a, b \in \mathcal{A}$  に対して

$(a, b)$  が (weakly) admissible



$$b - a \in A$$

により定める。  $(a, b)$  が admissible であっても  $(b, a)$  が admissible であるとは限らな  
 ことを注意しておく。

$\beta T =$  Boltzmann weight についての (性質 N)  
 である

性質 N.  $(a, b), (b, c), (a, d), (d, c)$  が  
 すべて admissible  $\tau$  の  $\tau$  に対して

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array} = 0$$

とする。  $\left( \begin{array}{c} a \xrightarrow{\quad} b \\ \text{みどり} \end{array} \right) \in \mathcal{E}$   $(a, b)$  が admissible  $\tau$  の  $\tau$  に対して

この  $\mathcal{E}$  上の  $\tau$  が知られている。

定理  $X_n$ -型 Lie algebra に対して

(性質 N)  $\mathcal{E}$  上に  $\tau$  が  $\tau$  かつ STR  $\tau$  を  
 満たす  $\tau$   $u$  について elliptic  $\tau$   
 face model の Boltzmann weight

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}$$

がある。

ここで  $A_n$  の vector 表現 について その  $\tau$   
 Boltzmann weight を挙げる。

$a \in \mathcal{A}$ ,  $\hat{\mu}, \hat{\nu} \in \mathcal{A}$  に対して

$$a_{\mu} := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_{\mu} - a_{\nu}$$

17.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ u \\ a+2\hat{\mu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ u \\ \mu \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]} \\
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ u \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ u \\ \nu \end{array} = \frac{[a_{\mu\nu} - u]}{[a_{\mu\nu}]} \\
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ u \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ u \\ \mu \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu}+1][a_{\mu\nu}-1]}{[a_{\mu\nu}]^2}}
 \end{aligned}$$

上記の Boltzmann weight は Lie algebra の classical  $\tau$  部分にしか本質的に関係してはいないことに注意する。

$A_m - \frac{\#1}{2}$  の vector 表現に関する Boltzmann weight は  $u$  について 1 次であるが、 $B_m, C_m, D_m - \frac{\#1}{2}$  の vector 表現に関する Boltzmann weight は  $u$  について 2 次である。(§8 の Appendix 参照)



## §5 STR の証明の例

ここで §4 の  $A_n$ -型 の Lie algebra の vector 表現に関する Boltzmann weight が STR を満たすことを証明しておく。

まず、いくつかの補題を用意する。

補題 1

(1) Initial condition.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} = \delta_{bd}.$$

(2) First inversion relation

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} := \sum_q W \left( \begin{array}{c} a \ q \\ d \ c \end{array} \middle| u \right) W \left( \begin{array}{c} a \ b \\ q \ c \end{array} \middle| -u \right) \\ = \rho(u) \delta_{bd}, \quad \rho(u) = \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2}$$

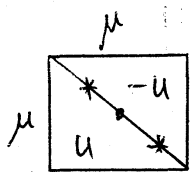
(補題 1 の証明)

(1)  $A_n$  の vector 表現の Boltzmann weight の表式 (1) 明らか。

(2) 次の 3 つの  $\mu$  場合に分ける。

(i)  $\begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \\ \hline \square & \\ \hline \mu & \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} = \rho(u)$  IT 明らか

(ii)



$$= \frac{[a-u][a+u]}{[a]^2} + \frac{[u][-u][a+1][a-1]}{[1]^2 [1]^2}$$

( $a = a_{\mu\nu}$ )

∴ Boltzmann weight 中の \* , \* 印の  $\epsilon$  : 3  
 に  $\langle \epsilon \rangle$  weight 17 (性質 N) 37  
 $(\mu, \nu), (\nu, \mu)$  の組み合わせのみで、  
 それぞれ右辺の第一項, 第二項に対応  
 しているのである。

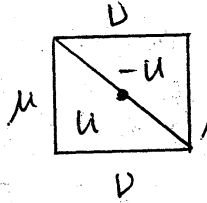

∴  $\theta$  函数  $[\ ]$  についての  
 等式

$$\begin{aligned} & [x+z][x-z][y+w][y-w] \\ & \quad - [x+w][x-w][y+z][y-z] \\ & = [x+y][x-y][z+w][z-w] \end{aligned}$$

を利用する(17)

(上式の右辺)

$$\begin{aligned} & = \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \left\{ \begin{array}{l} [1][-1][a+u][a-u] \\ - [u][-u][a+1][a-1] \end{array} \right\} \\ & = \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \cdot [a][-a][1+u][1-u] \\ & = \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2} = \rho(u) \end{aligned}$$

(3)   $= \frac{[a-u][u]}{[a][1]} A + \frac{[u][u]}{[1]} A \frac{[-a+u]}{[-a]}$   
 $= 0$   
 $\therefore A = \sqrt{\frac{[a+1][a-1]}{[a]^2}}$  

補題 2  $f(u)$  が entire function であり

$\Gamma$  は恒等的に  $\Gamma \neq 0$  であるとする。このとき

$$f(u+L) = e^{-2\pi i B} f(u)$$

$$f(u+L\tau) = e^{-2\pi i (A_1 + A_2 \frac{u}{L})} f(u)$$

とする  $\text{Im} \tau > 0, L \in \mathbb{R}, A_1, B, A_2 \in \mathbb{C}$   
 があるとする。  $f(u)$  は  $\text{mod } \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$

で  $A_2$  個の零点を有する

$$\sum(\text{零点}) \equiv L(B\tau + \frac{A_2}{2} - A_1) \pmod{\mathcal{Q}}$$

(補題 2 の証明)

略



STR を満たすことの証明

$$f(u) = \sum_g f \left( \begin{array}{c} a & b \\ u+v & v \\ u & g \\ e & d \end{array} \right) - \sum_g f \left( \begin{array}{c} a & b \\ u & v \\ v & g \\ e & d \end{array} \right)$$

とおく。  $f(u)$  は 外点の  $a, b, c, d, e, f$  と  $v$  を固定して  $u$  の函数と考えるのである。  
 目標は  $f(u) \equiv 0$  を示すのである。

initial condition  $v$

$$f(0) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline v & v & \\ \hline f & e & d \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline v & v & \\ \hline f & e & d \\ \hline \end{array} = 0$$

ゆえに  $u=0$  は  $f(u)$  の零点。  $\bar{T} =$

$$\begin{aligned} &= \delta_{bf} \begin{array}{|c|c|} \hline b & c \\ \hline -v & v \\ \hline e & d \\ \hline \end{array} - \delta_{ce} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline v & -v \\ \hline f & c \\ \hline \end{array} \\ &= \delta_{bf} \delta_{ce} \rho(-v) - \delta_{ce} \delta_{bf} \rho(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

( $\because \rho(u)$  は 偶函数)

ゆえに  $u=-v$  も  $f(u)$  の零点

$\therefore [u]$  の period は  $L, L\tau$  ( $\rho = e^{2\pi i u}$ ) であり

$$\left. \begin{aligned} [u+L] &= -[u] \\ [u+L\tau] &= e^{-\pi i \tau - \frac{2\pi i u}{L}} \cdot [u] \end{aligned} \right\} (*)$$

である。

$$f(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \kappa \quad u+v \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mu \quad u \quad \gamma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \nu \end{array} \\ - \\ \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \kappa \quad u \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mu \quad v \quad \gamma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \nu \end{array} \end{array}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \kappa \in A$  を用いて書かれてある。  
 (• 1つ和を  $\epsilon$  とする意味)

$f(u) \neq 0$  "から" "

$$f(u+L) = f(u)$$

$$f(u+L\tau) = \exp\left\{-2\pi i\tau - 2\pi i\left(\frac{2u+v+\delta_{\kappa\nu}+\delta_{\mu\nu}}{-a_{\kappa\beta}-a_{\mu\gamma}}\right)\right\} f(u)$$

である。この"前へ"  $-v$  の (\*) 式と

Boltzmann weight の表式を直接  $f$  に代入して  
 計算すれば示される。

そこで  $f(u)$  に対し 補題 2 を用いて  $f(u)$   
 $\text{mod } \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$  で  $f(u)$  の零点  
 は 2 個であることがわかる。つまり  $v$  と  $-v$   
 $0$  と  $-v$  である。さらに補題 2 の後半より

$$\sum(\text{零点}) = 0 - v$$

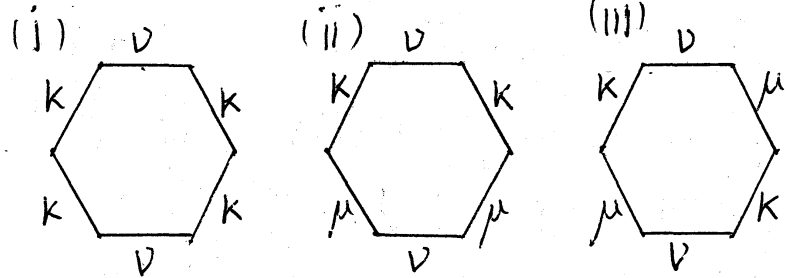
$$\equiv L\left(0 + 1 - \frac{v + \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma}}{L}\right) \text{mod } \mathcal{Q}$$

$$\therefore \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma} \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{Q}$$

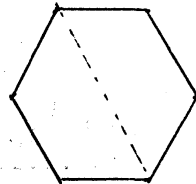
であることが分かるが、この式が成立するのは、

$k \neq \nu, \mu \neq \nu$  から  $\{k, \mu\} = \{\beta, \gamma\}$  ...  
 なる場合のみである。再び補題2を用い、 $\nu$  以外の  $f(u) \equiv 0$  として STR は満たされるということが分かる。そして後の上の場合にも STR が成立するということを示せばよい。

次の3つの場合に合ける



(ii), (iii) の場合  $u$  のかわりに  $v$  の函数を見て先と同様にすしほりできる。→  $u$  と  $v$  を入れ換えるというのを考えてみると  
 すしほり



なる破線で折り返すということが分かる。(i), (ii), (iii) のいずれ

ともなっていないので、既に示した場合には含  
 まない STR が成立するよか分かる。

(iii) の場合について、六角形内部の  
 edge に対応する weight がすべて定列

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 &= \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \\
 &\quad - \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore A_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{[a_{\alpha\beta}+1][a_{\alpha\beta}-1]}{[a_{\alpha\beta}]^2}}$$

と Boltzmann weight が STR を 証明 するよか  
 示すよか

## §6 Restriction

restricted model は Lie algebra  $X_m$  とその表現  
 及び  $v$  “level” を定められ決まる。 unrestricted  
 model では local state は無限個あるが、この  
 restriction を行ったら、 $v$  に  $l$  local state は  
 有限個となる。 今までの物理の方向から知られて  
 いる model は当然  $v$  の restriction を行ったら後の  
 model である。

$l$  は 2 以上の整数として restricted model の  
 local state の集合  $\mathcal{J}_l$  は

$\mathcal{J}_l := \{ X_m \text{ の level } l \text{ の dominant integral weight} \}$   
 である ( $\#\mathcal{J}_l < +\infty$ )  $\mathcal{J}_l$  の 2 元に対して “strong”  
 admissibility がある。

「 $a, b \in \mathcal{J}_l$  について  $(a, b)$  が admissible」



「任意の Dynkin diagram automorphism  $\sigma$  に対して

$$V(\overline{\sigma(a)}) \otimes V_0 > V(\overline{\sigma(b)})$$

すなわち、 $V_0: X_m$  の vector 表現,  $\bar{a}; a$  の classical part

$V(a): X_m$  の highest weight  $a$  の 既約表現」

定義する。



§4 の unrestricted model 1 について Boltzmann weight  $\Phi$  の  $[u] = \theta(\frac{\pi u}{L}, p)$  の  $L$  について restrict する。

$$L = t(l + g)$$

$g$ : dual Coxeter number of  $X_n^{(1)}$

$l$ : level

$\therefore t = g, t$  は実際に以下の数である

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
$g$	$n+1$	$2n-1$	$n+1$	$2n-2$
$t$	1	1	2	1

このとき

定理

unrestricted model 1 について  $L$  以上の  $t$  に specialize すると  $\frac{1}{t}$  の "strong" admissibility を持つ STR が成立する。

例として挙げる。

$A_n^{(1)}$  の場合  $L = l + n + 1$

$$\mu \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline u \\ \hline \beta \\ \hline \nu \\ \hline \end{array} = W \left( \begin{array}{cc} a & a + \hat{\alpha} \\ a + \hat{\mu} & a + \hat{\alpha} + \hat{\beta} \end{array} \middle| u \right), \quad \Gamma = \Gamma' = 1$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

で、あきらかに

$$a = (L + a_n - a_0 - 1) \Lambda_0 + \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu-1} - a_{\mu-2}) \Lambda_\mu$$

に属する (strong) admissibility 的

$$a \in \mathcal{A}_1, \quad a_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}, \quad \sum a_\mu = 0$$

$$L + a_n > a_0 > a_1 > \dots > a_m$$

と同様に「する」。これは admissibility の存在

を示す。  $0 < |a_{\mu\nu}| < L$  かつ  $[a_{\mu\nu}] \neq 0$

→ 3) Boltzmann weight 的 ~~発散~~ 的「する」。

STR の証明

$A_n^{(1)}$  の restricted model

に属する Boltzmann weight の STR を証明す

すべく証明する。以下に

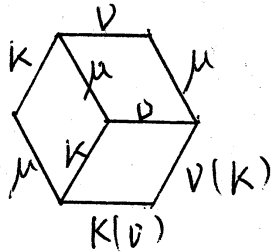
$$\sum_g \int \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ u+v \quad g \quad v \\ \diagup \quad \diagdown \\ u \\ e \quad d \end{array} = \sum_g \int \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ v \quad g \quad u \\ \diagup \quad \diagdown \\ u+v \\ e \quad d \end{array}$$

に於いて外点  $a, b, c, d, e, f$  がすべて  $\mathcal{A}_1$  の元である、 $g$  が  $\mathcal{A}_1$  の元であることが保証

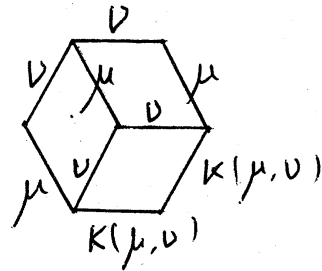
2.1.1. Boltzmann weight  $^* \square$  において  
 \* の位置にくる weight の dominant integral  
 であるか発散の恐れがあるか その危険  
 性を示しておく

STR の右辺で (外点)  $e \in \mathcal{D}_1$  でありかつ  
 $g$  の dominant integral であるか恐れがある  
 かの時、 $k, \nu, \mu \in \mathbb{Z}$  に異なりをなす。

(i)



(ii)



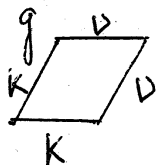
である場合のみであるか、このらから

$g$  の部分の Boltzmann weight が有限  
 であることを示す。

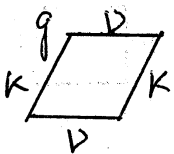
$$(a + \hat{\mu})_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\mu} - \delta_{\beta\mu}$$

この式を用いる

(i)



$$= \frac{[1+u]}{[u]} \quad \text{if } 0.k$$



$$= \frac{[u]}{[1]_N} \sqrt{\frac{[g_{k\nu}+1][g_{k\nu}-1]}{[g_{k\nu}]^2}}$$

ii)  $[g_{\mu\nu}] \neq 0$  を示せばいいから

$$g = a + \hat{\mu} \quad (\because \hat{\mu} = \begin{matrix} a \\ \mu \\ g \end{matrix}) \quad \text{と} \quad (a + \hat{\mu})_{k\nu} = a_{k\nu}$$

ii)

$$[g_{k\nu}] = [(a + \hat{\mu})_{k\nu}] = [a_{k\nu}] \neq 0$$

(ii) の場合も同様:

$$\begin{matrix} g & \nu \\ \nu & k \\ & k \end{matrix} = \begin{cases} \frac{[1+u]}{[1]} & k = \nu \\ \frac{[g_{\nu k} - u]}{[g_{\nu k}]} & k \neq \nu \end{cases}$$

ii)  $k \neq \nu$  かつ  $k \neq \mu$  の場合

$$g_{\nu k} = (a + \hat{\mu})_{\nu k} = a_{\nu k}$$

$$\therefore a \in \mathcal{A} \quad \text{ii) } [g_{\nu k}] = [a_{\nu k}] \neq 0$$

$k = \mu$  の場合

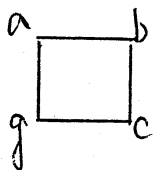
$$g_{\nu\mu} = a_{\nu\mu} - 1$$

$$\therefore a_{\nu\mu} - 1 = (a + \hat{\nu} + 2\hat{\mu})_{\nu\mu} = c_{\nu\mu} \neq 0$$

ii) O.K.

したがって発散の定理 (かつ  $\mu$  は任意) から

の  $\tau$  STR の証明に入る。



$$\tau a, b, c \in \mathcal{A}, g \notin \mathcal{A} \text{ かつ } \mu \begin{matrix} \nu \\ \square \\ \nu \end{matrix} a \in \mathcal{A}$$

のみであるから

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

と仮定する

$$g = a + \hat{\mu}$$

$$= (a_0, \dots, a_{\mu+1}, \dots, a_n) - \frac{1}{n+1} (1, 1, \dots, 1)$$

$g$  は dominant integral weight  $\tau^T \rho_{\mu+1}$  である。

$$L + a_n > a_0 > \dots > a_{\mu-1} > a_{\mu+1} > a_{\mu+1} > \dots > a_n$$

$\tau$  の条件を満たす  $T = \tau^T \rho_{\mu+1}$  である。

$$a_{\mu-1} = a_{\mu+1}$$

このとき  $\tau$  があるから  $\nu = \mu - 1$  とする。

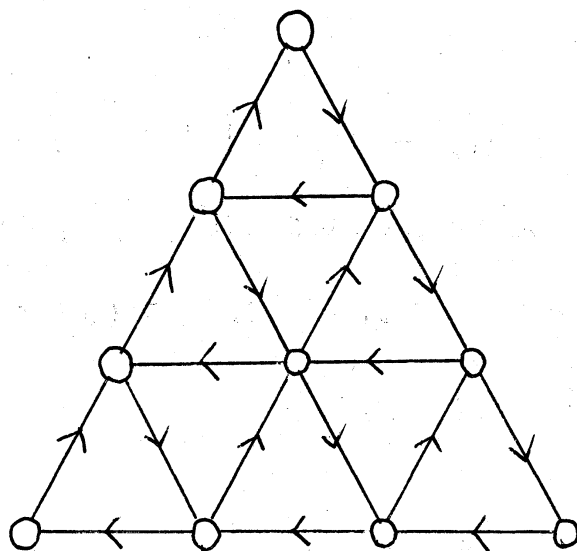
$$a_{\mu\nu} + 1 = 0$$

このとき  $\tau$  があるから  $\nu = \mu - 1$  とする。

$$\mu \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \nu \end{array} \mu = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu} + 1][a_{\mu\nu} - 1]}{[a_{\mu\nu}]^2}} = 0$$

→  $\mu$  unrestricted model の STR  $\mu$  上を用いて local state を  $\nu$  に制限して STR が成立する。(左辺についても同様の議論をする。)

$n=3, l=3$  の  $a \in \mathbb{Z}$  の local state  $\mathcal{S}_1$



$b \leftarrow a$  かつ  $(a, b)$  が admissible となる  
 配置は  $2 \in \mathbb{Z}$  個ある。

$\therefore a \in \mathbb{Z}$  かつ  $\# \mathcal{S}_1 = 10$

## §7 Fusion Procedure

Fusion procedure とは、基本表現に対する Boltzmann weight から 高い表現に対する Boltzmann weight を構成する手続子である。現在子での  
 こと。この手続子に A 型の model に対してのみ完成している。以下で主に restricted model について述べる。

Boltzmann weight の modification.

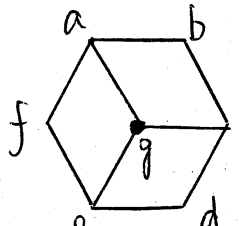
本節では次のように Boltzmann weight を modify する。

$$\widetilde{w} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right) = w \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right) \left\{ \frac{s(a,d)s(d,c)}{s(a,b)s(b,c)} \right\}^{1/2}$$

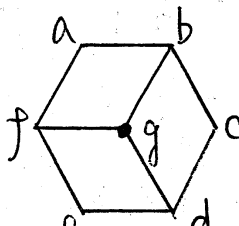
$$s(a,b) := \prod_{\lambda \neq \mu} \left\{ [a_{\mu\lambda}] [a_{\mu\lambda+1}] \right\}^{1/2}$$

$$\widehat{\mu} = b - a$$

$w \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right)$  が STR を満たすこと  $\widetilde{w} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right)$  も STR を満たすこと  $W = \square$  を表わす



$$\left\{ \frac{S(a,b)S(b,c)S(c,d)}{S(a,f)S(f,e)S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$



$$= \left\{ \frac{S(a,b)S(b,c)S(c,d)}{S(a,f)S(f,e)S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$

かゝる  $\tilde{w}$  についての STR を与えていることから明らかである。 $\tilde{w}(a \ b \mid u)$  を実際に計算すると

$$\tilde{w} \left( \begin{array}{cc} a & a+\hat{\mu} \\ a+\hat{\mu} & a+2\hat{\mu} \end{array} \mid u \right) = \frac{[1+u]}{[1]}$$

$$\tilde{w} \left( \begin{array}{cc} a & a+\hat{\mu} \\ a+\hat{\mu} & a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} \mid u \right) = \frac{[a_{\mu\nu}-u]}{[a_{\mu\nu}]}$$

$$\tilde{w} \left( \begin{array}{cc} a & a+\hat{\nu} \\ a+\hat{\mu} & a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} \mid u \right) = \frac{[u][a_{\mu\nu}+1]}{[1][a_{\mu\nu}]}$$

以降本節で  $\tilde{w}$  の  $\tilde{w} \in W$  を与える上での表示の Boltzmann weight を用いることになる。

### Symmetric Tensor 表現

後述する一般の表現に対する議論から然る symmetric tensor 表現についての結果は得られるが、この場合について片端的に結果



に致るので別に求めておくことにする。

よって次の補題を用意する。

補題

$$h_N(a, b | d, c | u) = \sum_P \begin{array}{c} a \quad a^{(1)} \quad \dots \quad a^{(N-1)} \quad b \\ \mu \quad u \quad u+1 \quad \dots \quad u+N-1 \quad \nu \\ d \quad d^{(1)} \quad \dots \quad d^{(N-1)} \quad c \end{array} \\ = \frac{\prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{[u+j]}{[1]} \right\} [u+b\nu-a_\mu] \prod_{\lambda \neq \mu} [b\nu-a_\lambda+1]}{\prod_{\lambda} [c\nu+\delta_{\nu\lambda}]}$$

$$v_N(a, b | d, c | u) = \sum_{P'} \begin{array}{c} a \quad \nu \quad b \\ a^{(1)} \quad u+N-1 \quad b^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N-1)} \quad u \quad b^{(N-1)} \\ d \quad \mu \quad c \end{array} \\ = \frac{\prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{[u+j]}{[1]} \right\} [u+c_\mu-b\nu] \prod_{\lambda \neq \mu} [c_\lambda-b\nu+1]}{\prod_{\lambda} [c\nu+\delta_{\nu\lambda}]}$$

$$\therefore P = (a^{(0)}, \dots, a^{(N)}), \quad a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ P' = (b^{(0)}, \dots, b^{(N)}), \quad b^{(0)} = b, \quad b^{(N)} = c$$

$\tau = \sum_P$  if  $a^{(i)} \in \mathcal{A}_1, (a^{(i)}, a^{(i+1)})$  is weakly-admissible  
 ある  $P$  の path が  $\tau$  に属する。  $\sum_{P'}$  も同様である。

したがって  $q = (d=d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(N)}=c), q' = (a=a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}=d)$   
 すべて  $a^{(i)}$  について  $(d^{(i)}, d^{(i+1)})$  が weakly-admissible である  
 $d^{(i)} \in \mathcal{A}_1$  かつ  $d^{(i)}$  の  $c$  方向に移動する  $h_N = 0$   
 かつ  $h_N$  は  $q$  の  $c$  方向に移動する  $\tau$  に定まる。  $v_N$  についても同様

(証明)

補題の前半の数学的帰納法により

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

を計算すれば直ちに分かる。後半の  $q$  に依らずに成り立つ表式  $\gamma$ 。  $q$  が定理中に述べた  $T$  であるならば  $T$  であるならば  $h_N = 0$  である。  $\exists \alpha \in \mathfrak{g}$   $\mu \neq \nu - 1$  ならば  $\nu$  で  $a_{\nu-1} - b_{\nu} \equiv 1 \pmod{L}$  である  $\nu$  があるから表式中の因子が 0 である。  $\nu_N$  についても同様。

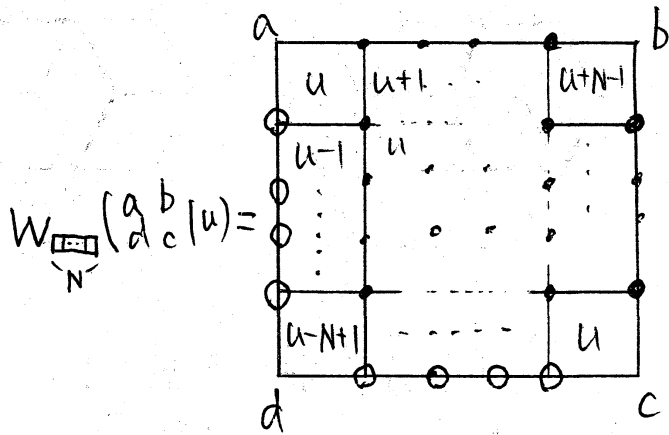
補題中の  $h_N \neq 0$  である  $T$  への  $q$  の条件は

$$V(\sigma(d)) \otimes V[\square] \supset V(\sigma(c)) \quad \text{for } \forall \sigma$$

$\sigma$ : Dynkin diagram automorphism

と同値である。 vector 表現の  $\mathfrak{g}$  の strong

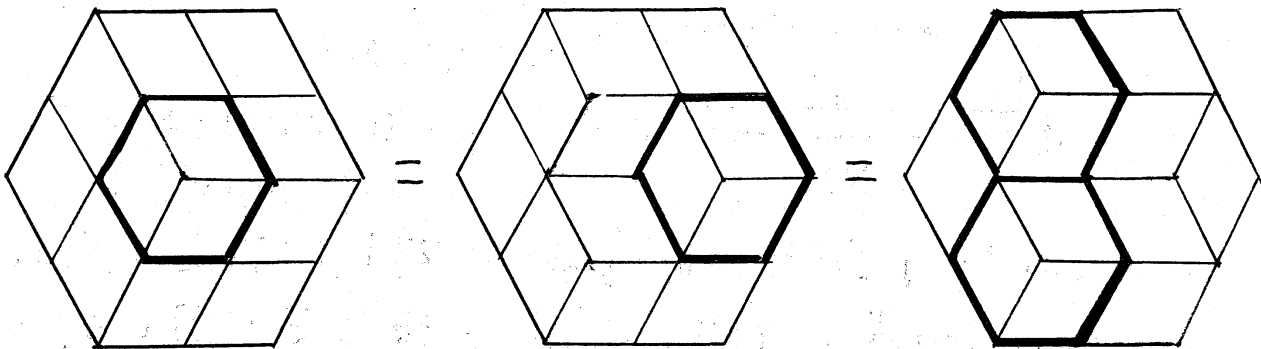
admissibility と同じであることに注意する。



• の site は可能 weight について 全て和をとる。

と  $W_{\square}^{(a,b|d,c)}(u)$  を定めれば 補題 の  $h_N, v_N$  の path  $q, q'$  に対する非依存性  $\forall W_N \neq 0$  印 の site の  $u$  方に依らずに定まることと 先の注意より  $a, b, c, d$  による “strong admissibility w.r.t  $V_{\square}$ ” を満たすことのみ  $W_N \neq 0$  が必要である。これは  $W$  が symmetric tensor 表現に対する Boltzmann weight である。

$N=2$  の場合に  $W^{(2)}$  が STR を満たすことを示しておく。



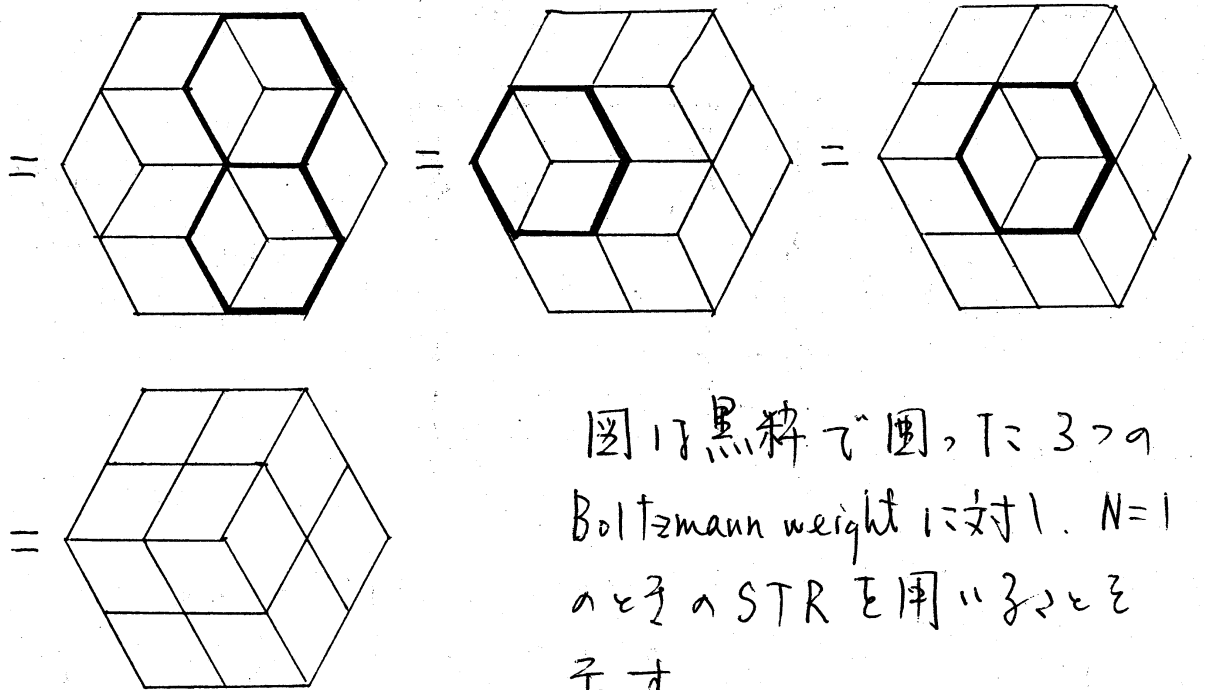
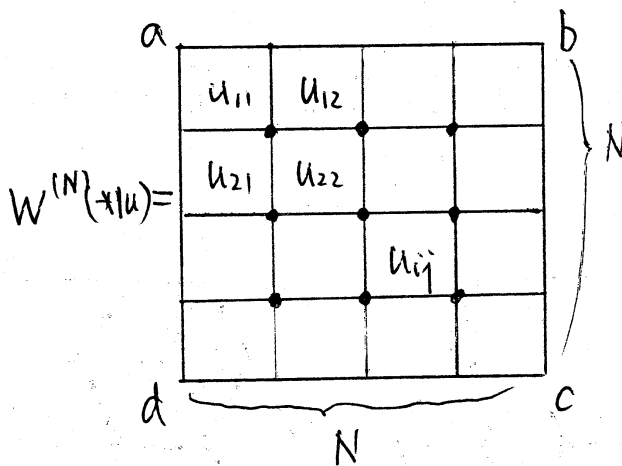


図1は黒線で図1に3つの Boltzmann weight に対し、 $N=1$  のときの STR を用いて示す。

一般の表現

まず次の  $N \times N$  Boltzmann weight を考える。



$a, b, c, d \in \mathcal{J}_1$

内点の2つすべて和をとる (symmetric tensor の場合 と異なる)

$u_{ij} = u + \alpha_i(0) - \alpha_j(0)$   
(cf Appendix)

この  $N \times N$  Boltzmann weight に対して上の  $\mathcal{J}_1$  に vector 表現 に対する STR を繰り返して用いて

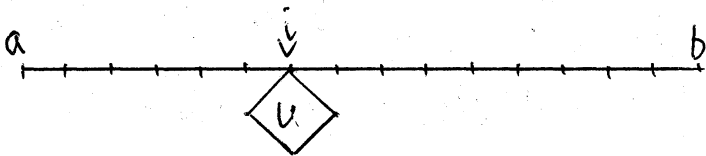
1:  $\mathcal{N}$  や  $1: \mathcal{N}$  STR が成立する  $\lambda$  を命令する。

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ \bigoplus_{\mathcal{A}} |a^{(0)}, \dots, a^{(N)}\rangle \mid \begin{array}{l} a^{(0)} = a, a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{A}, a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

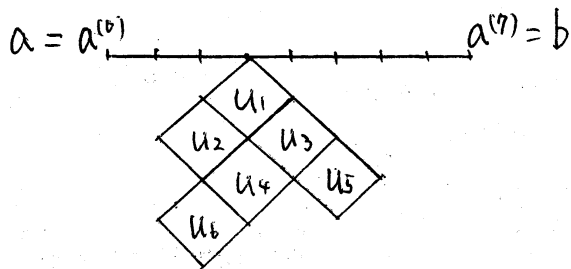
$\lambda$  次の  $\mathcal{N}$  operator を定める。

$$W_i(u) |a^{(0)} \dots a^{(N)}\rangle := \sum_{a^{(i)}, a^{(i+1)}} W(a^{(i+1)}, a^{(i)} | u) |a^{(0)} \dots a^{(i)} a^{(i+1)} \dots a^{(N)}\rangle$$

$\lambda$  の operator  $W_i \in \text{face operator}$  と呼ぶ。この operator の matrix element は vector 表現の Boltzmann weight から成っていることに注意する。  $W_i$  は  $V_{ab}^{(N)}$  に作用していることに注意。



このように表わす。  $\lambda$  での  $a \longrightarrow b \in V_{ab}^{(N)}$  と見れば operator  $U$  が  $i$  番目の位置に下から作用していることを示している。例として



1: .

$$W_2(u_6)W_5(u_5)W_3(u_4)W_4(u_3)W_2(u_2)W_3(u_1)$$

が  $V_{ab}^{(N)}$  に作用してこれを読むのである。

Young diagram  $Y$  ( $\deg Y = N$ ) に対する Young symmetrizer の deformation  $F_Y: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  ( $F_Y$  の定義は本書の最後の Appendix 参照,  $F_Y$  は face operator の合成に  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  による Boltzmann weight の rational limit で  $F_Y$  は通常の Young symmetrizer である。)

$$\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} := F_Y(V_{ab}^{(N)})$$

$\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)}$  を定める。このとき  $a, b \in \mathcal{A}$ , かつ表現  $Y$  に属して admissible であるとき  $\dim \tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} \geq 1$  となる。

$$(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}), \quad a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A}$$

なる path が  $\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)}$  中にあると定める。

注意

(1)  $Y$  が symmetric tensor であるとき

$$\dim \tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} \leq 1$$

$Y$  が一般のとき  $\mathcal{R}$  Boltzmann weight の通路上 edge 上の variable を指定して  $\mathcal{R}$  を定める。

ら「 $\sigma$ 」か(後述). symmetric tensor の場合  
 その必要が「 $\sigma$ 」か「 $\tau$ 」かの「 $\sigma$ 」の事情に  
 依る。

(2)  $L$  が + 命大子「 $\sigma$ 」に「 $\tau$ 」の「 $\sigma$ 」が知ら  
 れている。

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)} &= \text{multiplicity of } V_{\bar{b}} \text{ in } V_{\bar{a}} \otimes V_{\gamma} \\ &= [\rho_{\bar{a}} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\bar{b}}] \\ &= \min_{\sigma} [\rho_{\sigma(\bar{a})} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\sigma(\bar{b})}] \end{aligned}$$

$\sigma$ : Dynkin diagram automorphism of  $A_n^{(1)}$

$(\rho_{\bar{a}}, V_{\bar{a}})$ : highest weight  $\bar{a}$  の  $A_n$  の既約表現

$\bar{a}$ :  $a$  の classical part

ゆえに  $L$  が + 命大子「 $\sigma$ 」に「 $\tau$ 」の「 $\sigma$ 」が  
 表現  $\gamma$  に関して admissible である。

$$V_{\sigma(\bar{a})} \otimes V_{\gamma} \supset V_{\sigma(\bar{b})} \text{ for } \forall \sigma$$

と同値であり  $\gamma$  が vector 表現, symmetric  
 tensor 表現の「 $\sigma$ 」の自然な拡張「 $\sigma$ 」である。

Boltzmann weight  $w^{(N)} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u$  は matrix element  
 とする operator  $w^{(N)}(u)$  は  $\mathcal{V} := \bigoplus_{a, b \in I} V_{ab}^{(N)}$  上  
 で  $L$  が  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  に作用する。  $\mathcal{V}_{\gamma} := \bigoplus_{a, b \in I} \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)}$   
 と  $L$  が作用する。結果の引用する次の定理は重要で  
 ある。

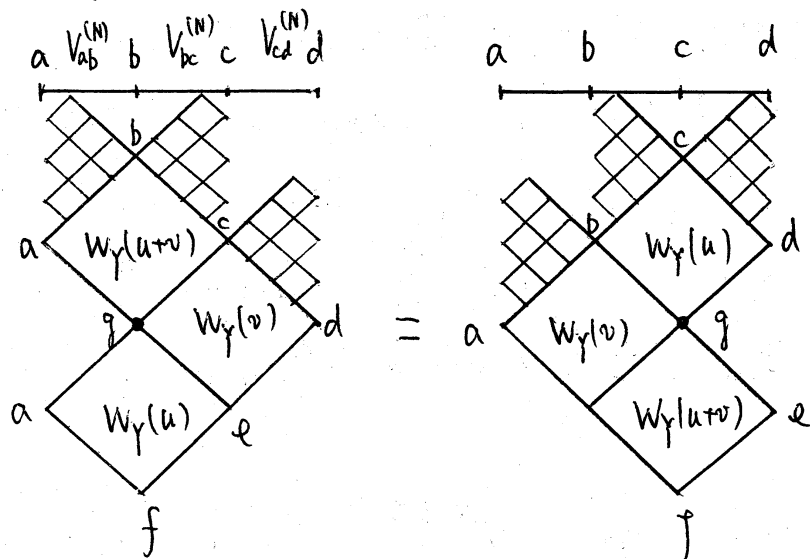
定理

$$W_Y \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} (u) \left( \widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{bc,Y}^{(N)} \right) \subset \widetilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$$

$W^{(N)}(u)$  が  $\mathcal{R}^{\otimes 3}$  上 STR を満たす  $\Leftrightarrow$  定理  $\mathcal{M}$   
 $W_Y(u) = 0$  on  $\mathcal{R}^{\otimes 3} / \mathcal{R}_Y^{\otimes 3}$  であるから 容易に  
 次を得る

系  $W_Y(u)$  は  $\mathcal{R}_Y^{\otimes 3}$  上 STR を満たす.

$\therefore a, c \in \widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} = F_Y V_{ab}^{(N)}$  に  $\xi$  をついで  $\square$  を用いて  
 表し直すと



$\Leftrightarrow$  (本節の Appendix 参照)

先 a admissibility の定義  $\mathcal{M}$  site 上の dominant  
 integral weight  $a, b, c, d$  を定めても Boltzmann  
 weight に  $\square$ .



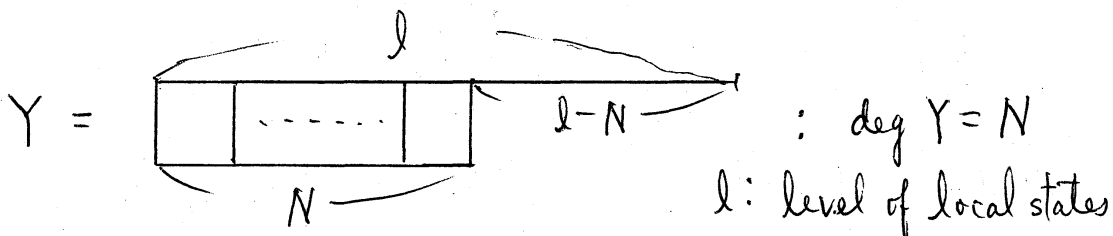
$$(\dim \tilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}) \times (\dim \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)})$$

だけの種類がある。従って Boltzmann weight の通付 site 上の local state  $a, b, c, d \in \mathcal{J}_1$  の他に  $\tilde{V}_{ab,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$  の base を定める。これに  $W_Y(u)$  の matrix element  $w$  として現れるのである。指定した  $\tilde{V}_{xx,Y}^{(N)}$  の base に対応する edge の上にあると考える。

### 一点函数の予想

以上の形に定められた一般の表現に対する Boltzmann weight に  $\mathcal{P}$  LSP を加えると次の形になる予想される。branching coefficient については §11 に若干の説明がある。

### 例 1 symmetric tensor

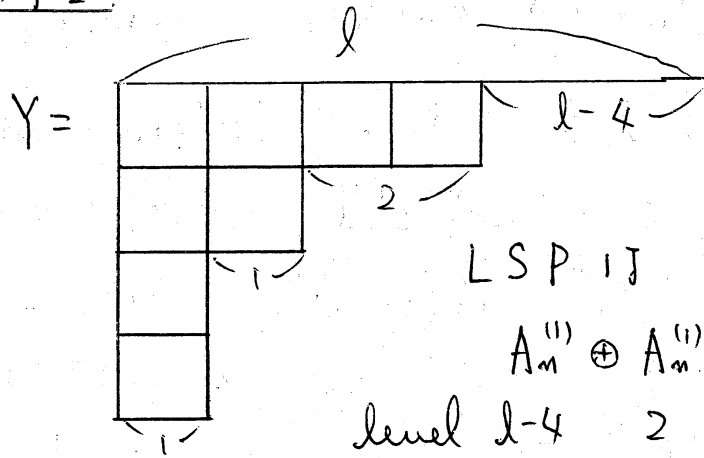


$$\text{LSP } \mathcal{P} \quad A_n^{(l)} \oplus A_n^{(N)} \supset A_n^{(l)}$$

level  $l-N$                        $N$                        $l$

の branching coefficient

例 2



$$A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \supset A_n^{(1)}$$

level  $l-4$     2    1    1     $l$

の branching coefficient

一般の Young diagram  $Y = (f_1, \dots, f_m)$   
 $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_m > 0$  に対する予想以上の  
 例から容易に推察できることと思う。

例 1 のとき local state  $a \in \mathcal{J}_1$  についての LSP  
 IT boundary condition (§9 参照) を

$a_1$ : dominant integral weight, level =  $l-N$

$a_2$ : dominant integral weight, level =  $N$

取り

$$p1 = a_1 + \sigma^{l-1}(a_2)$$

と決定 IT をとるに

$$V_{a_1} \otimes V_{a_2} \supset V_a$$

の branching coefficient をとるのである。

例 2 の場合も同様に  $a \in \mathcal{J}_1$  についての LSP



—MEMO—

## Appendix of § 7

Young symmetrizer a deformation  $F_Y$ Young symmetrizer a deformation  $F_Y$  の  $\tau < \tau \frac{1}{\theta}$  区  
区  $\sim \{$ Young diagram  $Y = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $f_1 \geq \dots \geq f_m > 0$   
 $N = f_1 + \dots + f_m$  に次の  $\beta$  に数  $\alpha_i$  を与える

0	1	2	3	4	...
$z-1$	$z$	$z+1$	$z+2$	$z+3$	...
$2z-2$	$2z-1$	$2z$	$2z+1$		
$3z-3$	$3z-2$	$3z-1$	$3z$		

,  $Y = (4, 3, 1)$

$\tau \in \alpha_1(z), \dots, \alpha_N(z)$  をこの書き添え  $\alpha_i$  に従  
って  $\tau$  次の  $\beta$  にする。

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3$$

$$\alpha_5 = z-1, \alpha_6 = z, \alpha_7 = z+1$$

$$\alpha_8 = 2z-2$$

$\tau$  による一般の  $Y = (f_1, \dots, f_m)$  に対して

$$\sum_{j=1}^k f_j < i \leq \sum_{j=1}^{k+1} f_j \quad \tau \text{ は } i \text{ に対して}$$

$$\alpha_i(z) = kz - k + (i-1 - \sum_{j=1}^k f_j)$$

とす。  $\alpha_{ij}(z)$  は

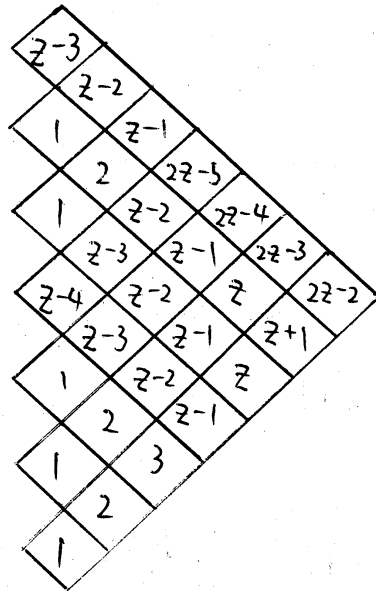
$$\alpha_{ij}(z) = \alpha_i(z) - \alpha_j(z)$$

としておく。

$F_Y(z)$  は

$$\begin{aligned}
 F_Y(z) := & W_1(\alpha_{21}) \\
 & \times W_2(\alpha_{31}) W_1(\alpha_{32}) \\
 & \times W_3(\alpha_{41}) W_2(\alpha_{42}) W_1(\alpha_{43}) \\
 & \times \dots \\
 & \times W_{N-1}(\alpha_{N,1}) W_{N-2}(\alpha_{N,2}) \dots W_1(\alpha_{N,N-1})
 \end{aligned}$$

とす。  $Y = (4, 3, 1)$  のときは  $F_Y(z)$  は  $\square$  で表わす。



おおよそ  $F_Y(z)$  は  $z \rightarrow 0$  と  $1/T$  にも  $F_Y$  の  $T$  による  $F_Y(z)$  の零点をもつので  $z=0$  と  $1/T$  を除いておく。  
 それのために

$$\beta_{ij}(z) = \prod_{r=2}^{f_j} \prod_{s=1}^{f_i} [(j-i)(z-1) + r-s], \quad i < j$$

$$\text{もし } i < j, f_j = 1 \text{ なら } \beta_{ij}(z) = 1$$

と 17

$$F_Y := \lim_{z \rightarrow 0} F_Y(z) \prod_{i < j} \beta_{ij}(z)^{-1}$$

と  $F_Y$  を定義する。

$Y = (4, 3, 1)$  なら 定数  $\tau$  がある。  $\beta_{12}(z)$  なら  $\tau$

以下 (17)

$$\beta_{12}(z) = [z-3][z-2]^2[z-1]^2[z]^2[z+1]$$

$\tau$  がある。 ( $[x] = \theta_1(\frac{\pi x}{L}, p)$ )

$F_Y$  は Young symmetrizer の deformation  $\tau$  がある  
 以下 (17). rational limit における

$$W_i(u) = 1 + P_{i, i+1}$$

$P_{ij} : (i \leftrightarrow j)$  の permutation.

$\tau$  がある。と 17 になる。

## Part 2 Local State Probability (LSP) の計算

restricted face model (vector 表現) と vertex model の双方について LSP を計算する。

### §8 Corner Transfer Matrix (CTM)

CTM は face model の 1 点函数を求める方法であるが、これについて rigorous かつ数学的証明は与えられていない。

$\mathcal{A}_*$ : local state の集合

$$P_a := \text{Prob}(p^{(i)} = a), \quad a \in \mathcal{A}_*$$

$$= \frac{1}{Z_{\text{conf}}} \sum_{\text{conf}} \delta(p^{(i)}, a) \prod_{\text{faces}} W \begin{pmatrix} p^{(i)} & p^{(j)} \\ p^{(k)} & p^{(l)} \end{pmatrix}$$

$p^{(i)}$ : ある site

すなわち  $P_a$  はある site  $p^{(i)}$  が  $a$  という状態をとりうる確率、1 点函数 (LSP) である。定義より

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_*} P_a = 1$$

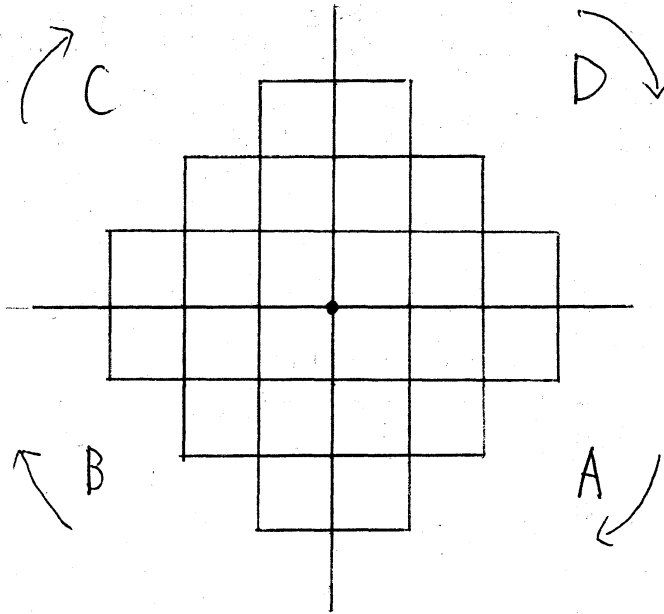
が明らかである。

よって  $P_a$  を求める際には格子の boundary condition を指定して求めなければならない。

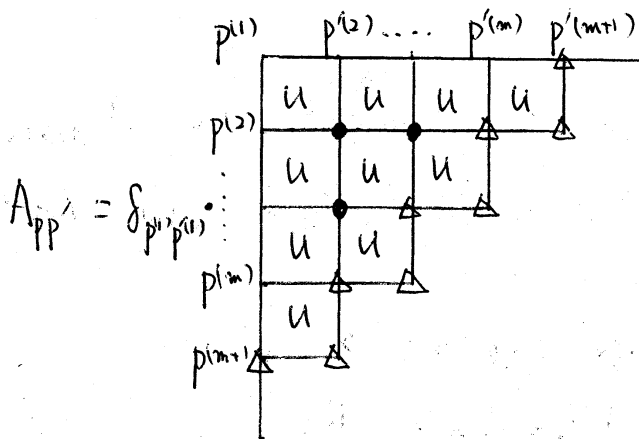


を注意しておく。

Corner Transfer Matrix  $A, B, C, D$  を  $1$  次元の格子のものである。まず固定した  $1$  つの site  $p^{(1)}$  のまわりに次の格子を考える。



例えば CTMA 上の格子の第 4 象限の部分を取り出して



$$A_{pp'} = \delta_{p^{(1)}, p'^{(1)}}$$

$$P = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$$

$$P' = (p'^{(1)}, \dots, p'^{(m)})$$

$$p^{(i)}, p'^{(i)} \in \mathcal{J}_+$$

の  $\prod$  Boltzmann weight の積  $Z$  となる。  $\Delta$  印の site は指定した boundary condition に従って固定。

•  $\Delta$  印の site は local state  $\mathcal{J}$  に対して和  $Z$  を取るものとする。そして得られた  $Z = \sum_{pp'} A_{pp'}$  要素として得られる matrix が CTM  $A$  である。  $\rightarrow$  列行列  $A$  は  $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$   $p' = (p'^{(1)}, \dots, p'^{(m)})$  に  $m$  index したる要素  $Z$  も  $(\#\mathcal{J})^m \times (\#\mathcal{J})^m$  size の matrix である。残りの  $B, C, D$  も対応する象限  $\prod$  同様に定義される。

CTM を用いる  $z$  については LSP は

$$P_a = \frac{\text{Trace} (S_a A(u) B(u) C(u) D(u))}{\text{Trace} (A(u) B(u) C(u) D(u))}$$

$$(S_a)_{pp'} = \delta(p^{(1)}, a) \delta_{pp'}$$

と表示される。

以後 Boltzmann weight 中の theta 函数の nome  $p$  は  $0 < p < 1$  変数  $u$  は  $-\frac{1}{2}(n+1) < u < 0$  であるとする。一般にこの範囲を Regime III と呼ぶ。

STR 及び  $u$  いくつかの付帯条件を仮定したとき (Baxter の本を参照のこと) CTM についての Baxter の仮説  $\prod$  次の  $\prod$  ものである。

Baxter の仮説 格子 size  $m \rightarrow \infty$  で

$$A(u) = \theta_1 M_1 \exp(uH) \theta_2^{-1}$$

$$B(u) = \theta_2 M_2 \exp(-uH) \theta_3^{-1}$$

$$C(u) = Q_3 M_3 \exp(uH) Q_4^{-1}$$

$$D(u) = Q_4 M_4 \exp(-uH) Q_1^{-1}$$

∴  $H, Q_i, M_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) は  $u$  に依存せず  $S_a$  と可換.  $H$  は  $M_i$  は diagonal である.

∴ Baxter の主張を認めると

$$P_a = \frac{\text{Trace}(S_a M_1 M_2 M_3 M_4)}{\text{Trace}(M_1 M_2 M_3 M_4)}$$

∴  $M_i$  diagonal matrix  $M_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) の性質を調べる ∴  $P_a$  を求める ∴  $P_a$  の性質を調べる. そのためにまず Boltzmann weight の性質をもう少し調べておく.

### Boltzmann weight の性質

$$(i) \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline u=0 & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} = \delta_{bd} \quad (\text{initial condition})$$

$$\therefore \text{よって} \quad A(0) = C(0) = \text{id}$$

$$\text{id} = A(0) = Q_1 M_1 Q_2^{-1} \quad \text{よ} \quad Q_2 = Q_1 M_1$$

$$\therefore A(u) = Q_2 \exp(uH) Q_2^{-1}$$

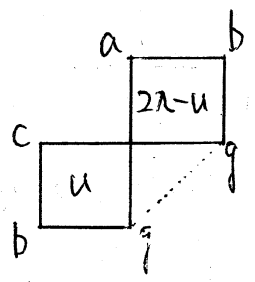
(iii) 2nd inversion relation

記号の簡単なT:の  $\therefore$  である

$$\overline{W} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{G_a G_c}{G_b G_d}} W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

 $G_a$ : 以下参照

とあり、以下の本節では  $\square$  は  $\overline{W}$  を表すものとする。

①   $= \rho_2(u) \delta_{ac}$   
 $\lambda = -\frac{tg}{2}$  (t, g は  $\delta$  (参照))

②  $M_1 M_2 M_3 M_4 = \exp(2\lambda \mathcal{H}) G \times \left( \begin{matrix} P^{(1)} \\ \vdots \\ P^{(n)} \end{matrix} \right)$  (独立項)

 $\therefore$   $G$  は matrix  $T$ 

$$G_{pp'} = G_{p^{(u)}} \cdot \delta_{pp'}$$

$$G_a := \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n+1} [a_\mu - a_\nu] \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\varepsilon(a) \prod_{\mu=1}^n h(a_\mu) \prod_{1 \leq k < \nu \leq n} [a_k - a_\nu][a_k + a_\nu] \quad \text{for } B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$$

$$\varepsilon(a) \text{ は } \frac{\varepsilon(a+\hat{\mu})}{\varepsilon(a)} = \sigma \quad \{ \sigma \} \text{ sign factor}$$

$\sigma \in h(a)$  は  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$  の  $\{ \mu \} \cup \{ \nu \} \cup \{ \lambda \}$

7次の方角である。

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
$k(a)$	1	$[a]$	$[2a]$	1
$\sigma$	1	1	-1	1

$\rho_2(u)$  の具形形

$$\rho_2(u) := \frac{[\lambda+u][\lambda-u]}{[1]^2} \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\frac{[\lambda+u][\lambda-u][1+u][1-u]}{[\lambda]^2[1]^2} \quad \text{for } B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$$

(証明)

(i) 略

(ii) ① A型の場合に Boltzmann weight の表式を直接計算して示す。B, C, D型の $\rho_2$ については (B, C, D型の Boltzmann weight は本節の Appendix E 参照) Boltzmann weight の

crossing symmetry

$$W \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right) = \sqrt{\frac{G_b G_d}{G_a G_c}} W \left( \begin{array}{cc|c} d & a & \lambda-u \\ c & b & \end{array} \right)$$

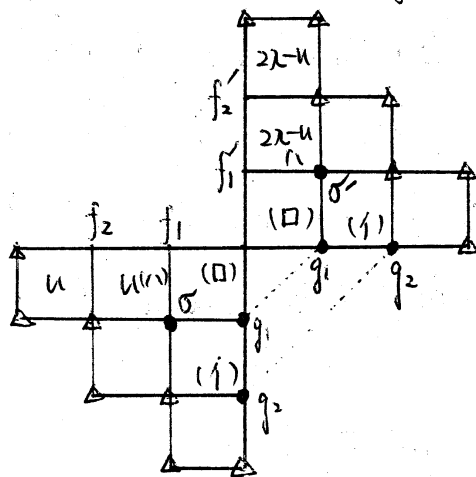
を請うた $\rho_2$ から 1-st inversion (§5) に帰着。

① → ②

CTM  $A, B, C, D$  の定義中の Boltzmann weight  $W$  を先の  $\bar{W}$  に置きかえて得られる matrix を  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  に  $\mathcal{M}$  表わすことにする。

$$\begin{aligned} & C(0) D(u) A(0) B(2\lambda - u) \\ &= \Omega_3 M_1 M_2 M_3 M_4 \exp(2\lambda H) \Omega_3^{-1} \\ &= D(u) B(2\lambda - u) \quad (\because A(0) = B(0) = \text{id}) \\ &= G \bar{D}(u) \bar{B}(2\lambda - u) \times (\text{p}^{(1)}\text{-independent term}) \\ &= G \times (\text{p}^{(1)}\text{-independent term}) \end{aligned}$$

上式の最後の等号は次のように説明される。



$\Delta$  印の site は boundary condition に  $\mathcal{M}$  fix  
 • 印の site は和をとる  
 ..... して結ぶだけ = site は常に同じ値をとる。

weight の積が  $f_1, f_2, f'_1, f'_2$  に依存 (  $\tau u$  ) であることを示す。まず (1) の face に注目して 2nd inversion を用いて  $\sum g_2$  を行なう。  $\sigma = \sigma'$  となる項は残らない。次に  $\sigma = \sigma'$  となる項は

(ii) の face について 2nd inversion を用いて  $\delta_{f_1, f_1'}$  を  
 得て  $\sum_{q_1 \in \text{inv}(f_1)} f_1 = f_1'$  となる項しか残らず  
 $f_1, f_1'$  への依存性が  $\delta_{f_1, f_1'}$  を通じてしか  $\delta_{f_1, f_1'}$  にか  
 らぬ。さらに  $\sum_{\sigma} \in$  再び 2nd inversion を行  
 うと  $f_2, f_2'$  に依存した  $\delta_{f_2, f_2'}$  しか残らない。

但し、Andrews Baxter-Forrester の論文には、  
 この部分について、次のように記述書きがある。

"There is a problem in deriving this, in that  
 (2nd inversion) is not necessarily satisfied for  
 $j = m+1$ . However, it seems that we can  
 ignore this boundary difficulty in the limit  
 of  $m$  large."

( $j = m+1 \in \mathbb{Z}$   $g_2$  の左 (F) の boundary の site の  
 こと)



以上のこと  $\rightarrow$  (ii) ③  $\text{Tr LSP}$  17

$$\begin{aligned}
 P_a &= \frac{\text{Trace}(S_a G \exp(2\lambda H))}{\text{Trace}(G \exp(2\lambda H))} \\
 &= \frac{\text{Trace}(S_a G A(2\lambda))}{\text{Trace}(G A(2\lambda))}
 \end{aligned}$$

と長引くことになる。

Appendix of § 8

B, C, D  $\hat{\mu}_I$  or Boltzmann weight

$\hat{\mu}_I$  orthonormal vector  $\epsilon_i$   $\bar{\lambda}_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$   $(1 \leq i \leq n-1)$   
 $\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$   $(i=n)$

$$B_n \quad A = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n, 0 \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i & (1 \leq i \leq n-1) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$$C_n \quad A = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$D_n \quad A = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i & (1 \leq i \leq n-2) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n) & (i=n-1) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$\hat{\mu}_I$

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \pm \epsilon_i \text{ or } 0 \quad (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n, \text{ or } \mu = 0) \\ \text{for } B_n \\ \pm \epsilon_i \quad (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n) \\ \text{for } C_n, D_n \end{cases}$$



また  $a \in \mathfrak{h}^*$   $i = \pm 1$

$$a_\mu := \begin{cases} \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle & (\mu \neq 0) \\ -\frac{1}{2} & (\mu = 0) \end{cases}$$

$$\bar{a} + \bar{\rho} = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

と定まる。したがって  $G_{a\mu}$  は

$$G_{a\mu} = \frac{G_{a+\hat{\mu}}}{G_a}, \quad G_{a0} = 1$$

とある。

$\therefore a \in \mathfrak{h}$  Boltzmann weight は

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \quad \square \quad \mu \\ \mu \end{array} = \frac{[\lambda - u][1 + u]}{[\lambda][1]} \quad (\mu \neq 0)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \quad \square \quad \nu \\ \nu \end{array} = \frac{[\lambda - u][a_{\mu\nu} - u]}{[\lambda][a_{\mu\nu}]} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{array}{c} a \quad \nu \\ \mu \quad \square \quad \mu \\ \nu \end{array} = \frac{[\lambda - u][u]}{[\lambda][1]} \left( \frac{[a_{\mu\nu} + 1][a_{\mu\nu} - 1]}{[a_{\mu\nu}]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \nu \\ -\mu \end{array} &= \frac{[u][a_\mu + a_\nu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][a_\mu + a_\nu + 1]} (G_{a_\mu} G_{a_\nu})^{1/2}, (\mu \neq \nu) \\
 \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \mu \\ -\mu \end{array} &= \frac{[\lambda + u][2a_\mu + 1 + 2\lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} \\
 &- \frac{[u][2a_\mu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} \sum_{k(\neq \mu)} \frac{[a_\mu + a_k + 1 + 2\lambda]}{[a_\mu + a_k + 1]} G_{a_k}
 \end{aligned}$$

である。  $T$  は  $u$  の Boltzmann weight  $T$  の性質をもち。

Initial condition

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | 0 = \delta_{bd}$$

Reflection symmetry

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u = W \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} | u$$

Crossing symmetry ( $A \stackrel{u}{\parallel} T \stackrel{\lambda}{\parallel} B$ )

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u = \left( \frac{G_b G_d}{G_a G_c} \right)^{1/2} W \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} | \lambda - u$$

## §9 Local State Probabilities

in terms of 1D sums

(face models and vertex models in face formulation)

以下で「 $A_m^{(l)}$ 」の vector 表現で level  $l \geq 2$  の場合に LSP を求める議論をする。

Boltzmann weight の性質 (続)(iii) diagonal nature at  $x=0$ 

Boltzmann weight は 2 変数  $u, p$  ( $p$ : modular 変数) の函数であらう。Theta 函数  $[u]$  は Jacobi の虚変換を行なう後に

$$(u, p) \longrightarrow (w, x)$$

$p = e^{-\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ),  $x = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{L\varepsilon}\right)$ ,  $w = x^u$  なる変数変換をする。

$$[u] = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} x^{\left\{\frac{L}{8} + \frac{u(u-L)}{2L}\right\}} E(x^u, x^L)$$

$\therefore$  1:

$$\begin{aligned} E(z, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zq^{k-1})(1 - z^{-1}q^k)(1 - q^k) \\ &= -z E(z^{-1}, q) \end{aligned}$$

である。

2.5.1:

$$\begin{array}{c} a \\ \hline \square \\ \hline d \end{array} \begin{array}{c} b \\ \hline \\ \hline c \end{array} = w \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \cdot F \cdot w^{(f_b + f_d - f_a - f_c)}$$

$$F = x^{-u(u+L + \frac{2}{n+2})/2L}$$

$$f_a = \frac{1}{2} |a + \rho|^2$$

modify (T = Boltzmann weight)  $w, x \in \mathbb{C}$   
 (  $\square$  is modified Boltzmann weight )

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \hline \mu \end{array} = w^{-1} \frac{E(xw, x^L)}{E(x, x^L)}$$

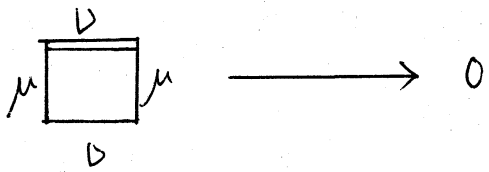
$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \hline \nu \end{array} = \frac{E(x^{q\nu} w^{-1}, x^L)}{E(x^{q\nu}, x^L)}$$

$$\begin{array}{c} \nu \\ \hline \square \\ \hline \mu \end{array} = x^{1/2} w^{-1} \sqrt{\frac{E(x^{q\nu+1}, x^L) E(x^{q\nu-1}, x^L)}{E(x^{q\nu}, x^L)^2}}$$

if  $\mu \neq \nu$  then  $\omega \neq 1$ .  $\therefore$   $w$  is fixed (  $x \rightarrow 0$  )

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \hline \mu \end{array} \longrightarrow \omega^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \hline \nu \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \omega^0 = 1 & (\mu < \nu) \\ \omega^{-1} & (\nu < \mu) \end{cases}$$



∴ 以下 E について

$$\lim_{\substack{\omega: \text{fix} \\ x \rightarrow 0}} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} = \delta_{bd} \omega^{-H(a,b,c)} \quad \dots (*)$$

∴ H は H-function と呼ばれる

$$\begin{aligned} H(a, a+\hat{\mu}, a+\hat{\mu}+\hat{\nu}) &= H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \\ &= \theta(\mu \geq \nu) = \begin{cases} 1 & \mu \geq \nu \\ 0 & \mu < \nu \end{cases} \end{aligned}$$

なる函数である。(\*) の式が “diagonal nature at  $x=0$ ” と呼ばれるものである。

∴ 以下に Boltzmann weight E modify して CTM は boundary の local state に関する  $J_*$  と原点の site の  $J_a$  から (か影響を受け) なる。 (か)  $J_{ix}$  として boundary の  $J_*$  と F は LSP から CTM/CTM 形式で示すことから LSP に変化する。 以下 LSP に関する以下で ∴ 以下を適宜無視して計算する。  $J_T$ : modify  $J_T$ : Boltzmann weight も STR を満たす。

diagonal nature E 用いて CTM  $A(u)$  E 調べよう。

命題  $A'(u)$  は  $w$  の整中のみを含む

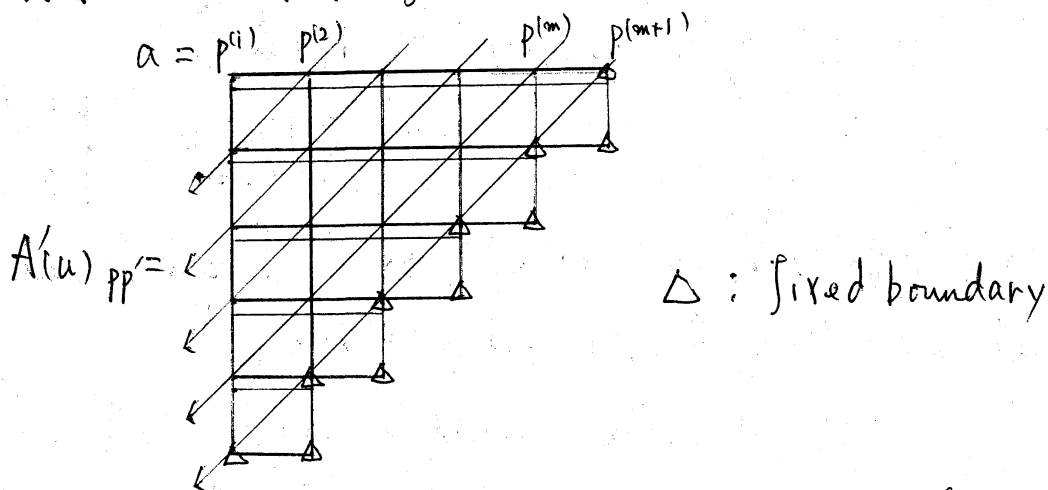
従って  $w^{fa} A(u)$  は

$$u \quad u + \frac{L\varepsilon}{2\pi} \sqrt{-1} \quad \text{で「不変」}$$

(iii) 命題 I'

$$\lim_{w: \text{fix}, x \rightarrow 0} A(u)_{pp'} = w^{-fa - mp} \delta_{pp'}, \quad mp \in \mathbb{Z}$$

と示さなければならない。



において  $w: \text{fix}$  から  $x \rightarrow 0$  へと  $\mathbb{Z}$  の diagonal nature

上の図の斜めの矢線上の weight がすべて等しいと示さなければならない。

$$\begin{array}{c} a & & b \\ & \square & \\ d & & c \end{array} = \begin{array}{c} a & & b \\ & \square & \\ d & & c \end{array} \cdot F^{-1} \cdot w^{(fa+fc-fb-fd)}$$

に気をつけて計算すれば

$$A(u)_{pp'} = \delta_{pp'} \cdot w^{fa - \sum_{i=1}^m j_i H(p^{(i)}, p^{(i+1)}, p^{(i+2)})}$$

と示さなければならない。

ゆえに

$$\eta_p = \sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})$$

$\delta \delta$  の  $P_a$  の  $\mathbb{F}$  表示式は:  $A_n^{(1)}$  の  $\sqrt{\frac{B}{A}}$  の  $\lambda = -\frac{1}{2}(n+1)$

に代り

$$P_a = \frac{\text{trace}(S_a G A^{(-n-1)})}{\text{trace}(G A^{(-n-1)})}$$

$\therefore \tau$

$$G = (G_{pp'}) \quad , \quad G_{pp'} = \delta_{pp'} G_p^{(1)}$$

$$G_a = \prod_{\mu < \nu} [g_{\mu\nu}] \propto x^{(n+1)f_a - \langle a^T p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{g_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$S_a = (S_{a, pp'}) \quad , \quad S_{a, pp'} = \delta(p^{(1)}, a) \delta_{pp'}$$

$\tau$  あり、 $\tau$  から

$$P_a = \frac{\sum_{p, p^{(1)}=a} G_p A^{(-n-1)}_{pp}}{\sum_p G_p A^{(-n-1)}_{pp}}$$

$\therefore \tau$

$$U_a = x^{-\langle a^T p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{g_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$X_m(a, b, c; q) = \sum_x q^{\sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})}$$

$$\left( \begin{array}{l} \sum_x \text{1D path } p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m+2)}) \quad \tau^n \\ p^{(1)} = a, p^{(m+1)} = b, p^{(m+2)} = c, p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{J}_1 \\ (p^{(j)}, p^{(j+1)}) : \text{admissible for } j=1, \dots, m+1 \\ \mathcal{J}_1 \text{ は } \mathbb{F} \text{ の } \mathbb{E} \text{ の } \tau \text{ である} \end{array} \right)$$

ε 定の LSP

$$P_\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+2)})$$

$$P_m(a, b, c) = \frac{u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}{\sum_{a \in J_1} u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}$$

ε 表す: ε が 0 になる。

∴  $P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+2)}$  は boundary condition である。LSP  $P_\alpha$  は boundary  $\alpha$  の ε 方に依存する: ε に注意する。  $P_{\xi \Lambda_\nu}^{(i)}$  は次のように定められる。

$\xi$ ;  $A_n^{(i)}$  の level  $i-1$  の dominant integral weight

$\Lambda_\nu$ ; fundamental weight,  $0 \leq \nu \leq n$

但し  $\Lambda_{\nu+m+1} = \Lambda_\nu$  として添字を  $\mathbb{Z}$  に拡張してある。

$$P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(i)} := \xi + \sigma^{i-1}(\Lambda_\nu)$$

$$\therefore \sigma(\Lambda_\nu) = \Lambda_{\nu+1}$$

当然  $\xi$  は boundary condition は  $\xi \in \Lambda_\nu$  の ε 方の数にだけあり。"最低エネルギー" に持つ path として特徴付けられる。すなわち  $\omega > 1$  (Regime III である: ε がある) であるから  $\sum_j j H_j$  を "minimize" する path である: ε である。



以上で「 $(A_n^{(l)}, \text{vector 表現, level } l)$ 」なる model を扱ったが、 $(A_n^{(l)}, N \text{ 次対称表現, level } l > N)$  なる model に対しても平行に議論を進めることができる。この場合については ID sum の表示における H-Junction は以下のように予想されている。

$$\begin{aligned} H(a, b, c) &= H(b-a, c-b) \\ &= \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{i=1}^N \theta(\mu_i \geq \nu_{\sigma(i)}) \end{aligned}$$

∴

$$b-a = \hat{\mu}_1 + \dots + \hat{\mu}_N$$

$$c-b = \hat{\nu}_1 + \dots + \hat{\nu}_N$$

$\mathfrak{S}_N$ :  $N$  次対称群

boundary condition は

$\xi$ : level  $l-N$  の dominant integral weight

$\eta$ : level  $N$  の dominant integral weight

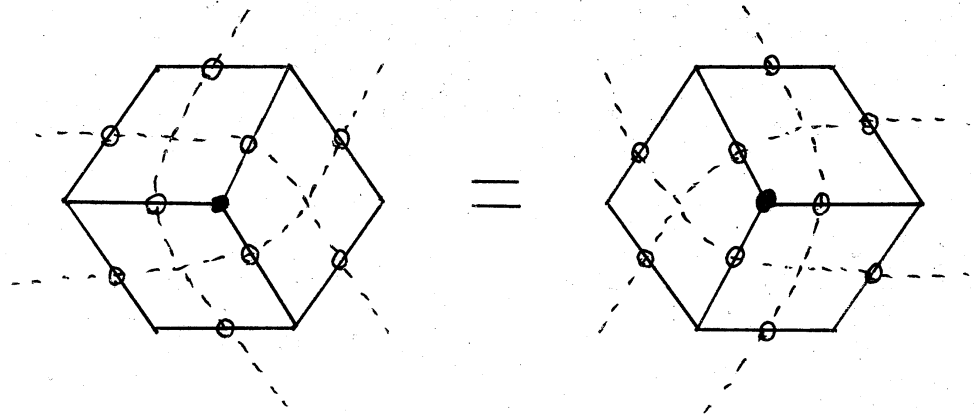
∴

$$P_{\xi, \eta}^{(l)} = \xi + \sigma^{l-1}(\eta)$$





新しく作られたこのFace model からSTRを導くことができる。



の形に先の読みかえをSTRにおいて直接行えばYBEが明らかである。

上の図は破線がvertex modelでのYBEを表す。この部分の和は

$$\alpha \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \square \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \nu = 0 \quad \text{if } \hat{\mu} + \hat{\nu} \neq \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

の部分の和に置き変えることに注意する。

いくつかR-matrixの性質を挙げておこう。

R-matrixの性質

(i)  $\eta$ -invariance.

$$[R(w, \lambda), h \otimes 1 + 1 \otimes h] = 0 \quad \text{for } \forall h \in \mathfrak{g}$$

7" あり、 $\epsilon \epsilon$ .

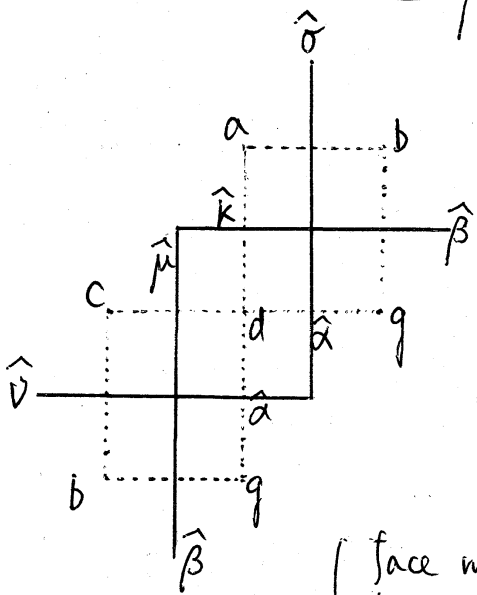
$$R(\omega, x)_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \text{unless } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

$\epsilon$  1 同値

(ii)  $R(1, x) = (\text{scalar}) \times (\text{identity})$

(iii) 2-nd inversion relation

$$\sum_{\alpha, \beta} R(\omega x^{-2}, x)_{\kappa\alpha\sigma\beta} \cdot R(\omega^{-1} x^{-2}, x)_{\nu\beta\mu\alpha} \cdot \frac{g_\alpha g_\beta}{g_\mu g_\sigma} = \rho_2(\omega) \delta_{\kappa\mu} \delta_{\sigma\nu}$$



実線は vertex model  $\epsilon$   
 破線は face formulation  $\epsilon$   
 表わす。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= b - a, & \hat{\beta} &= g - b \\ \hat{\kappa} &= d - a, & \hat{\alpha} &= g - d \\ \hat{\mu} &= d - c, & \hat{\nu} &= b - c \end{aligned}$$

(face model の 2-nd inversion の  
 読みかえ  $\epsilon$   $\sigma$ ,  $\tau$  あり  $\epsilon$  1 に注意)

(iv) diagonal nature at  $x=0$

$$R(\omega, 0) = \sum_{\mu, \nu} \omega^{H(\hat{\mu}, \hat{\nu})} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

$\lambda$  の値から trigonometric R-matrix より  
 定まる vertex model に対しては face Formulation  
 を通じて CTM の方法を適用して求めることができる。  
 LSP を求めることができる。その結果は  $A_m^{(1)}$   
 の値に等しいことになる。

### vertex model の 1点函数

$\Lambda \in \{\Lambda_0, \dots, \Lambda_m\}$   
 に対して boundary condition  $E$

$$P_\Lambda^{(j)} = \sigma^{(j-1)}(\Lambda)$$

$\lambda \in \lambda$

$$P(a|\Lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_\Lambda^{(m+1)}, P_\Lambda^{(m+2)})$$

$\therefore$

$$P_m(a, b, c) = \frac{\chi^{-\langle a, \rho \rangle} f_m(b-a, c-b; \chi^{n+1})}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', \rho \rangle} f_m(b-a', c-b; \chi^{n+1})}$$

$$f_m(\lambda, \eta; q) = \sum_{\text{admissible path}} q^{\sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$

$\eta^{(i)}$ : weight of vector representation of  $A_m^{(1)}$   
 $\eta^{(m+1)} = \eta$ : fixed  $= p(\eta^{(m+1)}) - p(\eta)$

$$H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \theta(\mu \geq \nu)$$

$f_m$  の表式中の  $H$ -function において admissible path について和をとりが、この admissibility は unrestricted model の "weak" admissibility であることに注意する。

尚  $B, C, D$  型の vertex model についても同様の計算において LSP が求められている。

§ 10 1D sums for finite m

本節中で  $f_m(x, x, q)$  の  $q$  を省略して書くことにしておく。本節での目標は 1 点函数

$$\sum_{p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{A}_*} q^{\sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})}$$

$p^{(1)} = a, p^{(m+1)} = b, p^{(m+2)} = c$  : fixed  
 $P$  : admissible

を  $m \rightarrow \infty$  の極限が分かりやすくなる形に書き改めることである。

上の和が実際にはどの形のものであるのかを例を通じて観察してみよう。

例  $n=1$

$$\hat{\sigma} = \Lambda_1 - \Lambda_0, \quad \hat{\tau} = \Lambda_0 - \Lambda_1, \quad \hat{\sigma} + \hat{\tau} = 0$$

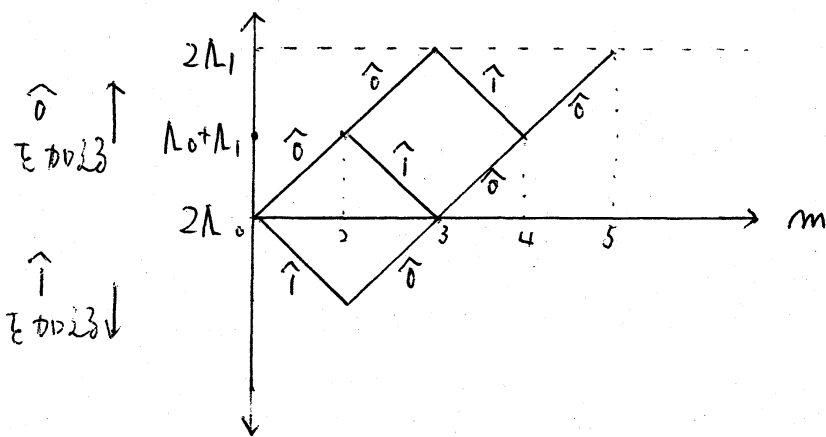
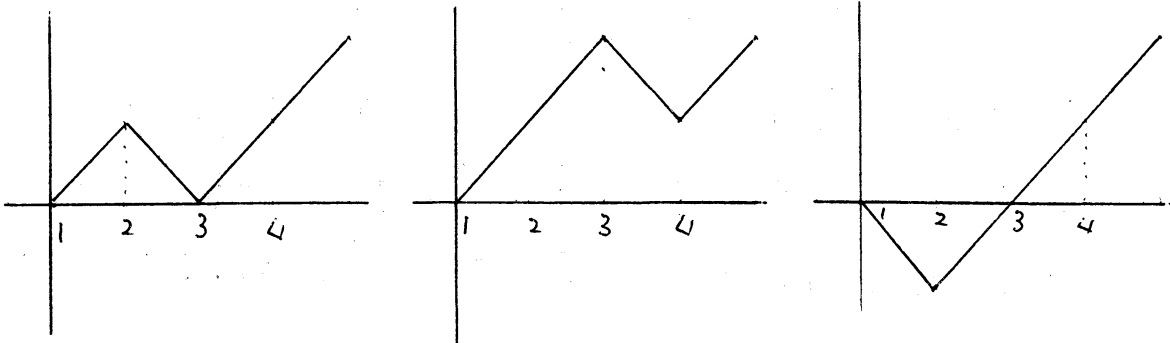




図 71  $f_3(\hat{0}, \hat{0})$  に寄与する path 17.



の 3 個である。ゆえに

$$\begin{aligned} f_3(\hat{0}, \hat{0}) &= q^{2+3} + q^{1+3} + q^{1+2+3} \\ &= q^4(1 + q + q^2) \quad (= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

比較のため、 $l=2$  の restricted model に対する  $X_3 \in \mathcal{A}$  の  $z$  の初めの 2 個の path  $\in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} X_3(2\Lambda_0, \Lambda_0 + \Lambda_1, 2\Lambda_1) &= q^{1+3} + q^{2+3} \\ &= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

$f_*$  は  $q=1$  として (7.3) と単に path の個数を  $z$  の係数として与える。(  $q \neq 1$  のときは  $z$  の  $q$ -analogue )  
 $\rightarrow$  7.7  $q=1$  の場合  $f_m(r, \eta)$  は

$$r = r_0 \hat{0} + \cdots + r_m \hat{n}, \quad \sum r_i = m, \quad r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

として

$$f_m(\gamma, \eta) = \frac{m!}{\gamma_0! \gamma_1! \cdots \gamma_n!} \quad (q=1)$$

である。既に  $f_3(\hat{0}, \hat{0})$  の表式中で定義せしむに用いていた  $[ ]$  の記号は 多項係数の  $q$ -analogue として次のように定義されている。

$$[\gamma_0, \dots, \gamma_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{\gamma_0} \cdots (q)_{\gamma_m}} & \text{if } \sum \gamma_\mu = m, \\ & \gamma_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[ ] := 1$$

$$(q)_k := \prod_{i=1}^k (1 - q^i) \quad k \geq 1$$

$$(q)_0 := 1$$

これは  $\gamma \in \mathfrak{h}^+$  に対して

$$\gamma \equiv \gamma_0 \hat{0} + \cdots + \gamma_n \hat{n} \pmod{\mathbb{C}\mathfrak{f}}$$

のとき

$$[\gamma] = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]$$

と書くことにする。

よりの記号の  $r \in \mathbb{N}$  に  $m < +\infty$  に対する  $1-D$  sum  
 形式の形に表わされる。

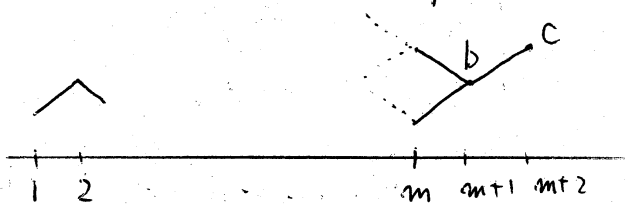
定理 ( $m < +\infty$  vertex model)

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^m r_{\mu}(r_{\mu}-1) + \sum_{\mu=0}^m H(\hat{\mu}, \hat{v}) r_{\mu}} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

( $0 \leq m < +\infty$ )

(証明)

$$f_m(r, \eta) = \sum_{\text{admissible path}} q^{\sum_j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$



であるから

$$\begin{cases} f_m(r, \hat{v}) = \sum_{0 \leq \mu \leq m} f_{m-1}(r - \hat{\mu}, \hat{\mu}) q^{m H(\mu, v)} \\ f_0(r, \hat{v}) = \delta_{r,0} \quad (\text{初期条件}) \end{cases}$$

与る式が path  $\in v \rightarrow$  方向で正しいことを示す  
 ことに可能である。

逆に上の2式を帰納的に  $f_*$  正定値から  
 定理中の表式が、この2式を満たすことを示  
 せば証明は完了する。

初期条件に関して自明である。

もう一つの式が定理の表式を満すことを示すには。

$$\left[ \begin{matrix} m \\ r_0, \dots, r_m \end{matrix} \right] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{\text{Pow}(\mu)} \left[ \begin{matrix} m-1 \\ r_0, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_m \end{matrix} \right]$$

$$\text{Pow}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^m \left\{ r_{\lambda}'(r_{\lambda}'-1) - r_{\lambda}(r_{\lambda}-1) \right\} + \sum_{\lambda=0}^m \left\{ H(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) r_{\lambda}' - H(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) r_{\lambda} \right\} + m H(\hat{\mu}, \hat{\nu})$$

$$\therefore r_{\lambda}' = \begin{cases} r_{\mu-1} & (\lambda = \mu) \\ r_{\lambda} & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

と示せば上の式が Pow( $\mu$ ) の計算式と一致する。


$$\text{Pow}(\mu) = \begin{cases} m - (r_0 + \dots + r_m + r_0 + \dots + r_{\mu}) & \text{for } \mu < \nu \\ m - (r_0 + \dots + r_{\mu}) & \text{for } \mu \geq \nu \end{cases}$$

と示すから。

$$\left[ \begin{matrix} m \\ r_0, \dots, r_m \end{matrix} \right] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{m - (r_{\sigma(0)} + \dots + r_{\sigma(\mu)})} \cdot \left[ \begin{matrix} m-1 \\ * \end{matrix} \right]$$

$$\left[ \begin{matrix} m-1 \\ * \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} m-1 \\ r_{\sigma(0)}, r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(\mu)-1}, \dots, r_{\sigma(m)} \end{matrix} \right]$$

$\therefore$   $\sigma$  は  $n+1$  次対称群の元

とす。定義 1)  $q$ -multinomial  $f_0, \dots, f_m$  について対称であるから、定理が示す  $U(T)$ 。 

注意

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r-\hat{v}|^2 + C_m(v)} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(v) = \frac{(m-v)(m-v+n+1)}{2(n+1)}$$

の形に  $f_m$  を表すことができる。この形は  $f_m$  を用いて  $X_m$  を表すことに有効である。

$r$  が  $q^+$  of  $A_n^{(1)}$  の元のことにして  $f_m$  の定義域を拡張しておくのが自然な形で上式 1)

$$f_m(r+k\delta, \hat{v}) = q^{-k} f_m(r, \hat{v})$$

$\delta$ : null root

と定めることにする。

定理 ( $m < +\infty$ , face model)

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \text{det}(w) f_m(b + \rho - w(a + \rho), c - b)$$

$W$ : affine Weyl group of type  $A_n^{(1)}$

$$0 \leq m < +\infty$$

前節のCTMについてのBaxterの議論は lattice size が有限のときには“積極的ツール”である。しかし、やはり lattice size 有限に対する量である  $\chi_m$  は 数学的に (combinatorial に) 興味深い量であるという定理を示しているといえる。

定理の証明の前に、 $A_n^{(1)}$  の affine Weyl group について若干の準備をしておく。

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n : \text{root lattice}$$

$$\alpha_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j \quad : \text{simple root}$$

ここに  $\varepsilon_i$  は  $\mathbb{C}^n$  の orthonormal base.

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

さて  $A_n^{(1)}$  の affine Weyl group  $W$  は

$$W := \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes Q$$

である。ここで  $\mathfrak{S}_{n+1}$  は  $\varepsilon_i$  の列に作用する。

$\mathfrak{S}_{n+1}$  は  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$  の置換

$\alpha \in Q$  は translation  $t_\alpha$  として

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, \delta \rangle \alpha - \left\{ \langle \lambda, \delta \rangle \frac{|\alpha|^2}{2} + \langle \lambda, \alpha \rangle \right\} \delta$$

に作用をする。また  $r_\mu \in W$  の fundamental reflection  $r_\mu$  として

$$r_{\mu}(\Lambda_k) = \Lambda_k - \delta_{\mu k} (2\Lambda_k - \Lambda_{k+1} - \Lambda_{k-1})$$

↑ のものなのである。

(定理の証明)

この場合も先の vertex model に対する定理の証明と同様に  $X_m$  を定める漸化式を用いる。  
 以下、

$$\begin{cases} X_0(a, b, c) = \delta_{ab} & (\text{初期条件}) \\ X_m(a, b, c) = \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq m \\ d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{J}}} X_{m-1}(a, d, b) q^{mH(d, b, c)} \end{cases}$$

初期条件に関して一通りに示される。

もう一つの式に関して  $\sum$  中の  $d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{J}$  「条件が与えられる」 以下  $f_m$  に関する漸化式と全く同じものになる。

$d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{J}$  なる  $d$  以上の和に寄与しないことを示せば、先の  $f_m$  についての議論を援用して、定理を証明することができる。

すなわち、

$$\begin{array}{l} b \in \mathcal{J} \\ b - \hat{\mu} \notin \mathcal{J} \end{array} \quad \text{ならば} \quad X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0$$

を示す。

$b \in \mathcal{A}$ ,  $b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}$ , 同様の状況に課し続ける。

$$b = b^0 \lambda_0 + \dots + b^m \lambda_m, \quad b^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\sum_{i=0}^m b^i = l$$

であるはず。  $\hat{\mu} = \lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu}$  により

$$b - \hat{\mu} = b^0 \lambda_0 + \dots + (b^{\mu} + 1) \lambda_{\mu} + (b^{\mu+1} - 1) \lambda_{\mu+1} + \dots + b^m \lambda_m$$

から、この  $\mathcal{A}$  に  $\lambda_{\mu+1}$  と  $\lambda_{\mu}$  の差は  $\mathcal{A}$  である。

$\lambda_i$  の係数の  $\mathcal{A}$  に  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  中に  $\lambda_{\mu+1}$  の

係数は

$$b^{\mu+1} = 0$$

である。よって  $b^{\mu+1} = 0$  である。

帰納法の仮定より

$$\chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = \sum_{w \in W} \det(w) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - w(a + \rho), \hat{\mu})$$

であり、 $b^{\mu+1} = 0$  である。Fundamental reflection

$r_{\mu+1}$  に対して

$$r_{\mu+1}(b - \hat{\mu} + \rho) = b - \hat{\mu} + \rho$$

から

$$\begin{aligned} & \chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) \\ &= \sum \det(w) f_{m-1}(b + \rho - \hat{\mu} - w(a + \rho), \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$\therefore f_{m-1}(r_{\mu+1}(z), \hat{\mu}) = f_{m-1}(z, \hat{\mu})$$



$$= \sum \det(\omega) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega(a + \rho), \hat{\mu})$$

$$= \sum - \det(\omega') f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - \omega'(a + \rho), \hat{\mu})$$

$(\omega' = r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega)$

$$= -X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b)$$

ゆえに

$$X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0$$

∴ 以上で定理が証明された。 □

§11 1D sums in terms of modular forms.

§10 1: おいて lattice size  $m$  が有限のとき  
1: 1D sum である。

vertex model として

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r - \Lambda_{\hat{v}}|^2 + C_m(\hat{v})} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(\hat{v}) = \frac{(m - \hat{v})(m - \hat{v} + m + 1)}{2(m + 1)}$$

face model として

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \det(w) f_m(b + \rho - w(a + \rho), c - b)$$

と表わすことができる。実際  $m \rightarrow \infty$  の  
極限において  $f_{\infty}, X_{\infty}$  として表わす。

affine Lie algebra の level 1 の表現の string  
function, branching coefficient として  
ある。まず、これらの結果を述べるための準備  
を述べる。

以下として

$L(\Lambda)$ : irreducible  $\Lambda_m^{(1)}$ -module with the  
highest weight  $\Lambda$

$L(\Lambda)_\mu := \{u \in L(\Lambda) \mid hu = \mu(h)u, h \in \mathfrak{h}\}$   
 $\therefore \mu \in \mathfrak{h}^*, \mathfrak{h} : \text{Cartan subalgebra of } \Lambda_n^{(1)}$   
 をする。

path について

定義 path

$p = (p^{(j)})_j$  が path であるとは、 $p^{(j)}$  が  
 local state である。

$\gamma^{(j)}(p) = p^{(j+1)} - p^{(j)} \in \{\hat{0}, \dots, \hat{n}\}$   
 である。

例 §10 で見た  $T = \text{ground state } P_{\Lambda_0}$   
 は path である。

$$P_{\Lambda_0} = (P_{\Lambda_0}^{(j)})_{j \geq 1}, \quad P_{\Lambda_0}^{(j)} = \Lambda_0 + j - 1$$

次に一般の path に対してよく境界条件 (+ 分違  
 の様子) を指定した path を考える。

定義  $\Lambda_0$ -path

path  $p = (p^{(j)})_j$  が ある  $k \in \mathbb{N}$  に対して  
 $j$  に対して ground state の path  $P_{\Lambda_0}$  と  
 一致する。  $\therefore \text{all } \Lambda_0\text{-path} \dots$  その全体

は  $P(\Lambda_0)$  で表わす。

$$P(\Lambda_0) := \bigcup_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0) := \left\{ p = (p^{(j)}) : \text{path} \mid \begin{array}{l} p^{(j)} = P_{\Lambda_0}^{(j)} \\ \text{for } j > m \end{array} \right\}$$

したがって  $p \in P(\Lambda_0)$  に対して path  $p$  の degree  $\omega(p)$  は

$$\omega(p) := \sum_{j=1}^{\infty} j \left\{ H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p)) - H(\eta^{(j)}(P_{\Lambda_0}), \eta^{(j+1)}(P_{\Lambda_0})) \right\}$$

と定める。このように  $\Lambda_0$ -path の定義は有限和で与えられることに注意する。

また  $\mu \in \mathfrak{h}^+$  に対して

$$P(\Lambda_0)_\mu := \left\{ p \in P(\Lambda_0) \mid p^{(1)} - \omega(p)\delta = \mu \right\}$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0)_\mu := P(\Lambda_0)_\mu \cap P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$\omega_m(p) := \sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p))$$

と定める。

$$q^{-\omega_m(P_{\Lambda_0})} f_m(P_{\Lambda_0} - a, \eta^{(m+1)}(P_{\Lambda_0}); q)$$

$$= \sum_i \#(P^{(m)}(\Lambda_0)_{a-i\delta}) q^i$$

と表わすことができる。

path に 覆 ぬ る T に 対 し 一 つ の 例 を 挙 げ る。

例  $n=1$

$$P_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \dots$$

$$\eta(P_{\Lambda_0}) : \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \dots$$

1 は ground state である。 ground state として  
 1 は path の 例 を 適 当 に 挙 げ る。

$$P_1 : 3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 \quad 2\Lambda_0 - \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \dots$$

$$\eta(P_1) : \hat{0} \quad \hat{0} \quad \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \dots$$

$$P_2 : -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad -2\Lambda_0 + 3\Lambda_1 \quad -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \dots$$

$$\eta(P_2) : \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{1} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \hat{0} \dots$$

上 の  $P_1, P_2$  は  $\Lambda_0$ -path である。

$$P_1 \in P(\Lambda_0)_{3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 - \delta}$$

$$P_2 \in P(\Lambda_0)_{-\Lambda_0 + 2\Lambda_1 - 3\delta}$$

である。 したがって

$$P_{\Lambda_0} \in P(\Lambda_0)_{\Lambda_0}$$

定理 (vertex model,  $m \rightarrow \infty$ )

$$\# P(\Lambda_\nu)_\mu = \dim L(\Lambda_\nu)_\mu$$

1 は 同 通  $\tau_\delta$  と  $\tau_{-\delta}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{-\omega_m(P_{\Lambda_\nu})} f_m(P_{\Lambda_\nu}^{-a}, \eta^{(m+1)}(P_{\Lambda_\nu})) = \sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-i\delta} q^i$$

注意

- 定理中の第2式の右辺は level 1 の string function である。
- この定理は fundamental weight だけでなくさらに一般の dominant integral weight に対して拡張されている。

系

$$\begin{aligned}
 P(a|\Lambda_\nu) &:= \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \frac{\sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-i\delta} \cdot \chi^{-\langle a-i\delta, \rho \rangle}}{\sum_\mu \dim L(\Lambda_\nu)_\mu \cdot \chi^{-\langle \mu, \rho \rangle}}
 \end{aligned}$$

(系の証明)

定理を仮定して行う。

§9 例)

$$\begin{aligned}
 &\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\chi^{-\langle a, \rho \rangle} f_m(b-a, c-b; x^{m+1})}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', \rho \rangle} f_m(b-a', c-b; x^{m+1})}
 \end{aligned}$$



∴ に α は

$$m - (n+1) < m+1 - \nu + (n+1)\alpha \leq m$$

↑ は整数 → あり

$$\alpha = \frac{m + \nu - \nu_m}{n+1} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \nu_m \leq n \\ \nu_m \equiv \nu + m \pmod{n+1} \end{array}$$

∴ 以下から

$$w_m(P_{\Lambda_\nu}) = C_m(\nu_m) + \frac{|\Lambda_\nu|^2}{2}$$

↑  $T = \{10\}$  の  $m < +\infty$  の  $\epsilon$  子 vertex model の  
1D sum に 関する定理から

$$f_m(\gamma, \hat{\nu}) = q^{\frac{1}{2}|\gamma - \Lambda_\nu|^2 + C_m(\nu)} \cdot \begin{bmatrix} m \\ \gamma \end{bmatrix}$$

よって ∴  $\gamma = \Lambda_{\nu_m} - a$  とおけば

(定理 第 2 式の左辺)

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|\Lambda_{\nu_m} - a - \Lambda_{\nu_m}|^2 + C_m(\nu_m) - C_m(\nu_m) - \frac{|\Lambda_\nu|^2}{2}} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{\nu_m} - a \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_\nu|^2} \cdot \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{\nu_m} - a \end{bmatrix}$$

よって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{\nu_m} - a \end{bmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} (q)_{r_1} \cdots (q)_{r_m}}$$



$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} (q)_k = \varphi(q) \quad (F4)$$

$$(\text{定理の第2式左辺}) = q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2} \varphi(q)^{-n} \quad \square$$

$\chi_m$  と branching coefficient の関係についての定理を述べる。再び若干の準備としておく

### theta 函数

$$M \in \mathbb{R}_{>0}, \quad u, \mu \in \overline{\mathfrak{h}}^* = \sum_{j=1}^n \mathbb{C} \overline{\Lambda}_j \quad (\text{part 1 意})$$

$$\mathcal{Q} = \sum \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \sum \alpha_n, \quad \text{Im } \tau > 0$$

と 17 theta 函数

$$\Theta_{\mu, M}(u, \tau) := \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}} e^{\pi i \tau |\alpha + \frac{\mu}{M}|^2} \cdot e^{-2\pi i M \langle \alpha + \frac{\mu}{M}, u \rangle}$$

$$\Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) := \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{m+1}} \det(\omega) \Theta_{\omega(\mu), M}(u, \tau)$$

と 定 の 予 .  $\therefore$  以下 17 次 の 性 質 を 考

$$(i) \quad \Theta_{\omega(\mu), M}(0, \tau) = \Theta_{\mu, M}(0, \tau)$$

$$(ii) \quad \Theta_{\omega(\mu), M}^{(-)}(u, \tau) = \det(\omega) \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau)$$

$$(iii) \quad \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) = 0$$

$$\text{if } (\langle \mu, \theta \rangle - M) \prod_{i=0}^n \langle \mu, \alpha_i \rangle = 0, \quad \theta: \text{highest root of } A_n^{(1)}$$

∴  $u$  は  $\mathbb{Z}$  上のベクトル

$a$ : level  $l$  の dominant integral weight

$$L = l + n + 1$$

∴  $l \geq 0$  highest weight 表現  $L(a)$  の character は  $\chi_a$  と書かれる

$$\chi_a(z_1, \dots, z_n; q) = \frac{\Theta_{\frac{a+\bar{\rho}}{l}, L}(u, \tau)}{\Theta_{\frac{\bar{\rho}}{l}, n+1}(u, \tau)}$$

∴  $z_j$  は  $\mathbb{Z}$  上のベクトル。 ∴  $z_j =$

$$z_j = e^{2\pi i F_j \langle \alpha_j, u \rangle}$$

$$q = e^{2\pi i F \tau}$$

### branching coefficients

diagonal embedding

$$A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \supset \Delta(A_n^{(2)})$$

に従って、 $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  の  $\Delta(A_n^{(2)})$  に関する既約分解を考える。

$$\text{level of } \lambda = l-1$$

$$\text{level of } \mu = 1$$

∴ 現われる  $\lambda$  の表現の level  $l$

(level of  $\lambda$ ) + (level of  $\mu$ ) =  $l$  である。

	$A_n^{(1)}$	$\oplus$	$A_n^{(1)}$	$\supset$	$\Delta(A_n^{(1)})$
highest weight	$\bar{3}$		$\Lambda_0$		$a$
level	$l-1$		$1$		$l$

既約分解

$$L(\bar{3}) \oplus L(\Lambda_0) = \bigoplus_{a \in \Delta_+} \mathbb{C} \Lambda_{\bar{3} + \Lambda_0 + a} \oplus L(a)$$

$\mathbb{C} \Lambda_{\bar{3} + \Lambda_0 + a}$  は  $\Delta(A_n^{(1)})$  の highest weight  $a$  の vector の空間.

$\mathbb{C}$  character の言葉で書くと

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{3}}(z_1, \dots, z_n; q) \chi_{\Lambda_0}(z_1, \dots, z_n; q) \\ = \sum_{\substack{a \in \Delta_+ \\ a \equiv \bar{3} + \Lambda_0 \pmod{\theta}}} b_{\bar{3} + \Lambda_0 + a}(q) \chi_a(z_1, \dots, z_n; q) \end{aligned}$$

$b_{\bar{3} + \Lambda_0 + a}(q)$  は branching coefficient  
 $\Lambda_0$  は level 1 であるから

$$b_{\bar{3} + \Lambda_0 + a}(q) = \eta(\tau)^{-n} \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} \det(w) \Theta_{-L(\bar{3} + \bar{\rho}) + (L-1) \cdot w(\bar{a} + \bar{\rho}), L(L-1)}(0, \tau)$$

$$L = l + n + 1, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \varphi(q), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

$\eta(\tau)$  はよく知られた関数。 ( $\mathbb{C} \Lambda_{\bar{3} + \Lambda_0 + a}$  の上には Virasoro algebra が働く。特に  $n=1$  の

同値には  $c < 1$  の Virasoro algebra の既約指標  $\chi$  であることが知られている。

すなわち  $\gamma, \phi_m \in \mathbb{R}$  の  $\beta$  に定めておく

$$\gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) := \frac{|\xi + \rho|^2}{2(L-1)} + \frac{|\Lambda_\nu + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|a + \rho|^2}{2L} - \frac{|\rho|^2}{2(m+1)}$$

$$\begin{aligned} \phi_m &:= \gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) - \sum_{j=1}^m j H(P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j+2)}) \\ &= \gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) - \left\{ C_m(V_m) + \frac{1}{2} |\Lambda_\nu|^2 \right\} \end{aligned}$$

以上の準備のもとに

定理 (Face model,  $m \rightarrow \infty$ )

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} \chi_m(a, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)}) = b_{\xi, \Lambda_\nu} a(q)$$

$$\therefore P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j)} = \xi + \sigma^{j-1}(\Lambda_\nu) \quad (cf. §9)$$

系

$$P_a = \frac{b_{\xi, \Lambda_\nu} a(x^{n+1}) \chi_a(x, \dots, x; x^{n+1})}{\chi_\xi(x, \dots, x; x^{n+1}) \chi_{\Lambda_\nu}(x, \dots, x; x^{n+1})}$$

(定理の証明)

$$\begin{aligned} P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)} &= \xi + \Lambda_{\nu+m} = \xi + \Lambda_{\nu_m}, \quad P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)} = \xi + \Lambda_{\nu+m+1} \\ \text{よって} \end{aligned}$$

$$\chi_m(a, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)}) = \sum_{\omega \in W} \det(\omega) f_m(\xi + \Lambda_{\nu_m} + \rho - \omega(a + \rho), \widehat{V}_m)$$

2 は 17

$$f_m(\gamma, \hat{D}) = q^{\frac{1}{2}|\gamma - \Lambda_D|^2 + C_m(D)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

Γ から

$$X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{\omega \in W} \det(\omega) q^{\frac{1}{2}|\xi + \rho - \omega(a + \rho)|^2 + C_m(D_m)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

∴ 7"

$$\omega = t_\alpha \bar{\omega}, \quad \alpha \in \mathcal{Q}, \quad \bar{\omega} \in \mathfrak{S}_{m+1}$$

ε 対 ε

$$\begin{aligned} & |\xi + \rho - \omega(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - t_\alpha \bar{\omega}(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{\omega}(a + \rho) - L\alpha + \left(\frac{L}{2}|\alpha|^2 - \langle \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle\right)\delta|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}) - L\alpha|^2 - L|\alpha|^2 - 2\langle \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle \\ &= L(L-1) \left| \alpha - \frac{\xi + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L} \right|^2 - \frac{|\xi + \bar{\rho}|^2}{L-1} + \frac{|\bar{a} + \bar{\rho}|^2}{L} \end{aligned}$$

∴  $\mathcal{W}(\mathbb{E} \phi_m \varepsilon \langle \varepsilon \wedge \varepsilon \rangle$

$$\begin{aligned} & q^{\phi_m} X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)}) \\ &= \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{m+1}} \det(\omega) \sum_{\gamma \in \mathcal{Q} - \frac{\xi + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L}} q^{\frac{1}{2}L(L-1)|\gamma|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_D|^2 + \frac{|\Lambda_D + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|\rho|^2}{2(m+1)}} \begin{bmatrix} m \\ \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから、実際

$$\frac{1}{2} |\Lambda_\nu|^2 + \frac{|\Lambda_\nu + \rho|^2}{2(n+2)} = 0, \quad \frac{|\rho|^2}{2(n+1)} = \frac{1}{24}$$

であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} X_m(a, P_{3, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{5, \Lambda_\nu}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{\bar{w} \in \mathfrak{G}_{m+1}} \sum_{\tau \in \mathcal{Q}} q^{-\frac{\bar{z} + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{w}(a+\bar{\rho})}{L}} \det(w) q^{\frac{1}{2} L(L-1) |\tau|^2} \eta(\tau)^{-\frac{1}{24}}$$

$$= b_{3, \Lambda_\nu} a(q)$$



## References

- [1] Onsager, L., "Crystal Statistics I, A Two dimensional model with an order-disorder transition", Phys. Rev. vol 65, 3, Feb 1 117, (1944)
- [2] Yang, C. N., "The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model", Phys. Rev. vol 85, 5, Mar 1, 808-816 (1952)
- [3] Baxter, R. J., "Eight Vertex Model in Statistical Mechanics and One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain I II III", Ann. Phys, 76, 1-24, 25-47, 48-71, (1973)
- [4] Andrews, G. E., Baxter, R. J., Forrester, P. J., "Eight-Vertex SOS Model and Generalized Roger-Ramanujan-Type Identities", Jour. Stat. Phys, 35, 193-266 (1984)
- [5] Baxter, R. J., "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" Academic Press, London (1982)

- [6] Kac, V. G., "Infinite Dimensional Lie Algebra 2nd ed", Cambridge Univ. Press (1985)
- [7] Humphreys, J. E. "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, 2nd printing revised", GTM 9, Springer-Verlag (1972)
- [8] Pasquier, V. "Etiology of IRF Model", Comm. Math. Phys. 118, 357-364 (1988)
- [9] Jimbo, M., "A  $q$ -Difference Analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter Equation", Lett. Math. Phys. 10, 63-69 (1985)
- [10] Jimbo, M., "A  $q$ -Analogue of  $U(\mathfrak{gl}(N+1))$ , Hecke Algebra, and the Yang-Baxter Equations", Lett. Math. Phys. 11, 247-252 (1986)
- [11] Jimbo, M., "Quantum R Matrix for the Generalized Toda System", Comm. Math. Phys. 102, 537-547 (1986)
- [12] Drinfeld, V. G., "Quantum Groups", ICM Proceedings, Berkeley, 798-820 (1986)



- [13] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.  
 "Solvable Lattice Models", RIMS  
 preprint 590 (1987), to be published.
- [14] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Solvable  
 Lattice Models Related to the Vector  
 Representation of Classical Simple Lie Algebra",  
 Comm. Math. Phys., 116, 507-525 (1988)
- [15] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.  
 "Fusion of the Eight Vertex SOS Model",  
 Lett. Math. Phys., 12, 209-215 (1986)
- [16] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Symmetric  
 Tensors of the  $A_n$  Family", in Algebraic  
 Analysis, 253-266, Academic Press, London  
 (1988)
- [17] Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M.  
 "The  $A_n$  Face Models", Comm. Math  
 Phys. 119, 543-565 (1988)
- [18] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T. and Okado, M.,  
 "One-Dimensional Configuration Sums in  
 Vertex Models and Affine Lie Algebra  
 Characters", Lett. Math. Phys 17, 69-77 (1989)

- [19] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Solvable Lattice Models Whose States are Dominant Integral Weights of  $A_{n-1}^{(1)}$ ", Lett. Math. Phys 14, 123 - 131 (1987)
- [20] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, local height probabilities and theta function identities", Nucl. Phys. B290 [FS20], 231-273 (1987)
- [21] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, proof of the star-triangle relation and combinatorial identities", Adv. Stud. Pure. Math 16, 17-122 (1988)
- [22] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Local height Probabilities of Solvable Lattice Models: An  $A_{n-1}^{(1)}$  Family", Nucl. Phys B300 [FS22], 74-108 (1988)
- [23] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Paths, Maya diagrams and representations of  $\widehat{sl}(n, \mathbb{C})$ ", To appear in Adv. Stud Pure. Math 19

ここに挙げた reference は奇然の事から全く完全なものではない。

2次元の格子 model (2D Ising) が初めて厳密に解かれたのは、L. Onsager [1] であり、その LSP は C.N. Yang [2] に初めて公にされた。その後の現在の一連の研究の端緒と言えるものとして、Baxter [3], ABF [4] が挙げられる。[3] は eight-vertex model を調べ上げたものであり、[4] では face model, vertex-face 対応 (2つのものを異にする), restriction type が論じられる。CTM の解説とともに face model の LSP が求められている。(A<sup>11</sup> の vector 表現に対応する model. (か [4] では Lie algebraic picture ではない。)) [5] の Baxter の本は上の [1] から [4] type を解説した教科書である。

affine 及び classical Lie algebra とその表現論については教科書 [6], [7] と参照したい。

§2 の vertex-face 対応は Pasquier [2] に  
お任せである。

§3 の quantum R matrix と YBE に関しては  
多くの論文がある。ここでは Jimbo [9], [10],  
[11], Drinfeld [12] を挙げておく。

§4, §5, §6 の  $X_m^{||\#||}$  face model とその  
STR の証明 (restricted, unrestricted) は [14]  
にある。

§7 の fusion procedure は [16], [17] による。  
[16] では symmetric な場合のみ扱い、一般の  
表現については [17] で論じられている。

Corner Transfer Matrix については [4], [5]  
に解説がある。

LSP の計算は, face model については [20]  
[21], [22] ([22] は rank の高い場合), vertex  
model の face formulation は [18] で議論  
されている。

また path による表現の構成 (§11 定理 vertex  
 $m \rightarrow \infty$ ) の詳細については [23] などを見らLTIい。