

水の波線形固有値問題の境界要素計算

電気通信大学電気通信学部情報工学科
牛島照夫 (Ushijima, Teruo)
若松宏明 (Wakamatsu, Hiroaki)

0. 要旨

標題にある固有値問題を、境界要素法で離散化する。長方形領域の場合に得られた離散化問題に対して行なった数値計算の結果を報告する。固有値と固有ベクトルの収束率の数値的測定結果を示す。さらに固有値の相対誤差の挙動のモードおよびメッシュ依存性に関する数値結果を示す。

一定要素および線形要素を用いた境界要素計算と区分一次連続要素を用いた有限要素計算とを比較した。モード毎の収束率は、境界要素法と有限要素法とは、おおむね同程度であるが、モードに関して大域的な収束性は、境界要素法が、優れているようにみられ、その中でも一定要素を用いた場合が、優位にあるように観測された。

1. ラプラス方程式の境界積分方程式への変換

平面内の有界領域 Ω で調和な u が、 Ω の境界 Γ で、境界値 ϕ をとり、その外向き法線導関数 $\partial u / \partial n$ の値は、 q であるとする。 :

$$(\epsilon) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

対数ポテンシャルを $E(x, y)$ とし、その境界点 $x \in \Gamma$ における外向き法線導関数を $D(x, y)$ とする。 :

$$E(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y,$$

$$D(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial n_x} E(x, y), \quad x \in \Gamma, y \in \bar{\Omega}, x \neq y.$$

点 x から領域 Ω を見込む角を $\alpha(x)$ とする。

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2\pi & : x \in \Omega, \\ \pi & : x \in \Gamma, \text{ かつ } \Gamma \text{ は, } x \text{ の近傍でなめらか,} \end{cases}$$

である。

条件 (ε) は、次の境界積分方程式 (β) の形に書けることはよく知られている。

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) \phi(x) + \oint_{\Gamma} \phi(y) E(y, x) d\Gamma_y \\ \quad = \oint_{\Gamma} q(y) D(y, x) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \\ \\ u(x) = \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{\Gamma} \phi(y) E(y, x) d\Gamma_y \right. \\ \quad \left. + \int_{\Gamma} q(y) D(y, x) d\Gamma_y \right), \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

ここで、 \oint は、主値積分であり、 $d\Gamma_y$ は、変数 y に関する線素である。

2. 水の波線形固有値問題

領域 Ω は、 $x_1 - x_2$ 平面の下半平面 $\{(x_1, x_2) : x_2 < 0\}$ にあり、境界 Γ の一部 Γ_0 は、 x_1 軸に含まれるものとし、残りの境界を Γ_1 とする (図1)。

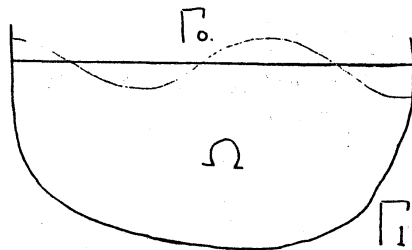


図1 水域 Ω

考える固有値問題は、

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \lambda \Phi \quad \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

をみたす自明でない固有値と固有関数の対 (λ, Φ) を求める問題に帰着される。

この固有対 $\{\lambda, \Phi\}$ に対して,

$$\phi = \sin(\omega t) \Phi, \quad \omega = \sqrt{g\lambda}, \quad g \text{ は, 重力加速度,}$$

とおく. 無限小振幅仮定の下での線形化重力波理論 (Stoker [1] 等参照) の教えるところによれば, ϕ は, x_3 軸に関して一様で, その断面が Ω である水域において, 水の運動が, x_3 方向によらない場合の定常運動をしている水の流速のポテンシャル関数である. 重力は, x_2 軸に沿って上から下に向かって働くものとしている. このとき, 水面の変位 ζ は, 基準水面を Γ_0 としたとき,

$$\zeta = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sqrt{\lambda/g} \cdot \cos(\omega t) \Phi$$

で与えられるとされている.

さて, Ω は長方形領域:

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, -h < x_2 < 0\}$$

であるとする. 自然数 $M = 0, 1, 2, \dots$ と, 非零実数 A に対して,

$$m = M\pi/a,$$

$$\lambda = m \cdot \tanh(mh),$$

$$\Phi = A \cdot \cosh(m(x_2+h)) \cos(mx_1)$$

とおくと, 対 $\{\lambda, \Phi\}$ は, 問題 (E) の固有対の全てを尽くしている.

3. 境界要素法により離散化された固有値問題

条件 (ε) と (β) の同値性によって, 固有値問題 (E) は, 次の形の境界積分方程式に対する固有値問題 (B) に変換される:

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x)\Phi(x) + \oint_{\Gamma} \Phi(y)E(y,x) d\Gamma_y \\ = \lambda \oint_{\Gamma_0} \Phi(y)D(y,x) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma. \end{array} \right.$$

選点法による (B) の離散化問題を記述するために, 空間 $L^2(\Gamma)$ の有限次元部分空間 X_h を固定する. その基底 $\{\omega_j : 1 \leq j \leq L\}$ を固定し, X_h の元 Φ_h を

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^L \Phi^j \omega_j, \quad \Phi = (\Phi^j)_{1 \leq j \leq L} \in \mathbb{C}^L$$

のように表わす. 境界 Γ 上に, L 個の選点を固定し, その組を C_h とする:

$$C_h = \{x_j : x_j \in \Gamma, 1 \leq j \leq L\}.$$

近似空間 X_h と選点の組 C_h に対応する (B) の近似問題として、境界要素離散化固有値問題 (B_h) が定まる：

$$(B_h) \left\{ \begin{aligned} & \alpha(x_j) \Phi_h(x_j) + \oint_{\Gamma} \Phi_h(y) E(y, x_j) d\Gamma_y \\ & = \lambda_h \oint_{\Gamma_0} \Phi_h(y) D(y, x_j) d\Gamma_y, \quad 1 \leq j \leq L. \end{aligned} \right.$$

ここで、影響係数 A_{jk} と B_{jk} を

$$A_{jk} = \alpha(x_j) \omega_k(x_j) + \oint_{\Gamma_0} \omega_k(y) D(y, x_j) d\Gamma_y,$$

$$B_{jk} = \oint_{\Gamma} \omega_k(y) E(y, x_j) d\Gamma_y$$

によって定める。記法を簡単にするために、ある自然数 $N < L$ に対して、

$$\text{supp}(\omega_k) \cap \Gamma_0 = \emptyset, \quad N < k \leq L$$

であるとする。このとき (B_h) は、次の線形固有値問題 (E_h) と同値である：

$$(E_h) \quad \sum_{k=1}^L A_{jk} \Phi^k = \lambda \sum_{k=1}^N B_{jk} \Phi^k, \quad 1 \leq j \leq L.$$

L 次正方行列 $A = (A_{jk})_{1 \leq j, k \leq L}$ を、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

のように表わす。ここで、 A_{11} は N 次の、 A_{22} は $L - N$ 次の正方行列であり、 A_{12} は $N \times (L - N)$ の、 A_{21} は、 $(L - N) \times N$ の長方形行列である。

行列 A_{11} と A_{21} に対応して、行列 B_{11} と B_{21} を影響係数 $(B_{jk})_{1 \leq j, k \leq L}$ から作り、

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、 (E_h) は、

$$A\Phi = \lambda B\Phi$$

と書ける。ここで、 A_{22}^{-1} の存在を仮定して、

$$A = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21},$$

$$B = B_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21},$$

$$\Phi = (\Phi^j)_{1 \leq j \leq N}$$

とおくと、 (E_h) は、一般固有値問題 (E) :

$$(E) A\Phi = \lambda B\Phi$$

となる。(E_h)から(E)を導く過程は、いわゆる静的縮約法である。

固有値問題(E)は、固有対 $\{\lambda, \Phi\} = \{0, 1\}$ をもつ。このことから、(B)も固有対 $\{\lambda, \Phi\} = \{0, 1\}$ をもつ。従って、 X_h が定数関数を含んでいるならば、(B_h)も、固有対 $\{\lambda, \Phi\} = \{0, 1\}$ をもち、(E)もそうである。そこで、 $(A+B)^{-1}$ の存在を仮定して、(E)を

$$(F) (A+B)^{-1}B\Phi = \mu\Phi, \quad \mu = 1/(\lambda+1)$$

の形に変形して、標準固有値問題を得る。

数値計算においては、原点移動つきQR分解法(戸川[2])によって(F)の固有値 μ を求め、 $\lambda = 1/\mu - 1$ により(E)の固有値を求め、逆反復法より固有ベクトルを求めた。

使用した逆反復法を以下に記す。問題(E)の単純固有値 λ の十分良い近似値 $\tilde{\lambda}$ がわかっているとき、次の反復計算を行なう。

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} (1, \dots, 1)^T,$$

$$(A - \tilde{\lambda}B)\Phi_{n+1/2} = B\Phi_n,$$

$$\Phi_{n+1} = \frac{\Phi_{n+1/2}}{\|\Phi_{n+1/2}\|_{\mathbb{R}^N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

近似値 $\tilde{\lambda}$ として、QR法による固有値の計算値を用い、収束判定条件として、 $\|\Phi_{n+1} - \Phi_n\|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon p s$ を用いた。

4. 有限要素法の適用

前報告[3]に述べたことを再録する。固有値問題(E)を弱形式で記述するために、関数空間 $V = H^1(\Omega)$ とその有限次元部分空間 V_h を考える。定数関数は、 V_h に含まれるものとする。二次形式 $a(u, v)$ 、 $b(u, v)$ を、

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$b(u, v) = \int_{\Gamma} u \cdot v \, d\Gamma$$

によって定める。問題(E)の弱形式表現(II)は、

$$(II) \begin{cases} a(\phi, v) = \lambda \cdot b(\phi, v), \quad v \in V, \\ \{\lambda, \phi\} \in \mathbb{R} \times \{V - \{0\}\}, \end{cases}$$

である。この問題のガレルキン式近似問題は、

$$(\Pi_h) \begin{cases} a(\phi_h, v_h) = \lambda_h \cdot b(\phi_h, v_h), & v_h \in V_h, \\ \{\lambda_h, \phi_h\} \in \mathbb{R} \times \{V_h - \{0\}\}, \end{cases}$$

である。ここで、 $\{w_j: 1 \leq j \leq J\}$ を V_h の基底とし、 $\phi_h \in V_h$ を、

$$\phi_h = \sum_{j=1}^J \Phi^j w_j, \quad \Phi = (\Phi^j)_{1 \leq j \leq J}$$

と表わすことにより、 ϕ_h と Φ を対応させることにすると、 (Π_h) は、一般固有値問題：

$$(\Pi) \begin{cases} A\Phi = \lambda B\Phi, \\ \{\lambda, \Phi\} \in \mathbb{R} \times \{\mathbb{R}^J - \{0\}\}, \end{cases}$$

と表現される。

ここで、 J 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq J}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq J}$ において、

$$a_{ij} = a(w_j, w_i),$$

$$b_{ij} = b(w_j, w_i), \quad (1 \leq i, j \leq J)$$

である。 A, B は、対称行列である。実際の数値計算においては、問題 (Π) を静的に縮約した問題 (E) を解く。これを記述するために、 $X = L^2(\Gamma_0)$ とし、 γ_0 を V の元 v の Γ_0 上での境界値をとる作用素とする：

$$\gamma_0(v) = v|_{\Gamma_0}, \quad v \in V.$$

空間 V_h の γ_0 による像を X_h とおく。 $\omega_j = \gamma_0(w_j)$ とする。簡単のために、自然数 $N < J$ に対して、 $\{\omega_j: 1 \leq j \leq N\}$ が X_h の基底であるとする。 N 次正方行列 A_0, M , $J - N$ 次正方行列 A_1 , $(J - N) \times N$ 次長方形行列 A_2 が存在して、

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_2^T \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と表わせる。 A_1 は、正則である。

$$A = A_0 - A_2^T A_1^{-1} A_2$$

とおく。 X_h の元 Φ_h を

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^N \Phi^j \omega_j, \quad \Phi = (\Phi^j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$$

と表わすことにより、関数 Φ_h と N ベクトル Φ を対応させる。このとき、

$$(E) \begin{cases} A\Phi = \lambda M\Phi, \\ (\lambda, \Phi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N - \{0\}), \end{cases}$$

が、(II) を縮約した問題である。

さて、(E) の固有値の全体を

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

のように整列することができる。重複固有値は、その重複度だけ繰り返して並べるものとする。問題 (E) の固有値についても、

$$\lambda_{h0} = 0 < \lambda_{h1} \leq \lambda_{h2} \leq \dots \leq \lambda_{h(N-1)}$$

のように整列することができる。

領域 Ω は、凸多角形であるとし、準一様な三角形分割の族 \mathcal{T}_h から区分一次連続な要素で作られた有限要素空間を V_h とする。このとき、 $h \rightarrow 0$ の近くで

$$\lambda_j \leq \lambda_{hj} \leq \lambda_j + O(h^2)$$

なる評価を得る。又、 λ_j は単純固有値であるとする、 λ_j に附随する固有関数 Φ_j と λ_{hj} に附随する固有関数 Φ_{hj} が、

$$\|\Phi_j\|_{L^2(\Gamma_0)} = \|\Phi_{hj}\|_{L^2(\Gamma_0)} = 1$$

$$(\Phi_{hj}, \Phi_j)_{L^2(\Gamma_0)} \geq 0$$

をみたすように選ばれているならば、

$$\|\Phi_{hj} - \Phi_j\|_{L^2(\Gamma_0)} = O(h^{3/2})$$

と評価されることが知られている。

5. テスト問題と計算結果

長方形領域 $\Omega = (0, 1) \times (-0.1, 0)$ において、 $\Gamma_0 = (0, 1) \times \{0\}$ 、 $\Gamma_{10} = \{0\} \times (-0.1, 0)$ 、 $\Gamma_{11} = (0, 1) \times \{-0.1\}$ 、 $\Gamma_{12} = \{1\} \times (-0.1, 0)$ とする。自然数 N_1 に対して、 $N = 10 \times N_1$ とおく。 Γ_0 と Γ_{11} を N 等分、 Γ_{10} と Γ_{12} を N_1 等分することによって、境界 Γ は、等長の線分 γ_j ($1 \leq j \leq L$, $L = 2(N + N_1)$) の和になる。

高々 k 次の多項式の全体を P_k とし、 Γ 上の連続関数の全体を $C(\Gamma)$ とする。この報告では、

$$X_h = \{\Phi_h : \Phi_h|_{\gamma_j} \in P_0, 1 \leq j \leq L\},$$

$$C_h = \{x_j : x_j \text{ は } \gamma_j \text{ の中点}, 1 \leq j \leq L\}$$

とにおいて得られる (B_h) を、一定要素近似問題とし、BEM0 と略すことにし、

$$X_h = \{\Phi_h \in C(\Gamma) : \Phi_h|_{\gamma_j} \in P_1, 1 \leq j \leq L\},$$

$$C_h = \{x_j : x_j \text{は } \gamma_j \text{の端点, } 1 \leq j \leq L\}$$

とにおいて得られる (B_h) を、線形要素近似問題とし、BEM1と略す。BEM1における選点をもとにして、 Ω の中にはられる格子から定まる正則な三角形分割、いわゆるフリードリックス・ケラー分割にもとづいて作られる区分一次連続な有限要素空間 V_h をもとにして得られる (Π_h) を有限要素近似問題とし、FEMと略す。BEM0、BEM1とFEMにおける選点および要素分割の配置を、それぞれ、図2、図3および図4に示す。

$N=20, 30, 50, 100, 200$ に対して数値計算を実施した。計算機は、電気通信大学情報処理センター HITAC M260Dを使用し、算法言語はFORTRAN77を使用し、倍精度演算で計算した。

図2 BEM0に
おける選点配置

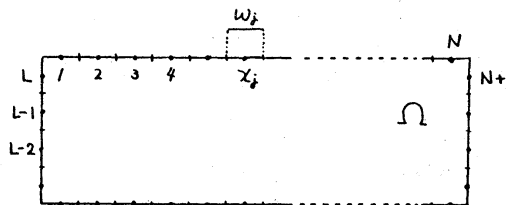


図3 BEM1に
おける選点配置

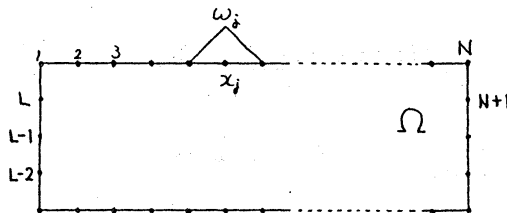
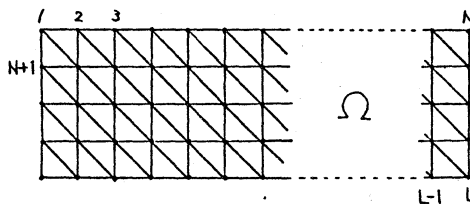


図4 FEMに
おける要素分割



固有値のモード毎収束状況

$h = 1/N$ として、近似固有値-真の固有値 $= \lambda_h - \lambda$ を、モード $M=1, 2, 3$ に対して作図したものが、図5 (BEM0)、図6 (BEM1)、図7 (FEM) である。

BEM0 に対して

$$\lambda_h - \lambda = O(h^{9/5}),$$

BEM1 および FEM に対して

$$\lambda_h - \lambda = O(h^2)$$

のように観測された。FEMの場合は、4節でのべた事前評価と整合している。

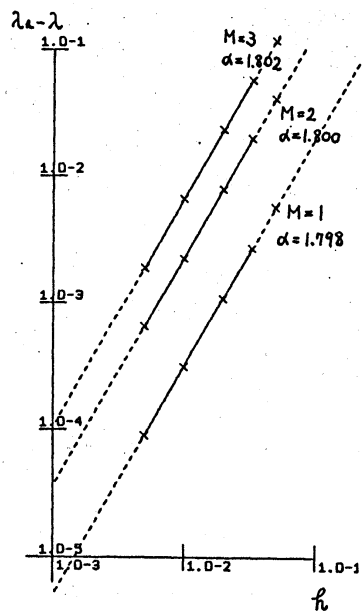


図5 固有値の収束率 (BEM0)

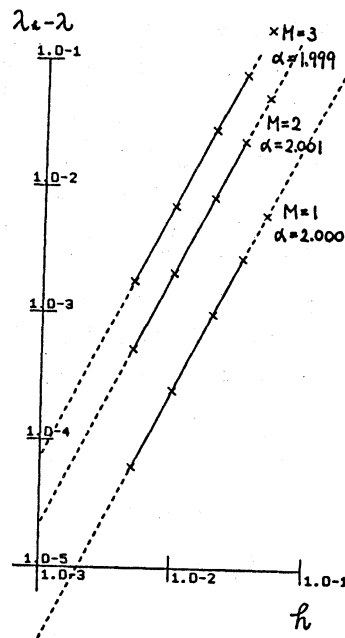


図6 固有値の収束率 (BEM1)

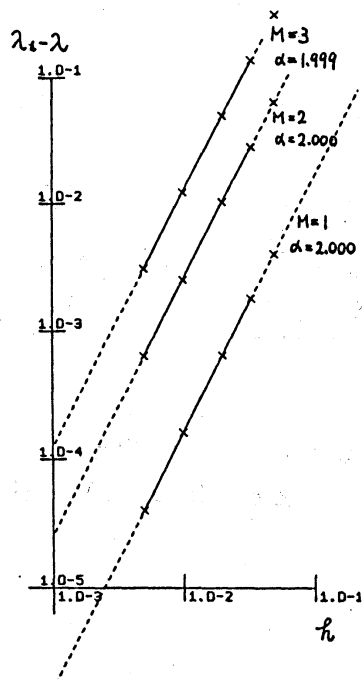


図7 固有値の収束率 (FEM)

固有値の相対誤差の挙動

相対誤差の挙動を見るために、刻み $h = 1/N$ を固定して、モード M 毎に比：

$$\rho_h(M) = \frac{\lambda_h(M)}{\lambda(M)}, \quad 1 \leq M \leq MMAX$$

を、各近似問題毎に算出してみた。BEM0においては、 $MMAX = N - 1$ 、BEM1とFEMにおいては、 $MMAX = N$ である。図8に、 $N = 200$ のときの $\rho_h(M)$ の挙動を、3種の近似法をまとめて図示した。同じ図を縦軸方向を5倍したものが、図10である。図9と図11は、 $N = 100$ のときの図8と図10に対応するものである。図8に対応する数値データを、表1、表2と表3に、それぞれ、BEM0、BEM1とFEMの場合に示した。

これらの図と表から、

- (1) BEM0、BEM1とも、FEMに比し、広帯域で相対誤差が小さい。
- (2) (1)の性質は、特にBEM0で顕著である。 $N = 200$ の場合、全帯域の15%以上のところで、相対誤差1%以下であり、90%以上のところで、10%以下である。
- (3) BEM0においては、高次モードでは、 $\lambda_h(M) < \lambda(M)$ であり、FEMで保証されている $\lambda_h(M) \geq \lambda(M)$ と異なっている。
- (4) 横軸を、 N を1として正規化した場合、グラフの概形には、 N 依存性が、見られない。すなわち、 $\tilde{\rho}_N(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) を、

$$\tilde{\rho}_N\left(\frac{M}{N}\right) = \rho_{1/N}(M), \quad 1 \leq M \leq MMAX$$

をみたすような、たとえば、折線関数とすると、区間 $[0, 1]$ で一様に、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_N(x) = \tilde{\rho}(x)$$

となるような $\tilde{\rho}(x)$ の存在が、示唆される。ちなみに、 $\rho_{1/100}(M)$ と $\rho_{1/200}(2M)$ とを、 $M = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ において、比較すると、BEM0、BEM1及びFEMのそれぞれで、10進数値表現の最初から少なくとも3桁は一致している。したがって、ここでの図8と図9、図10と図11におけるグラフは、それぞれ完全に重なってしまう。

- (5) $N = 200$ における絶対誤差に関しては、 $M = 1$ のとき、FEM、BEM1、BEM0の順に大きくなり、 $M = 2$ のとき、BEM1、BEM0、FEMの順に大きくなる。しかし、 $M \geq 3$ では、BEM0、BEM1、FEMの順に大きくなるのが、表1、2、3から読み取れる。

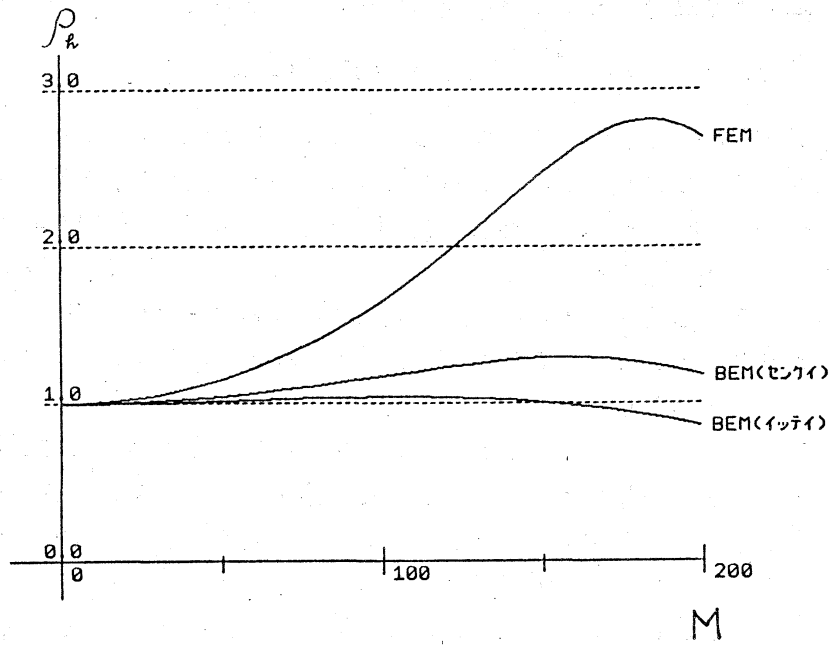


図8 固有値の相対誤差 ($N=200$)

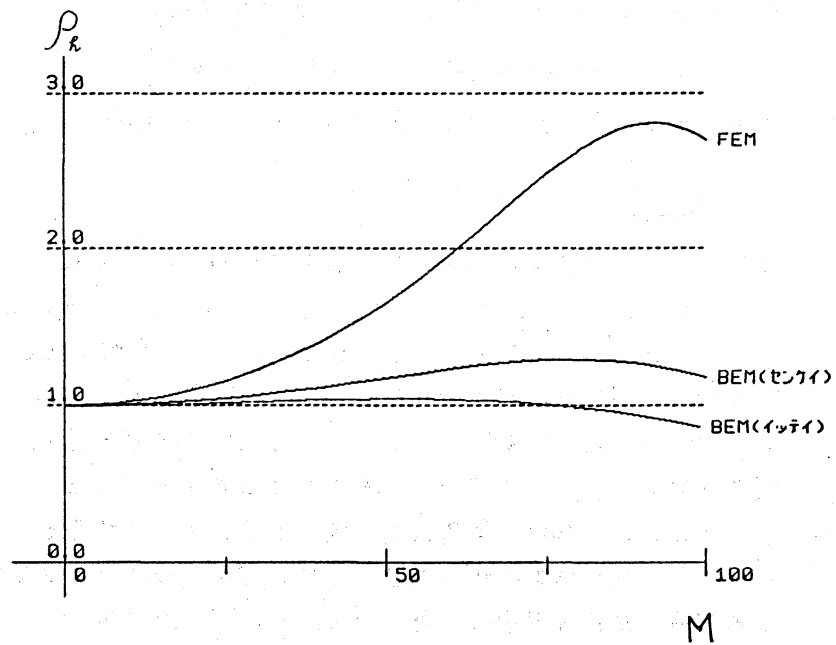


図9 固有値の相対誤差 ($N=100$)

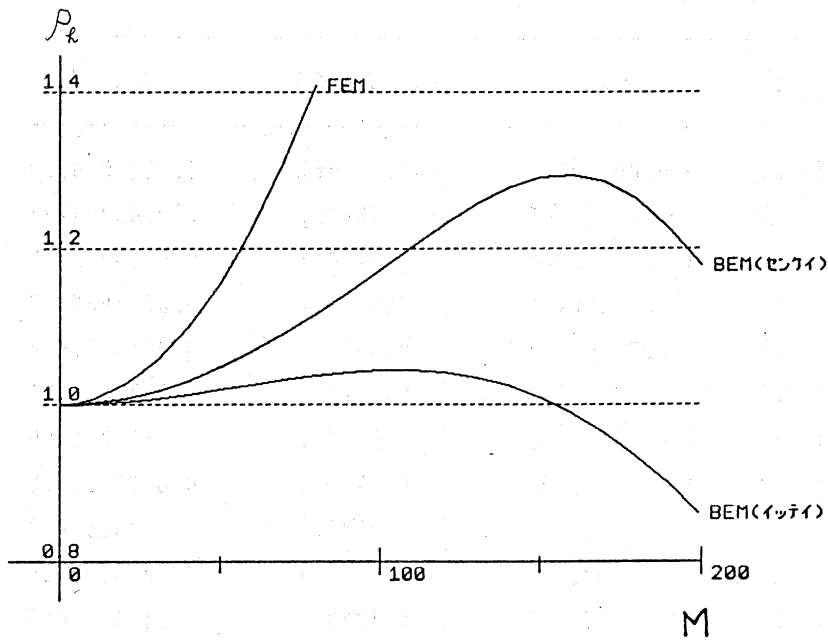


図10 固有値の相対誤差 (N=200, ズーム)

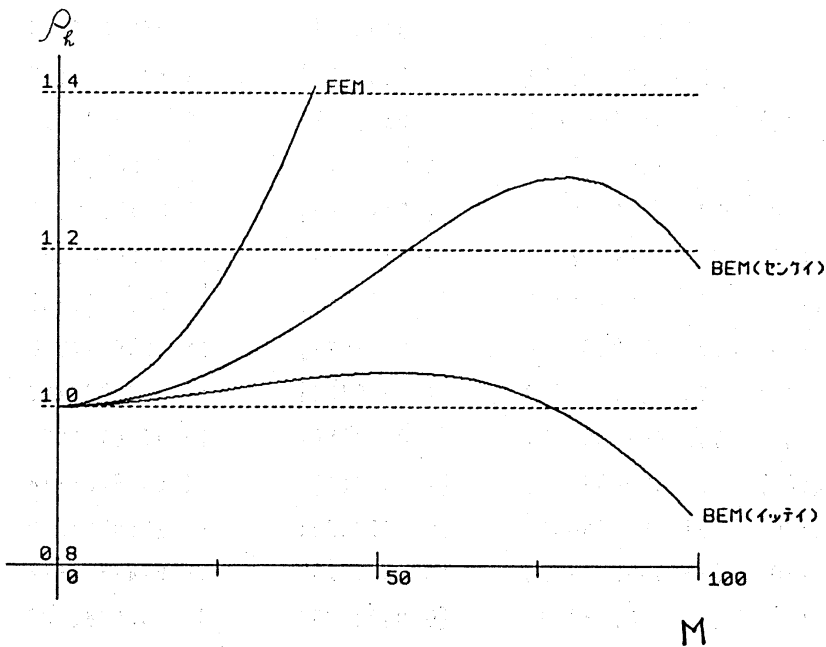


図11 固有値の相対誤差 (N=100, ズーム)

表1 固有値の相対誤差 (BEMO, N=200)

M	λ_h	$\rho_h = \lambda_h / \lambda$	$\lambda_h - \lambda$
(0)	0.000000000	[*****]	0.000000000
(1)	0.9558137805	[1.0000946]	0.0000904238
(2)	3.4997149059	[1.0001861]	0.0006510623
(3)	6.9419096109	[1.0002728]	0.0018933110
(4)	10.6872003828	[1.0003835]	0.0040973964
(5)	14.4137531378	[1.0004969]	0.0071579381
(6)	18.0114029369	[1.0006323]	0.0113812590
(7)	21.4734501032	[1.0007770]	0.0166716468
(8)	24.8284927856	[1.0009439]	0.0234145610
(9)	28.1086098856	[1.0011230]	0.0315307096
(10)	31.3402277618	[1.0013233]	0.0414174055
(20)	63.0932303750	[1.0041670]	0.2618155340
(30)	95.0351569350	[1.0083543]	0.7873785548
(40)	127.3678845226	[1.0135614]	1.7041783821
(50)	160.1325700429	[1.0194356]	3.0529373634
(60)	193.3190394671	[1.0255894]	4.8234802517
(70)	226.8594688841	[1.0315945]	6.9479831328
(80)	260.6208740883	[1.0369775]	9.2934618011
(90)	294.3976048526	[1.0412185]	11.6542660295
(100)	327.9049385668	[1.0437538]	13.7456732078
(110)	360.7751983277	[1.0439847]	15.2000064328
(120)	392.5580962198	[1.0412927]	15.5669777890
(130)	422.7271178950	[1.0350632]	14.3200729283
(140)	450.6935886281	[1.0247159]	10.8706171255
(150)	475.8294681702	[1.0097415]	4.5905701318
(160)	497.4988450935	[0.9897425]	-5.1559794809
(170)	515.0965977489	[0.9644726]	-18.9741533614
(180)	528.0909887060	[0.9338699]	-37.3956889402
(190)	536.0654622322	[0.8980786]	-60.8371419499
(199)	538.7271380122	[0.8617195]	-86.4498000521

表2 固有値の相対誤差 (BEM1, N=200)

M	λ_h	$\rho_h = \lambda_h / \lambda$	$\lambda_h - \lambda$
(0)	0.0000000000	[*****]	0.0000000000
(1)	0.9557859030	[1.0000654]	0.0000625463
(2)	3.4995915683	[1.0001508]	0.0005277248
(3)	6.9418130682	[1.0002589]	0.0017967682
(4)	10.6873019501	[1.0003930]	0.0041989637
(5)	14.4146901879	[1.0005619]	0.0080949881
(6)	18.0138387978	[1.0007676]	0.0138171198
(7)	21.4785752485	[1.0010158]	0.0217967922
(8)	24.8374470183	[1.0013049]	0.0323687937
(9)	28.1230520916	[1.0016374]	0.0459729156
(10)	31.3617322824	[1.0020104]	0.0629219261
(20)	63.3292227767	[1.0079229]	0.4978079357
(30)	95.9076976262	[1.0176123]	1.6599192461
(40)	129.5492789862	[1.0309204]	3.8855728456
(50)	164.5708572485	[1.0476906]	7.4912245690
(60)	201.2620451823	[1.0677283]	12.7664859669
(70)	239.8721720198	[1.0907669]	19.9606862685
(80)	280.5886461391	[1.1164268]	29.2612338519
(90)	323.5053301846	[1.1441661]	40.7619913615
(100)	368.5794929167	[1.1732250]	54.4202275577
(110)	415.5771623486	[1.2025665]	70.0019704537
(120)	464.0094348139	[1.2308233]	87.0183163831
(130)	513.0670116958	[1.2562639]	104.6599667291
(140)	561.5669903083	[1.2768023]	121.7440188057
(150)	607.9335508280	[1.2900751]	136.6946527895
(160)	650.2393842506	[1.2936102]	147.5845596763
(170)	686.3318979035	[1.2850955]	152.2611467932
(180)	714.0505746522	[1.2627187]	148.5638970061
(190)	731.4934560645	[1.2254821]	134.5908518825
(200)	740.3133965930	[1.1782454]	111.9948658750

表3 固有値の相対誤差 (FEM, N=200)

M	λ_h	$\rho_h = \lambda_h / \lambda$	$\lambda_h - \lambda$
(0)	0.000000000	[*****]	0.000000000
(1)	0.9557638947	[1.0000424]	0.0000405381
(2)	3.4997031868	[1.0001827]	0.0006393432
(3)	6.9431165344	[1.0004467]	0.0031002345
(4)	10.6922059113	[1.0008521]	0.0091029249
(5)	14.4267970670	[1.0014023]	0.0202018672
(6)	18.0376776229	[1.0020920]	0.0376559449
(7)	21.5193004966	[1.0029139]	0.0625220403
(8)	24.9008703908	[1.0038618]	0.0957921662
(9)	28.2155561371	[1.0049320]	0.1384769612
(10)	31.4904457121	[1.0061228]	0.1916353557
(20)	64.3847179805	[1.0247218]	1.5533031396
(30)	99.5038855768	[1.0557690]	5.2561071967
(40)	138.1699976160	[1.0995219]	12.5062914754
(50)	181.6320300646	[1.1563054]	24.5523973851
(60)	231.2026266507	[1.2265680]	42.7070674353
(70)	288.2759970237	[1.3108729]	68.3645112724
(80)	354.3343710595	[1.4098517]	103.0069587723
(90)	430.9292969732	[1.5241006]	148.1859581501
(100)	519.6152422707	[1.6539867]	205.4559769117
(110)	621.8012224000	[1.7993225]	276.2260305051
(120)	738.4721963086	[1.9588583]	361.4810778778
(130)	869.7219798810	[2.1295470]	461.3149349143
(140)	1014.0505617233	[2.3055880]	574.2275902207
(150)	1167.4451477485	[2.4773955]	696.2062497100
(160)	1322.4323494134	[2.6308956]	819.7775248391
(170)	1467.5731323043	[2.7479002]	933.5023811941
(180)	1588.1470304446	[2.8084606]	1022.6603527984
(190)	1668.6750054872	[2.7955566]	1071.7724013051
(200)	1697.0562748487	[2.7009489]	1068.7377441307

固有ベクトルの収束状況

これを調べるために計算した量は、

$$E_h(M) = \left\| \frac{\Phi_{hM}}{\|\Phi_{hM}\|_{L^2(\Gamma_0)}} - \frac{\pi_h \Phi_M}{\|\pi_h \Phi_M\|_{L^2(\Gamma_0)}} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

である。ここで、 Φ_{hM} と、 Φ_M は、それぞれ、 (B_h) と (B) の第M固有ベクトルで、 $x=0$ において正になるようにとったものである。 $\pi_h \Phi_M$ は、各近似法に応じた Φ_M の補間関数であり、

$$\pi_h \Phi_M = \sum_{x_j \in C_h \cap \bar{\Gamma}_0} \Phi_M(x_j) \omega_j$$

で与えられる。 $M=1, 2, 3$ に対して、 $E_h(M)$ を、図12と図13に、それぞれ、BEM0とBEM1の場合を図示した。

BEM0のとき、 $E_h(M) = O(h^{4/3})$ 、

BEM1のとき、 $E_h(M) = O(h^2)$

のように観測された。

ちなみにFEMのときは、 $M=1, 2, 3$ 、 $h=2 \cdot 10^{-1}, 3 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1}$ に対して、

$$E_h(M) \leq 1 \cdot 10^{-13}$$

であった。

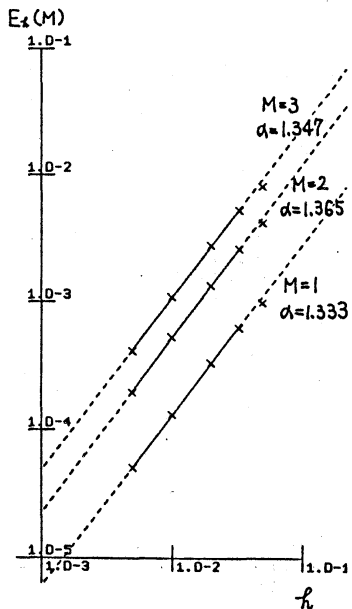


図12 固有ベクトルの収束率
(BEM0)

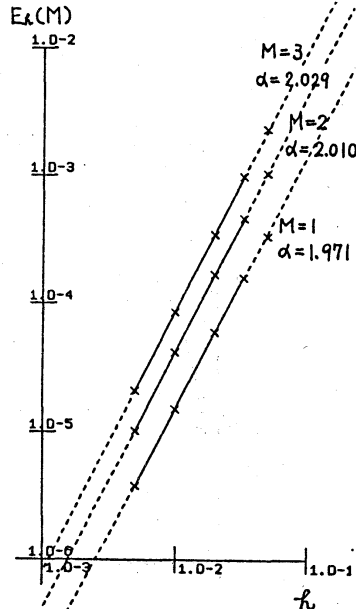


図13 固有ベクトルの収束率
(BEM1)

固有ベクトルの誤差のモード依存性

きざみ $h = 1/50$ に対して, $E_h(M)$ の M 依存性を図示したものが, 図 1 4 である.

BEM0 のとき, $E_h(M) < 0.5 \times 10^{-2}$, $1 \leq M \leq N-1$ であり,

$$E_h(M) \lesssim \begin{cases} 10^{-3} & : M=1, \\ 10^{-2} & : 2 \leq M \leq 6, \\ 10^{-1} & : 7 \leq M \leq 46, \\ 10^{-2} & : 47 \leq M \leq 49 \end{cases}$$

のように, 上に凸なグラフとなった.

BEM1 のとき, $E_h(M)$ は単調増加であり,

$$E_h(M) \lesssim \begin{cases} 0.6 \times 10^{-4} & : M=1, \\ 10^{-3} & : 2 \leq M \leq 5, \\ 10^{-2} & : 6 \leq M \leq 19, \\ 10^{-1} & : 20 \leq M \leq 40, \\ 10^0 & : 41 \leq M \leq 50 \end{cases}$$

であった.

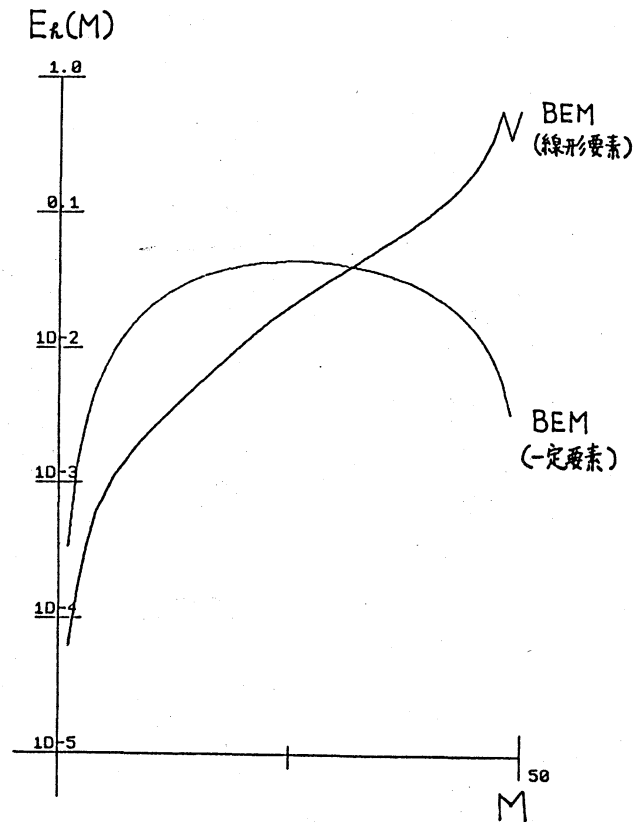


図 1 4 固有ベクトルの誤差のモード依存性

6. 結言

本報告で述べた数値計算結果を先験的に予測する理論解析はまだ出来ていないように思われる。例題の特殊性から、これらの結果から何らかの予想をたてる段階ではないが、これらは理論解析の難かしさと面白さを示唆している。もっと一般の領域における水の波問題に対し、理論的ならびに数値的に境界要素法の近似能力を追求することが課題であると感じる。特に固有値の相対誤差の挙動を数学的に記述できれば、境界要素法の利点、さらには一定要素の利点、に関して玲瓏たる境地に達することが出来るのではないかとの予感を持つ。これを実現するため、大域的な収束性を適切に記述する数学的な表現と手法を見つけたいと望んでいる。本報告の数値データの詳細は、若松 [4] にあることを附記する。

文献

- [1] J. J. Stoker, Water Waves, Interscience Publishers, New York, 1957.
- [2] 戸川隼人, マトリックスの数値計算, オーム社, 東京, 1986 (第1版, 1971).
- [3] 牛島照夫, 松井美保子, 青木篤, 水の波の線形問題について. 数値解析研究所講究録「境界要素法の数学的理論とその周辺」収録, 京都大学数理解析研究所, 近刊.
- [4] 若松宏明, 境界要素法による水の波固有値問題の数値計算, 電気通信大学情報数理工学科, 昭和63年度卒業論文.