数理解析研究所講究録
第 703 巻 1989 年 157-171

解析的境界を持つＪｏｒｄａｎ領域における代用電荷法

東京大学大学院 理学系研究科 桂田 祐史 (Katsurada, Masashi)

§1. 序.

解析的境界 Γ を持つ Jordan 領域 Ω における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\Delta U = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$U = F \qquad \text{on } \Gamma = \partial\Omega, \tag{2}$$

を考えよう（以下の議論では $\mathbf{R}^2$ と複素平面 $\mathbf{C}$ を同一視する)。静電気工学者の代用電荷法（ charge simulation method ）とは、領域 Ω の外部に Ω を取り囲むような点集合 $\{Y_j\}_{j=1}^N$ を取り（以下 Y_j を電荷点と呼ぶ)、それらの上に電荷 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ を置いて得られる静電ポテンシャル

$$U^{(N)}(X) = \sum_{j=1}^{N} Q_j\, E(X, Y_j), \tag{3}$$

ここで $E(X,Y)$ は Laplacian の基本解である：

$$E(X,Y) = -\frac{1}{2\pi}\log|X-Y|,$$

を厳密解 U の近似解に採用するものである。電荷 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ を決定するには、選点法（ collocation method ）を用いる。すなわち、Ω の境界 Γ から選んだ N 個の拘束点（ collocation points ） $\{X_j\}_{j=1}^N$ の上で厳密解と同じ境界値を持つ：

$$U^{(N)}(X_j) = F(X_j) \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{4}$$

という条件を満足するような $\{Q_j\}_{j=1}^N$ を求める。この条件 (4) は $\{Q_j\}_{j=1}^N$ に関する連立一次方程式になる。(代用電荷法の静電気工学における応用については [10] 参照)。

Ω が 2 次元の円板領域 $D_\rho = \{X \in \mathbf{R}^2; |X| < \rho\}$ の場合は、電荷点と拘束点の配置に一様同心円状の配置：

$$X_j = \rho\omega^{j-1}, \quad Y_j = R\omega^{j-1} \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{5}$$

where

$$\omega = \exp\frac{2\pi i}{N}, \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

（ここで R は $\rho < R, R \neq 1$ を満たす数）を採用することにすれば次の結果がある。

定理1．1 (桂田-岡本 [6],[7])．$0 < \rho < R, R \neq 1$ と仮定する。
(i) $R^N - \rho^N \neq 1$ なる任意の $N \in \mathbf{N}$ 、任意の境界データ F に対して、*(3)* の形をした関数 $U^{(N)}$ で *(4)* を満たすものが一意的に存在する。
(ii) *(i)* の近似解 $U^{(N)}$ に対して F の滑らかさに応じた誤差評価が得られる。
(a) F の Fourier 級数が絶対収束するならば、$N \to \infty$ のとき $U^{(N)}$ は厳密解 U に一様収束する。
(b) F の Fourier 係数 $\{F_n\}$ が、ある定数 $\alpha > 1$ に対して $F_n = O(|n|^{-\alpha})(n \to \pm\infty)$ という評価を持つならば

$$\|U - U^{(N)}\|_\infty = O(N^{-\alpha+1}) \qquad (N \to +\infty).$$

(c) 厳密解 U が $r_0 > \rho$ なる r_0 に対して、D_{r_0} で調和、境界まで込めて連続に拡張されるならば

$$\|U - U^{(N)}\|_\infty = O(\tau^N) \qquad (N \to +\infty).$$

ここで τ は *1* より小さい正定数。具体的には

$$\tau = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} & \rho < r_0 < R^2/\rho, \\ \dfrac{\rho}{R} & r_0 > R^2/\rho, \end{cases}$$

と取れる。

最近、愛媛大学の天野要氏は領域 Ω が Jordan 領域の場合に、円板の場合の配置 (5) を外部写像関数

$$\Psi : \mathbf{C} \setminus D_\rho \longrightarrow \mathbf{C} \setminus \Omega$$

で写した配置

$$X_j = \Psi(\rho\omega^{j-1}), \quad Y_j = \Psi(R\omega^{j-1}) \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

を用いることを提唱している。当講演では領域の境界が解析的であるなどの仮定の下で、写像関数

$$\Phi : D_\rho \longrightarrow \Omega$$

で写した配置

$$(7) \qquad X_j = \Phi(\rho\omega^{j-1}), \quad Y_j = \Phi(R\omega^{j-1}) \qquad (j = 1, \dots, N)$$

を採用した場合に漸近的な誤差解析が出来ることを、Arnold-Wendland [1] の手法を用いることによって示す。

注意1.1 本研究集会で天野氏の講演を聴くまで筆者は天野氏が配置 (7) を推奨していると勘違いしていた。実は (6) の下でも本講演とほぼ同様の議論が成立することが分かっている。さらに (6) を使用した場合は境界 Γ の滑らかさについての条件を緩くできる可能性があるので、(6) を用いる方が自然であると思われる。

注意1.2 式 (3) 右辺の形をした関数 U_N で境界値問題 (1)-(2) の解を近似的に求める方法は静電気工学に限らず広く用いられている。応用数学の分野でも基本解法（ fundamental solution method ）と呼ばれて研究がなされてきたが、そこでは以下のような扱い方をされていることが多い（例えば [2] ）。

(a) 式 (3) 右辺の形をした関数からなるある集合を定めると、列 $\{U_N\}$ で

$$\|U_N - U\| \to 0 \quad (N \to +\infty)$$

となるようなものが存在するという、いわゆる density result や、最適な第 N 近似 U_N が得られたときの漸近的な誤差のオーダーの解析、すなわち

$$\|U_N - U\| = O(*) \quad (N \to +\infty)$$

のような形の結果を得ることを目標とする。
(b) 電荷点の配置はある条件内で最適化して決定するか（実際の数値計算には非線型最適化問題向けのライブラリィを用いる）、簡単な配置（例えば領域を含む円板を取ってその周上に一様に配置する）を採用する。

§2. 結果の陳述.

Ω を解析的な境界 Γ を持つ Jordan 領域、ρ を正定数とする。Jordan 領域であることから等角写像

$$\Phi : D_\rho \longrightarrow \Omega$$

で、$\overline{D_\rho}$ から $\overline{\Omega}$ への同相写像に拡張できるものが存在する（Riemann の写像定理)。境界 Γ が解析的であることから、Φ が $\overline{D_\rho}$ の近傍まで等角に拡張できることが分かる（Schwarz の鏡像原理を用いる。例えば [9]）。従って $R_1 > \rho$ なる正定数 R_1 が存在して、Φ が $\overline{D_{R_1}}$ 上の等角写像に拡張できる。この拡張された写像も Φ で表すことにする。

注意2.1 普通 Riemann の写像定理における写像関数は単位円板 D_1 から Ω の上への等角写像であるが、ここでは円板の半径 ρ を 1 に限定しないことにする。それは、対数ポテンシャルを扱っているため円板の半径が重要な意味を持っていることを明確に示しておきたいためである。

注意2.2 領域 Ω と正数 ρ が与えられても写像関数 Φ は一意には定まらない。応用に際してはどうやって Φ を選ぶか決めねばならないが、ここではその問題は扱わないことにする。

記号の準備

$0 \le r \le R_1$ なる r に対して

$$\gamma_r \equiv \{X \in \mathbf{R}^2; |X| = r\},$$

$$\Gamma_r \equiv \Phi(\gamma_r),$$

$$\Omega_r \equiv \Phi(D_r),$$

とおく（$\Gamma = \Gamma_\rho, \Omega = \Omega_\rho$ となる)。

また Jordan 閉曲線 γ の容量（capacity）を $Cap(\gamma)$ と表す。すなわち単位円の外部を γ の外部領域に写す等角写像 ϕ を

$$\phi(z) = az + O(1) \quad \text{as } z \to \infty,$$

と表したとき $Cap(\gamma) = |a|$ である（容量については例えば [5] を参照)。

次に掲げるのが当講演における主定理である。

定理２．１． R を

$$0<\rho<R<R_1,\quad R\neq 1,\quad Cap(\Gamma_R)\neq 1$$

を満たす定数として、任意の自然数 N に対して

$$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right),$$

$$X_j=\Phi\left(\rho\omega^{j-1}\right),$$

$$Y_j=\Phi\left(R\omega^{j-1}\right)\quad (j=1,\dots,N)$$

とおく。
(i)（近似解の存在） N が十分大きいならば、任意の境界値 F に対して代用電荷法による近似解が一意的に存在する。すなわち

$$U^{(N)}(X)=\sum_{j=1}^{N}Q_j\ E(X,Y_j)$$

が

$$U^{(N)}(X_j)=F(X_j)\qquad (j=1,\dots,N)$$

を満たすような $(Q_1,\dots,Q_N)$ が一意に定まる。
(ii)（誤差評価） *Dirichlet* 問題 *(1.1)-(1.2)* の厳密解 U が、Ω_{r_0} まで調和に拡張され、境界値が H^t に属するとする。ここで t,r_0 は条件

$$\begin{cases}\rho\le r_0\le R_1,\\ r_0=\rho \text{ のとき } t>1/2,\\ r_0=R_1 \text{ のとき } t<-1/2,\end{cases}$$

を満たす実数である。このとき次の誤差評価が成り立つ。

$$\|U-U^{(N)}\|_{H^s(\Gamma_r)}\le CN^{P(s,r/\rho,t,r_0/\rho)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{N/2}\|U\|_{H^t(\Gamma_{r_0})}.$$

ここで C は N,U に依らない正定数を表し、s,r は条件

$$(1)\qquad \begin{cases}\max\{\rho^2/r_0,r_0(\rho/R)^2\}\le r\le\min\{R^2/r_0,r_0\},\\ r=r_0 \text{ のとき } s<t,\\ r=R \text{ のとき } s<1/2,\end{cases}$$

(2) $$r \geq \frac{R^2}{R_1}, \quad r = \frac{R^2}{R_1} \text{ のとき } s > \frac{3}{2},$$

を満たす実数である。そして P は以下の式で定めるものである。

$$P(s,\varepsilon,t,\delta) = \begin{cases} \max\{s-t, s-1, -1\} & (\varepsilon = 1 \text{ and } \delta = (R/\rho)^2) \\ \max\{s-t, s-1\} & (\varepsilon\delta = (R/\rho)^2 \text{ and } \delta < (R/\rho)^2) \\ \max\{s-t, -1, -t\} & (\varepsilon = \rho/R \text{ and } \delta = R/\rho) \\ \max\{s-t, -1\} & (\varepsilon = \delta(\rho/R)^2 \text{ and } \delta > R/\rho) \\ \max\{s-t, -t\} & (\varepsilon\delta = 1 \text{ and } \delta < R/\rho) \\ s-t & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

注意２．３ (1) を満たす r が存在するためには

$$\max\{\rho^2/r_0, r_0(\rho/R)^2\} \leq \min\{R^2/r, r_0\}$$

でなければならないが、これは

$$\rho \leq r_0 \leq R^2/\rho$$

と同値である。結局 r_0 には

$$\rho \leq r_0 \leq \min\{R^2/\rho, R_1\}$$

という条件が付くことになる。

注意２．４ t, r_0 は Dirichlet 境界条件 F の滑らかさを表す量である。§3 で導入する関数空間の記号を用いれば

$$f(\theta) = F\left(\Phi(\rho e^{2\pi i\theta})\right)$$

で定まる f が $\mathcal{X}_{t,r_0/\rho}$ に属するということである。

注意２．５ $r = \rho$ に限ると (ii) は次のように簡単になる。$t > 1/2$ を満たす t について F が $H^t(\Gamma)$ に属するならば、 $s < t$ を満たす任意の s について

$$\|U - U^{(N)}\|_{H^s(\Gamma)} \leq CN^{\max\{s-t,-t\}}\|F\|_{H^t(\Gamma)}$$

注意２．６ 誤差評価式の左辺は Ω における関数空館のノルムではないが、次のような事実が成立するので満足できる結果であろう。
(a) $r_1 < r_2$ のとき不等式

$$\|v\|_{s,r_1} \leq \|v\|_{s,r_2}$$

が成立する。
(b) $s < t$ なる s と $r = \rho$ は常に条件 (1),(2) を成立させる（(1),(2) を満たす (s, r) が空でない限り）。

注意２．７ この定理に容量が現れるのは次の事から納得できよう。容量 $\neq 1$ の境界を持つ領域については

命題. Γ を平面内の滑らかな *Jordan* 閉曲線で $Cap(\Gamma) \neq 1$ を満たすものとするとき、Γ 上の *Hölder* 関数 Q が

$$\int_\Gamma \log|x-y|Q(y)ds_y = 0 \quad (\forall x \in (\Gamma \text{ の内部領域}))$$

を満たすならば、実は $Q = 0$ である。(証明は例えば *[5]*)

が成立するが、容量 $= 1$ の場合にはこのような一意性定理は成立しない。なお、$R \neq 1$ という条件も $Cap(\gamma_R) \neq 1$ と理解できる。

§3. 定理の証明のスケッチ.

3.1 証明の方針.

基本的な考え方は境界要素法などへの応用を念頭において書かれた Arnold-Wendland[1] による。彼等は問題を S^1 上の強楕円型方程式に定式化し、円板領域に対応した場合を具体的な Fourier 級数の計算で解決して、一般の場合はそれからのコンパクトな摂動として Riesz-Schauder 理論で扱った。

まず写像関数 Φ を用いて問題を Ω から D_ρ に写して考えることにする。

$$\tilde{u} \equiv U \circ \Phi,$$

$$\tilde{f} \equiv F \circ \Phi,$$

$$\tilde{u}^{(N)} \equiv U^{(N)} \circ \Phi,$$

$$a(x,y) \equiv E(\Phi(x), \Phi(y)),$$

と置くと

$$\Delta \tilde{u} = 0 \qquad \text{in } D_\rho, \tag{1}$$

$$\tilde{u} = \tilde{f} \qquad \text{on } \gamma_\rho, \tag{2}$$

$$\tilde{u}^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^{N} Q_j a(x, R\omega^{j-1}), \tag{3}$$

$$\tilde{u}^{(N)}(\rho\omega^{j-1}) = \tilde{f}(\rho\omega^{j-1}) \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

つまり $\tilde{u}^{(N)}$ は、円板領域 D_ρ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1)-(2) を、基本解 $E(x,y)$ の代わりに $a(x,y)$ を用い、一様同心円状の電荷点・拘束点の配置を採用した「変形代用電荷法」を用いて解いた近似解であるといえよう。

さて、 γ_ρ 上与えられた $\tilde{f}$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \int_{\gamma_R} a(x,y)\tilde{q}(y)ds_y, \qquad \forall x \in \gamma_\rho \tag{5}$$

を満たす $\tilde{q}$ が見つかったと仮定すると、境界値問題の厳密解は

$$\tilde{u}(x) = \int_{\gamma_R} a(x,y)\tilde{q}(y)ds_y, \qquad x \in D_\rho$$

で与えられる。「変形代用電荷法」は、この手続きの離散化であると考えられる。

いま、

$$\begin{cases} f(t) \equiv \tilde{f}(\rho e^{2\pi i t}), \\ q(t) \equiv \tilde{q}(R e^{2\pi i t}) \end{cases}$$

とおくと (5) は $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の方程式

$$f = Aq \tag{6}$$

に書き直される。ここで A は次式で定義される積分作用素である：

$$Aq(\tau) = 2\pi R \int_0^1 a(\rho e^{2\pi i \tau}, R e^{2\pi i t}) q(t)\, dt.$$

実際には、f が相当に滑らかでない限り、積分作用素 A が意味を持つような関数族の中には、方程式 (6) を満たすような q は存在しない。そこで Fourier 級数を利用して A の定義域を拡張して考えることにする。

$s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ なる任意の s, ε に対し、$\mathcal{X}_{s,\varepsilon}$ を S^1 上の有限 Fourier 級数全体からなる関数空間をノルム

$$\|f\|_{s,\varepsilon} \equiv \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \varepsilon^{2|n|} \underline{n}^{2s} \right)^{1/2},$$

で完備化してできる Hilbert 空間とする。ただし

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}, \qquad t \in S^1,$$

$$\underline{n} = \max\{2\pi |n|, 1\}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

である。

3.2 領域が円板領域の場合.

領域 Ω が D_ρ 自身の場合は $\Phi = id$ と取ることが出来て

$$
\begin{aligned}
Aq(\tau) &= 2\pi R \int_0^1 E(\rho e^{2\pi i\tau}, Re^{2\pi it}) q(t)\, dt \\
&= G * q(\tau),
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
G(\theta) &= -R \ \log|R - \rho e^{2\pi i\theta}| \\
&= -R\left\{\log R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(e^{2\pi in\theta} + e^{-2\pi in\theta}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\widehat{Aq}(n) = \widehat{G}(n)\widehat{q}(n), \tag{7}
$$

$$
\widehat{G}(n) = \begin{cases} \dfrac{R}{2|n|}\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{|n|} & \text{if } n \neq 0, \\ -R\log R & \text{if } n = 0. \end{cases} \tag{8}
$$

式 (7),(8) を用いることによって、任意の s, ε に対して A を $\mathcal{X}_{s,\varepsilon}$ まで拡張することが出来る。このとき容易に次のことが分かる。

補助定理３．１． 任意の $s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ に対して *(7),(8)* により有界線型写像

$$
A : \mathcal{X}_{s,\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{X}_{s+1,\varepsilon\cdot\frac{R}{\rho}}
$$

が定義できる。特に $R \neq 1$ ならば同型写像になる。

補助定理を述べるために、いくつか記号の準備をしよう。

$$
\begin{aligned}
\Lambda_N &\equiv \{p \in \mathbf{Z}; -N/2 < p \leq N/2\}, \\
\Delta_N &\equiv \{jh \in S^1; j \in \Lambda_N\}, \quad h \equiv 1/N.
\end{aligned}
$$

$$D_N \equiv \left\{ \sum_{j \in \Lambda_N} Q_j \delta(\cdot - jh); (Q_j) \in \mathbf{C}^{\Lambda_N} \right\}.$$

$$T \equiv \left\{ (t, \delta) \in \mathbf{R}^2; \delta > 1 \text{ or } (\delta = 1 \text{ and } t > 1/2) \right\},$$

$$S(t,\delta) \equiv \left\{ (s, \varepsilon) \in \mathbf{R}^2; \max\{\frac{1}{\delta}, \delta \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\} \leq \varepsilon \leq \min\{\frac{1}{\delta} \left(\frac{R}{\rho}\right)^2, \delta\}, \right.$$
$$\left. \text{if } \varepsilon = \delta \text{ then } s \leq t, \text{ if } \varepsilon = \frac{R}{\rho} \text{ then } s < \frac{1}{2} \right\}.$$

Fourier 級数を丁寧に評価することによって次の補助定理が得られる（詳細は [8] で発表する)。

補助定理３．２． $0 < \rho < R, R \neq 1$ そして $(t, \delta) \in T$ と仮定する。
(i) N が $R^N - \rho^N \neq 1$ を満たすならば、任意の $f \in \mathcal{X}_{t,\delta}$ に対して

$$Lq^{(N)}(x) = f(x), \quad x \in \Delta_N.$$

を満たす $q^{(N)} \in D_N$ が一意的に存在する。
(ii) 任意の $(s, \varepsilon) \in S(t, \delta)$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\|f - Lq^{(N)}\|_{s,\varepsilon} \leq CN^{P(s,\varepsilon,t,\delta)} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{N/2} \|f\|_{t,\delta}.$$

ここで C は f や N に依らない正定数である。

$q^{(N)} \in D_N$ を

$$q^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} Q_j \delta(\cdot - (j-1)h)$$

と表したとき

$$Aq^{(N)}(\tau) = \sum_{j=1}^{N} Q_j E(\rho e^{2\pi i \tau}, R\omega^{j-1})$$

となることに注意しよう。つまり $Aq^{(N)}$ は代用電荷法による近似解 $\tilde{u}^{(N)}$ に対応している。これから円板領域の場合に定理の主張が成立することが分かる。

3.3 領域が円板領域でない場合.

一般の場合は円板の場合からの摂動と考える。前項で扱った、$\Omega = D_\rho, \Phi = id$ の場合の A を以下では A_d と表すことにしよう（d は disk の略)。q が滑らかならば

$$Aq = A_d q + Kq$$

ただし

$$Kq(\tau) = \int_0^1 k(\tau, t) q(t)\, dt,$$

$$\begin{aligned} k(\tau,t) &= 2\pi R\{a(\tau,t) - E(\rho e^{2\pi i\tau}, Re^{2\pi it})\} \\ &= 2\pi R\{E(\Phi(\rho e^{2\pi i\tau}), \Phi(Re^{2\pi it})) - E(\rho e^{2\pi i\tau}, Re^{2\pi it})\} \\ &= -R\log\left|\frac{\Phi(\rho e^{2\pi i\tau}) - \Phi(Re^{2\pi it})}{\rho e^{2\pi i\tau} - Re^{2\pi it}}\right|. \end{aligned}$$

既に見たように $A_d : q \mapsto G * q$ は任意の $s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{X}_{s,\varepsilon}$ から $\mathcal{X}_{s+1,\varepsilon\cdot\frac{R}{\rho}}$ への写像に拡張できる。そこで K を拡張することが当面の目標となる。

まず滑らかな q に対しては

$$\widehat{Kq}(l) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \widehat{k}(l,m)\widehat{q}(-m), \quad \ell \in \mathbf{Z} \tag{9}$$

であるが、Φ の滑らかさについての仮定から k の Fourier 係数に関して

$$\left|\widehat{k}(\ell,m)\right| \le C\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{|\ell|}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{|m|}, \quad (\ell, m \in \mathbf{Z}) \tag{10}$$

なる評価が成立する。これから次の補助定理が得られる。

補助定理３．３． $\varepsilon > 0, s \in \mathbf{R}$ が

$$\begin{cases} \dfrac{R}{R_1} \le \varepsilon \le \dfrac{R_1}{R}, \\ \varepsilon = \dfrac{R}{R_1} \text{ のとき } s > \dfrac{1}{2}, \\ \varepsilon = \dfrac{R_1}{R} \text{ のとき } s < -\dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{11}$$

を満たすならば積分作用素 K は (9) 式によって compact 作用素

$$K : \mathcal{X}_{s,\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{X}_{s+1,\varepsilon\cdot\frac{R}{\rho}}$$

に拡張される。

この補助定理により $s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ が (11) を満たすとき有界線型写像

$$A : \mathcal{X}_{s,\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{X}_{s+1,\varepsilon\cdot\frac{R}{\rho}}$$

を得る。 $R \neq 1$ の時 A_d は同型写像であったから A は同型写像の compact な摂動である。 $Cap(\Gamma_R) \neq 1$ を仮定すると注意２．７で述べた事実を使って A が単射であることを証明できる。従って Riesz-Schauder の定理によって A が同型写像になることがわかる。

A_d, A の同型性と、 A_d についての近似解の誤差評価（補助定理３．２）を用いることにより、次の命題が証明できる。

補助定理３．３． $0 < \rho < R < R_1,\ R \neq 1,\ Cap(\Gamma_R) \neq 1.$ さらに $(t, \delta) \in T$ は条件

$$\delta \geq \frac{R_1}{\rho}, \quad \delta = \frac{R_1}{\rho} \text{ のとき } t < -\frac{1}{2}$$

を、 $(s, \varepsilon) \in S(t, \delta)$ は条件

$$\varepsilon \geq \frac{R^2}{\rho R_1}, \quad \varepsilon = \frac{R^2}{\rho R_1} \text{ のとき } s > \frac{3}{2}$$

を満たすと仮定すると、正定数 C が存在して、 $R^N - \rho^N \neq 1$ を満たす $\forall N \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathcal{X}_{t,\delta}$, そして $Aq = Aq^{(N)}$ on Δ_N を満たす $\forall q^{(N)} \in D_N$ について

$$\|q - q^{(N)}\|_{s,\varepsilon} \leq C N^{P_2(s,\varepsilon,t,\delta)} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{N/2} (\|q\|_{t,\delta} + \|q - q^{(N)}\|_{s,\varepsilon})$$

が成立する。ここで

$$P_2(s, \varepsilon, t, \delta) = P(s+1, \varepsilon \cdot \frac{R}{\rho}, t+1, \delta \cdot \frac{R}{\rho}).$$

$s, \varepsilon, t, \delta$ が上の補助定理の仮定の条件を満足していて、かつ $(s,\varepsilon) \neq (t,\delta)$ であれば

$$N^{P_2(s,\varepsilon,t,\delta)} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{N/2} = o(1) \quad \text{as } N \to +\infty$$

となることに注意すると、十分大きい N に対しては、上の不等式を変形して

$$\|q - q^{(N)}\|_{s,\varepsilon} \leq C N^{P_2(s,\varepsilon,t,\delta)} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{N/2} \|q\|_{t,\delta}$$

が導かれる。これから

$$\left[q^{(N)} \in D_N \ \text{ and } \ Aq^{(N)} = 0\right] \Rightarrow q^{(N)} = 0$$

が分かる。方程式 $Aq^{(N)} = f$ on Δ_N は、N 次正方行列を係数とする連立一次方程式に同値であるから、一意性から可解性が導かれる。以上のことから定理２．１が証明できる。

§4. 結び.

今回の結果は天野氏の提唱した等角写像を用いる配置法 (1.6) の正当性を確かめる試みとして始めた研究によるものだが、筆者に勘違いがあって（注意１．１参照）天野氏の推奨する方法とは異なる配置 (1.7) を扱うこととなった。しかし (1.6) の配置でも同様の方針で取り扱えることが分かっているので、この場合の結果も早い時期にまとめて発表するつもりである。

一方で、電荷点・拘束点の配置を等角写像で求めることを実行しようとすると、ほとんどの場合に等角写像自体をなんらかの近似計算をして求めることになる。従って現実的な立場に立つならば、誤差を含んだ近似等角写像のもとでも有効な結果が望まれる。

参考文献

[1] Arnold,D.N. and W.L.Wendland, The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves, Numer.Math. 47(1985), 317-341.

[2] Bogomolny, A., Fundamental solution method for elliptic boundary value problems, SIAM J.Numer.Anal. Vol.22, No.4, August(1985).

[3] 天野 要, 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol.28, No.7, (1987), 697-704.

[4] 天野 要, 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol.29, No.1, (1988), 62-72.

[5] Henrici,P., Applied and computational complex analysis, vol.3, Wiley-Interscience (1986).

[6] Katsurada,M. and H.Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA,Math.35(1988), 507-518.

[7] Katsurada,M., A mathematical study of the charge simulation method II, to appear in J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA.Math.36(1989).

[8] Katsurada,M., Asymptotic error analysis of the charge simulation method in Jordan regions with analytic boundaries, in preparation.

[9] 小平 邦彦, 複素解析, 岩波基礎数学講座.

[10] 村島 定行, 代用電荷法とその応用, 森北出版 (1983).