

ある自由境界問題の数値計算

電通大 田端正久 (Masahisa Tabata)

電通大(院) 宮崎龍人 (Tatuhiro Miyazaki)

電通大(院) 森下 映 (Akira Morishita)

0. はじめに

自由境界を有する流れ問題では、流れに伴って変化する解析領域を追跡しなければならない^{1, 2, 3)}。その解析手法には、これまで、ラグランジュ座標系を使う方法とオイラー座標系を使う方法とが用いられてきた。我々は非圧縮粘性流体のある自由境界問題を”ミニ有限要素⁴⁾”を用いて、これら2つの座標系に基づいたスキームで解析を行う。

ミニ有限要素は、流速にバブル関数付き三角形1次要素、圧力に三角形1次要素を使う組合せである。我々は、この要素が自由境界問題の計算、特にラグランジュ有限要素近似に適していることを示す。

第1の方法であるラグランジュ有限要素近似では各時間ステップで流体粒子の運動を求め、すべての要素を粒子と伴に移

動させる。自由境界は粒子の動きに従って自然に近似される。第2の方法は、自由境界付近以外ではオイラー座標系に基づいて計算する。ナビエ・ストークス方程式をストークス方程式と移流方程式とに分解し、移流方程式を L^2 -安定な上流型有限要素法で解く^{5,6)}。自由境界をラグランジュ法で近似し、その近傍では要素の追加、削除を行う。

ラグランジュ有限要素近似では、時間発展に従い要素が変形する。計算終了時近くではその変形はかなり大きくなり得る。そこで、全計算時間を通して受ける要素変形を平均化するような、初期分割生成のアルゴリズムを示す。

数値例として圧縮成形問題⁷⁾を単純化して導いたモデル問題にこれらの方法を適用し、その有効性、特長を調べる。

1. 自由境界問題

時刻 t に流体の占めている空間領域を $\Omega(t)$ とする。 $\Omega(t)$ は R^2 で有界で、自由境界を表す未知関数 η ,

$$\eta: R^2 \times (0, T) \rightarrow R$$

によって

$$\Omega(t) = \{x \in R^2; \eta(x, t) > 0\} \quad (1)$$

と定義される。ここに T は時刻を表す正定数である。 $Q(T)$ を

$$Q(T) = \{(x, t); x \in \Omega(t), 0 < t < T\} \quad (2)$$

と定義する。 $Q(T)$ 上でナビエ・ストークス方程式

$$\frac{D u}{D t} - \nu \Delta u + \text{grad } p = f, \quad (3a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (3b)$$

が成立する。ここに $u: Q(T) \rightarrow R^2$, $p: Q(T) \rightarrow R$ はそれぞれ流速, 圧力を示す未知関数, ν は動粘性係数, f は外力, Δ はラプラス作用素である。(3a)式の D/Dt は物質微分

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \text{grad} \quad (4)$$

を示している。

境界で, 流速境界条件

$$u = g, \quad (5)$$

または, 応力境界条件

$$\sum_{j=1}^2 (-p \delta_{ij} + 2\nu D_{ij}(u)) n_j = 0, \quad i=1,2 \quad (6)$$

が課せられており, 未知関数 η は

$$\frac{D \eta}{D t} = 0 \quad (7)$$

を満たしている。ここに(5)式の g は与えられた関数, (6)式の δ_{ij} はクロネッカーのデルタ, D_{ij} は変形速度テンソル

$$D_{ij}(u) = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2 \quad (8)$$

である。

流速に対する初期条件と、初期形状 $\Omega(0)$ は与えられている。

自由境界問題では、流速 u 、圧力 p と同時に領域形状を与える η も未知関数である。

2. 数値解法

2. 1 ミニ有限要素

空間方向の離散化には混合型有限要素法を用いる。我々の使うミニ有限要素は、流速にバブル関数付き三角形1次要素、圧力に三角形1次要素を使う組合せである。

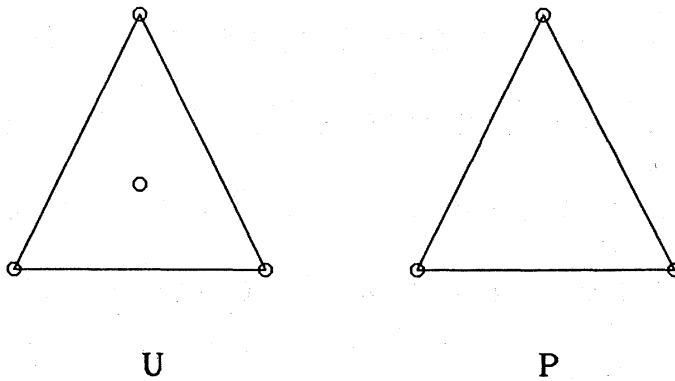


図 1. ミニ有限要素

バブル関数付き三角形1次要素は重心に節点を持つ要素で、基底関数 ϕ_i は三角形の頂点で

$$\phi_i = \lambda_i - 9 \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad (9a)$$

三角形の重心で

$$\phi_{ijk} = 27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k \quad (9b)$$

である。ここで $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ は面積座標である。この組合せは混合型有限要素近似において重要な役割を演じる Inf-Sup 条件を満足している⁴⁾。またバブル関数付き三角形1次要素は要素境界で線形である。この性質は次に述べるラグランジュ有限要素近似での要素移動に有用である。

2. 2 ラグランジュ有限要素近似

時間刻みを τ とし、時刻 $t = n\tau$ を t^n とする。時刻 t^n で、領域 $\Omega(t^n)$ 、その要素分割に現れる節点位置 x^n 、そこでの流速 u^n 、圧力 p^n が与えられているとき、次の時刻 $t^{n+1} (= t^n + \tau)$ で領域 $\Omega(t^{n+1})$ 、その要素分割に現れる節点位置 x^{n+1} 、そこでの流速 u^{n+1} 、圧力 p^{n+1} を求める。そのために中間流速 $u^{n+1/2}$ を導入する。これは x^n にあった粒子の τ 時刻後の位置(それを $x^{n+1/2}$ と表す)での流速である。 $(u^{n+1/2}, p^{n+1})$ を(3)式の離散化式、

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} - \nu \Delta u^{n+1/2} + \text{grad } p^{n+1} = f, \quad (10a)$$

$$\text{div } u^{n+1/2} = 0 \quad (10b)$$

で求める。 $x^{n+1/2}$ は u^n と $u^{n+1/2}$ を用いて

$$x^{n+1/2} = x^n + \tau \cdot \frac{u^n + u^{n+1/2}}{2} \quad (11)$$

で決定する。

x^n が三角形の頂点であるときは、(11)式で決まる $x^{n+1/2}$ を x^{n+1} とすればよい。しかし、図2に示すように、三角形の重心である x^n は(11)式によって x^{n+1} での三角形の重心には一般に移らない。ここに、下付き添え字 $v(i)$, $i=1, 2, 3$, は要素の頂点を、下付き添え字 b は要素の重心を意味している。そこで、

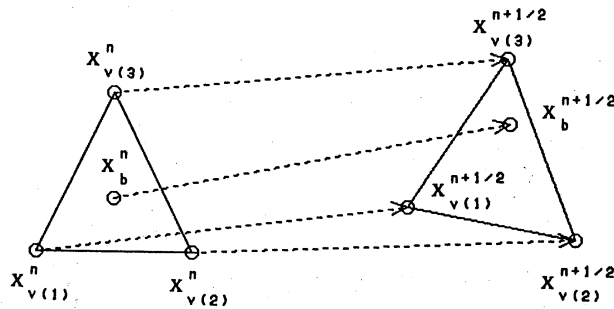


図 2. 節点にある粒子の移動

x^{n+1} を次の式に従って決める： x^{n+1} が三角形の頂点のときは

$$x_{v(i)}^{n+1} = x_{v(i)}^{n+1/2}, \quad i=1, 2, 3 \quad (12a)$$

x^{n+1} が三角形の重心のときは

$$x_b^{n+1} = \sum_{i=1}^3 x_{v(i)}^{n+1} / 3 \quad (12b)$$

とする。新しい位置 x^{n+1} での流速 u^{n+1} は

$$u^{n+1}(x^{n+1}) = u^{n+1/2}(F^{-1}(x^{n+1})) \quad (13)$$

で求める。ここで関数 F は、4点 $\{x_{v(i)}^n, i=1, 2, 3, x_b^n\}$ を4点 $\{x_{v(i)}^{n+1/2}, i=1, 2, 3, x_b^{n+1/2}\}$ に移すアイソパラメトリック変換、

$$F = x_{v(1)}^{n+1/2} \phi_{v(1)} + x_{v(2)}^{n+1/2} \phi_{v(2)} + x_{v(3)}^{n+1/2} \phi_{v(3)} + x_b^{n+1/2} \phi_b \quad (14)$$

である。(13)式によって、求められた流速 u^{n+1} は $\Omega(t^{n+1})$ での要素の頂点で $u^{n+1/2}$ と等しく、要素の重心では重心 x_b^{n+1} に移動してくる粒子の流速である。

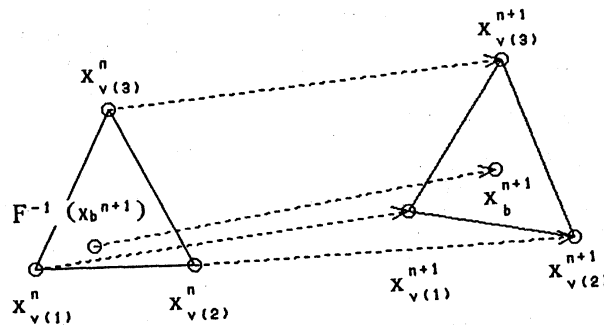


図 3. 新しく重心に移動してくる粒子

一般にアイソパラメトリック変換は、三角形を曲三角形に移す。例えば、三角形2次要素の場合、三角形を2つの2次曲線で囲まれた図形に変換する。しかしバブル関数付き三角形1次要素では、要素境界で基底関数が線形であるため、変換 F によって三角形は三角形に移される。このようにミニ有限要素はラグランジュ有限要素近似に適している。

(10) 式はストークス方程式の近似と形式上一致する。したがって、ミニ有限要素を用いた混合型近似で解くことができる。(10)式と(11)式によって自由境界を追跡することは、(7)式の自然な近似になっている。そのため未知関数 η は数値計算において陽には現れない。この方法では各時刻で全ての要素が移動する。それ故、各時刻で全体剛性行列を再計算する必要がある。

2. 3 オイラー座標系に基づく近似

この方法では、自由境界付近以外の節点位置は固定されている。ラグランジュの方法と違い、 u^n は固定されたオイラー座標で時刻 t^n での流速を示すために使う。自由境界上の節点はラグランジュ的に移動する。 $u^{n+1/2}$ はラグランジュ近似の流速であり、(10)式で求められる。この値が自由境界上の節点での流速となる。自由境界以外の節点での u^{n+1} の値は、 $u^{n+1/2}$ を使って物質微分から導れる式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\tau} + \text{div}(u^{n+1/2} u^{n+1/2}) = 0, \quad i=1, 2 \quad (15)$$

で求める。(10)、(15)式はナビエ・ストークス方程式のストークス部分と移流部分への分解と見ることもできる。(15)式の解法には保存型上流近似^{8,9)}から導かれる L^2 の意味で安定

な上流型スキム^{5,6)}を用いる。自由境界をラグランジュの方法と同様に(11)式により決定する。次の時刻の解析領域が決まり、繰り返し計算を行う。自由境界近傍で必要となる三角形分割は各時間ステップで次のように行う。最初に全解析領域を図10のように要素分割する。ある時刻 t での自由境界から、時刻 $t+\tau$ での自由境界を(11)式により求める。自由境界と鉛直または水平な要素境界線との交点を求める(図4)。初期分割上の節点で、この交点に近いものを図5のように自由境界上に移動する。自由境界を近似するために移動した節点は、自由境界が通過した後は、初期分割位置に戻る。このように、各時刻で要素の追加、削除が行われ得るので、全体剛性行列のサイズは一定でない。自由境界付近以外の要素剛性行列は不変であるので再計算する必要はない。再計算する必要があるのは自由境界付近のもののみである。

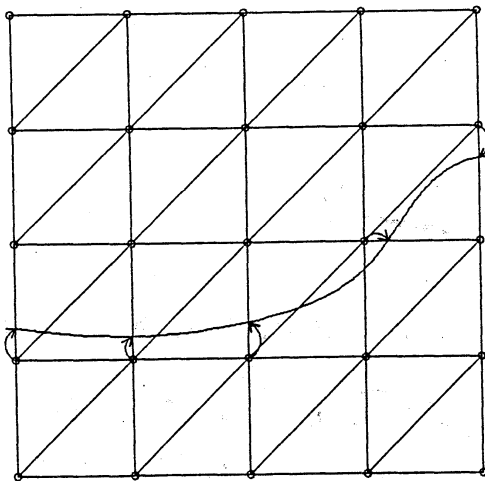


図 4. 初期分割と自由表面

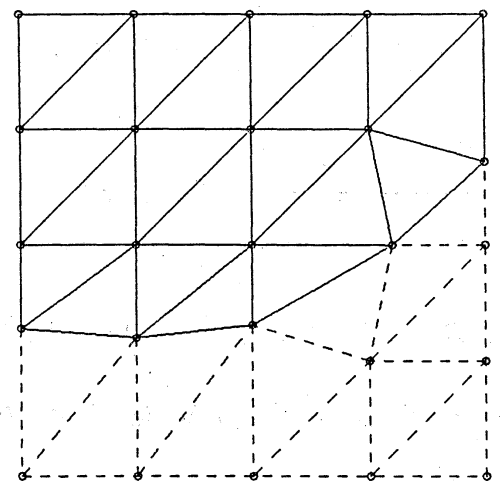


図 5. 自由表面に応じた要素分割

2. 4 ラグランジュ近似のための初期分割

ラグランジュ近似は、流体と共に要素が移動する。このため終了時刻付近では、大きく変形した三角形が要素分割に現れ、全体剛性行列の性質が悪くなる。そこで初期分割を工夫し、全計算時間で受ける要素変形を平均化することを試みた。

時刻 t での要素分割を $\{e(t)\}$ 、そこに現れる節点位置を $p_j(t)$ 、 $1 < j < N$ (ここで N は全節点数) とする。まず、ある初期分割 $\{e(0)\}$ で自由境界問題を解く。その計算終了時刻を \tilde{T} とすると、初期位置の粒子の移動関数 $\chi : (0, \tilde{T}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ がわかる。次に時刻 $\tilde{t} (\sim \tilde{T}/2)$ で、領域 $U \cup e(\tilde{t})$ を一様に再分割する (図6)。新しい要素分割を $\{\tilde{e}(\tilde{t})\}$ 、そこに現れる節点位置を

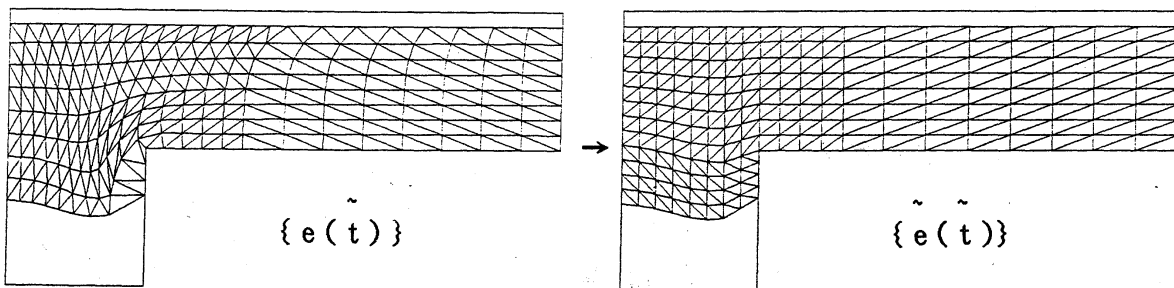


図 6. 再分割

$\tilde{p}_j(\tilde{t})$ とする。 $p_j(t)$ の初期位置 $p_j(0)$ を

$$\chi(\tilde{t}, q_j) = \tilde{p}_j(\tilde{t}) \quad (16)$$

を満たす q_j として求める。このように $\{\tilde{e}(\tilde{t})\}$ と同じ隣接関係

を持つ新しい初期分割 $\{\tilde{e}(0)\}$ が得られる。この初期分割 $\{\tilde{e}(0)\}$ を用いてラグランジュ有限要素近似を行えば、全計算時間の中頃である時刻 t 付近で要素分割が一様に近くなり、計算終了時にも要素があまり大きく変形しない。

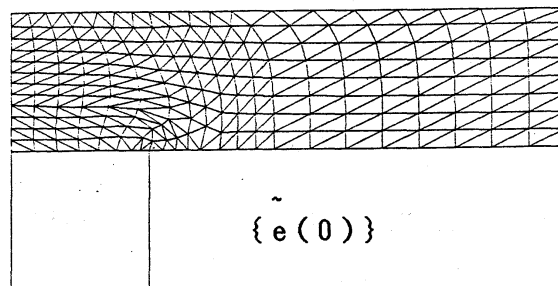


図 7. 新しい初期分割図

初期分割 $\{\tilde{e}(0)\}$ を用いたはじめの計算は仮計算であるので何らかの方法で近似計算ができればよい。たとえば、この計算にラグランジュ近似を用いると、関数 x は初期粒子の移動として直接計算される。

3. 数値例

圧縮成形問題⁷⁾から導かれる単純化したモデル問題⁵⁾を考える。対称性を考慮して解析領域は右半分とした。問題は無次元化してあり AB の長さは 1, BC, DE, EF の長さは $1/4$ である。流体は $t=0$ で斜線部に存在する。 $BCDEF$ は固定壁である。初期条件は $u^0 = 0$ とする。上面 AB では速度境界条件 $u=(0, c(t))$,

$$c(t) = \begin{cases} -50t, & 0 < t < 0.02 \\ -1, & 0.02 \leq t \end{cases} \quad (17a)$$

$$(17b)$$

を与え、流体を下に押し下げる。自由境界は初期にGDであり、応力境界条件を満たしている。他の境界ではすべり条件を課す。ラグランジュ有限要素近似、オイラー有限要素近似の初期分割図をそれぞれ図9、10に示す。時間刻み τ は0.0025、 ν ($=1/Re$)は0.1とした。自由境界が壁面に近付いたときは、粒子が壁面に到達する時刻を補間で求め、流体が壁面を越え

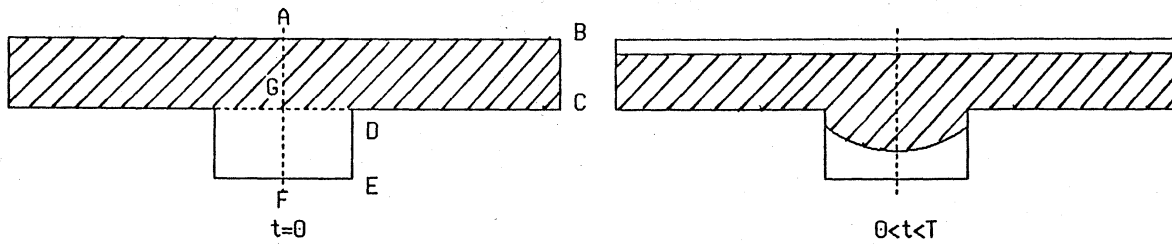


図 8. 問題設定

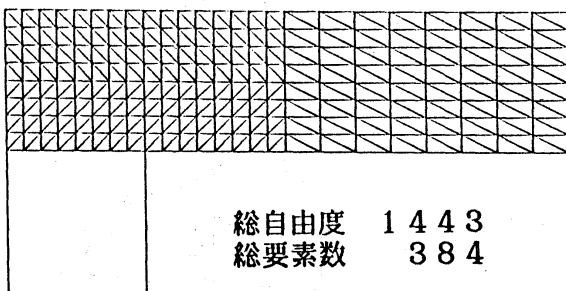


図 9. 初期分割図

(ラグランジュの方法)

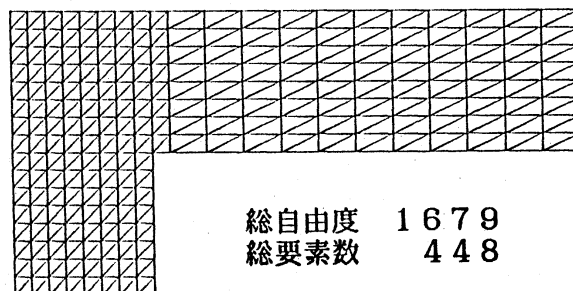


図 10. 初期分割図

(オイラーの方法)

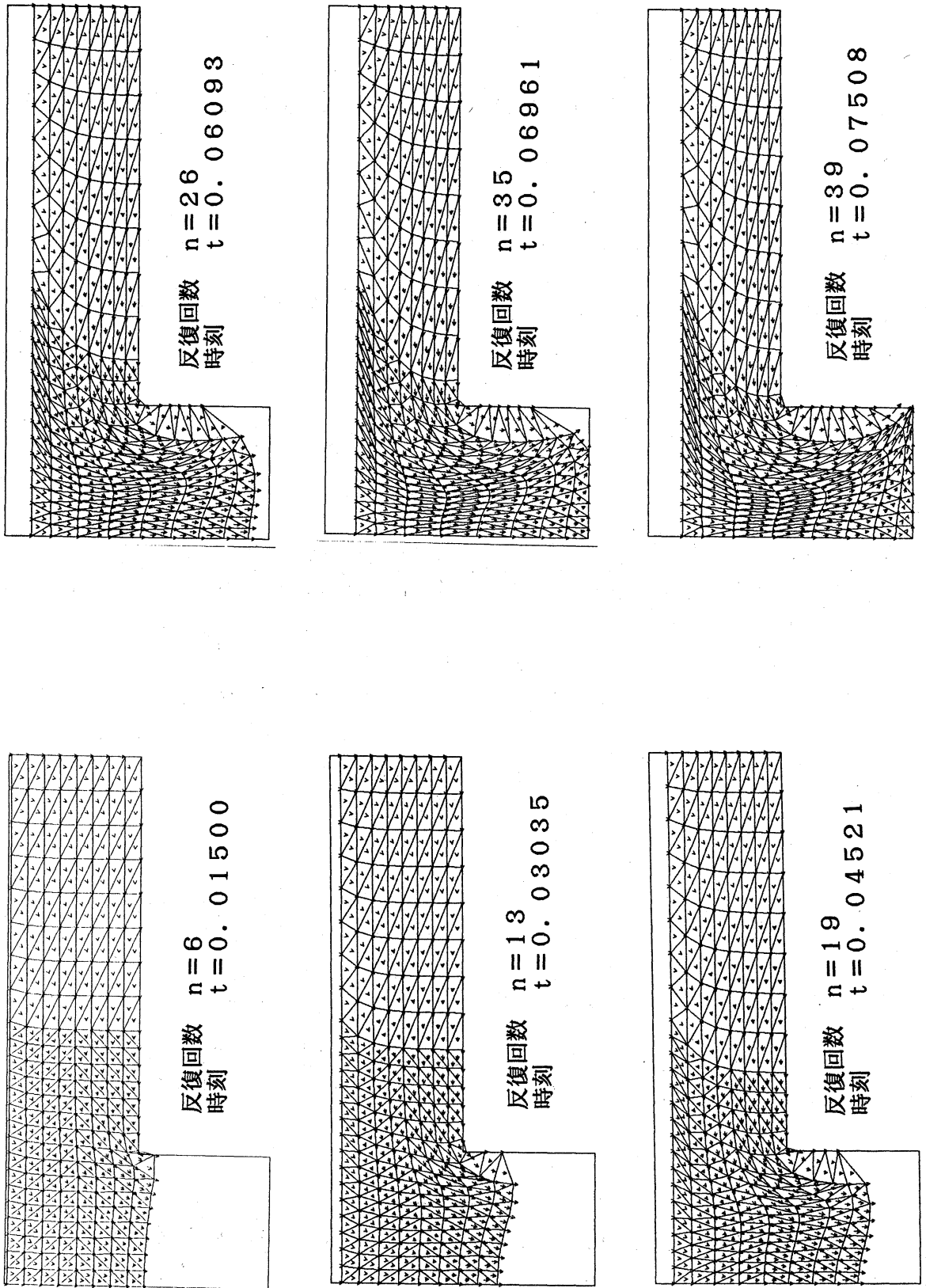


図 11. 要素分割図と流速図 (ラグランジュ近似)

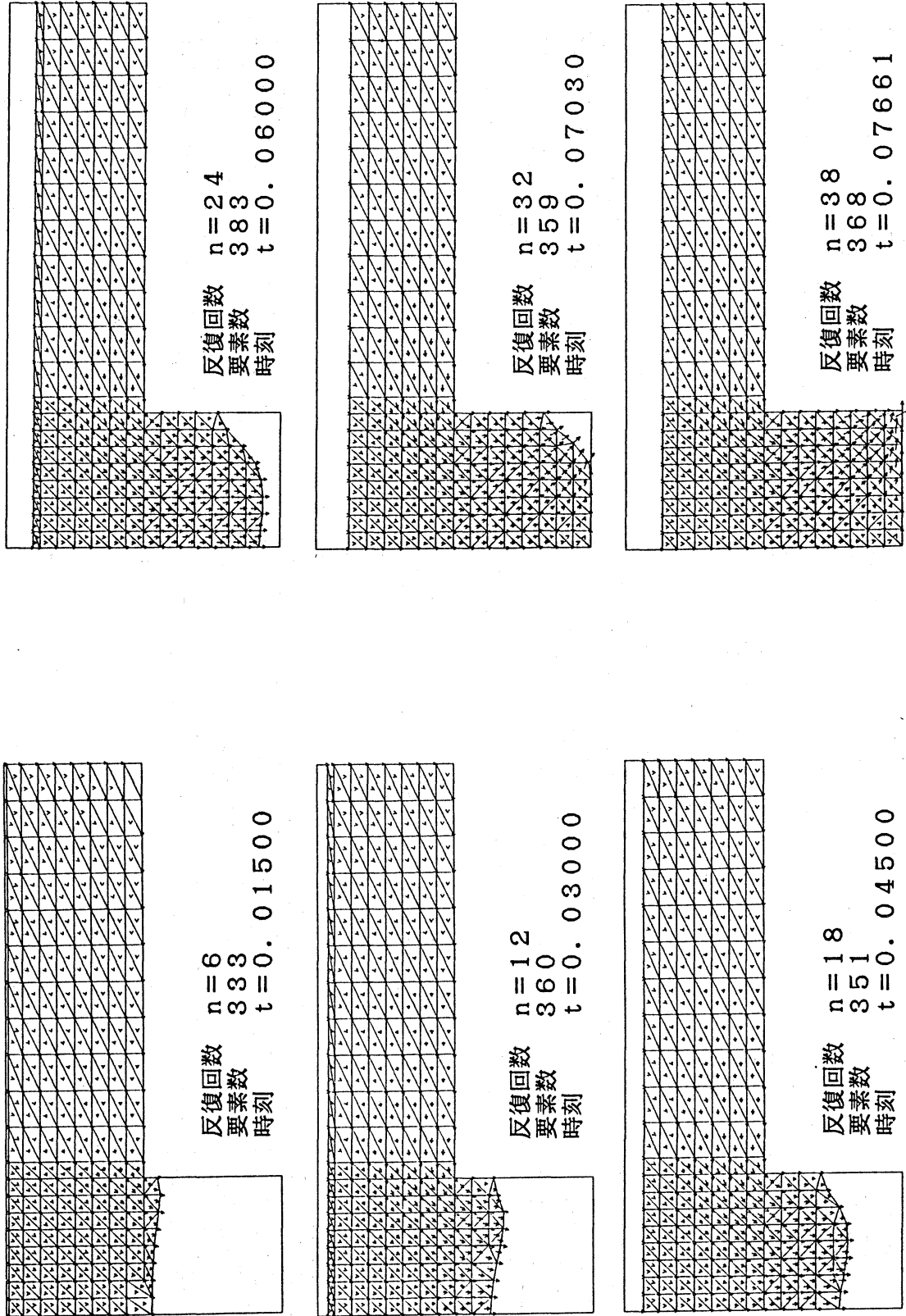


図 12. 要素分割図と流速図 (オーバーレイ近似)

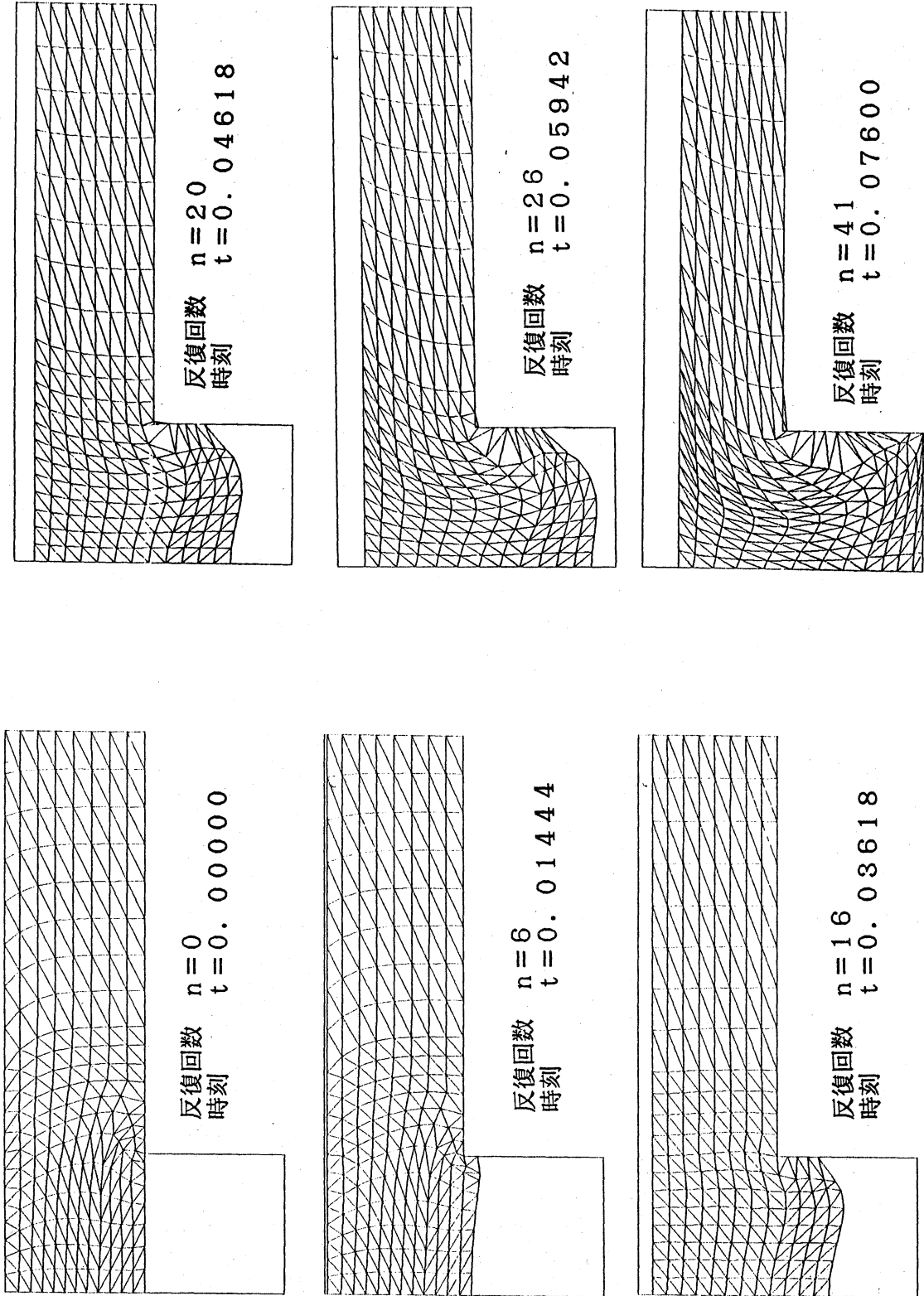


図 13. 初期分割を変えたたラグラング近似の要素分割図

ることのないように計算した。要素数は、ラグランジュ有限要素近似では、384(一定)であり、オイラー有限要素近似では、初期320であり最大383であった。それぞれの計算結果を図11、12に示す。流体が充填していく過程がよく観察される。2つの方法は、自由境界、流体の挙動について、ほぼ同じ結果を与えている。これらの方法はそれぞれ次の特徴を持っている。ラグランジュ有限要素近似では、要素分割が物理的な分割に対応し、粒子の追跡が可能である。例えば図9の初期分割図の各層が時間と共にどのように流れ込んでいくかを図11で調べることができる。一方、オイラー有限要素近似では、各時刻で更新しなければならない要素剛性行列は自由境界付近のもののみである。さらに、ラグランジュ近似と違って要素が大変形を受けることはないので、急激な変化を伴う流れや長時間の解析にも十分適用できる。

図13に、初期分割を変えたラグランジュ有限要素近似の結果を示す。初期分割は図7である。仮計算には図11のものを用い、 $t=0.03771$ で再分割したものである。総自由度、総要素数、時間刻み τ 、 ν は図11と同じである。自由表面の形状はほとんど変わらない。図13で $t=0.03618$ の要素分割はほぼ一様になっている。図11と比較して終了時刻でも要素が大きく変形していない。

4. おわりに

自由境界を有する問題に対して、ミニ有限要素を用いる2種類の数値解法を示し、それぞれの方法の有効性を確認した。ミニ要素はInf-Sup条件を満足する要素の中で最も自由度の少ないものの一つである。

ラグランジュ有限要素近似では、要素移動にアイソパラメトリック変換を用いた。ミニ有限要素に現れるバブル関数は要素境界で零であるので、この変換は三角形を三角形に移す。このようにミニ有限要素はラグランジュ有限要素近似に有効であった。

オイラー有限要素近似では、1階双曲型方程式が現れる。この解法には、 L^2 -安定な上流型スキムを用いた。自由境界付近での要素分割のアルゴリズムを改良した結果、より自然な要素分割ができるようになった。

またラグランジュ有限要素近似で、全計算時間を通して受ける要素変形を平均化するような初期分割生成のアルゴリズムを示した。この方法により、計算終了時近くでも、大きな要素変形が生じないようになった。

数値例は圧縮成形問題を単純モデル化したものである。得られた数値解は以前の結果⁵⁾より精度が向上し、より詳しい観察が可能となった。

参考文献

- 1) 鷲津久一郎, 田中義一, 池川昌弘: "変形 F L I C 法による非圧縮粘性流解析", 日本航空宇宙学会誌, 27, 406-414(1979).
- 2) Ramaswamy, B., Kawahara, M. and Nakayama, T.: "Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Two-Dimensional Sloshing Problems", Int. J. Num. Meth. Fluids, 6, 659-670(1986).
- 3) Ramaswamy, B. and Kawahara, M.: "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow", Finite Elements in Fluids, vol 7, 65-87, Eds. R. H. Gallagher et al., John Wiley & Sons, 1987.
- 4) Girault, V. and Raviart, P.A.: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer, 1986.
- 5) 田端正久, 藤間昌一, 守田明生: "ナビエ・ストークス方程式のための二つの風上型有限要素近似", 電気通信大学紀要, 1, 129-136(1988).
- 6) Tabata, M. and Yaoi, M.: "Upwind Finite Element

Approximation of the Navier-Stokes Equations and its Application to a Free Surface Problem", Computational Methods in Flow Analysis, 529-536 (Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Flow Analysis), Eds. H. Niki and M. Kawahara, Okayama Univ. of Science, 1988.

- 7) 平井恒夫: "複合材料のプレス成形", 材料, 30, 842-849(1981).
- 8) 田端正久, 守田明生: "バブル関数付き三角形1次要素の保存型上流近似", 電気通信大学学報, 38, 1-5(1987).
- 9) Baba, K. and Tabata, M.: "On a Conservative Upwind Finite Element Scheme for Convective Diffusion Equations", R. A. I. R. O., Anal. Numer., 15, 3-25 (1981).