数理解析研究所講究録
第 705 巻 1989 年 64-103

Robinson-Schensted 対応とその一族

東大・理　寺田　至

1. Partition, Tableau と Robinson-Schensted 対応概観

1.1. はじめに

Robinson-Schensted 対応 (そのいちばんもとになる形) は，f 次対称群の元 w に，大きさが f で形が等しい二つの *standard tableau* $P(w)$ と $Q(w)$ を対応させる写像である。$f=3$ の場合を図 1 に示す。正確な用語の定義は §1.2 でするが，*standard tableau* とは，1 から f までの数字を，図 1 の $P(w)$ や $Q(w)$ のような形に，右と下には増加するように並べたものである。図 1 には，大きさが 3 で形の等しい *standard tableau* の対がすべて現れている。

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right)$$

図 1. $\mathfrak{S}_3$ における Robinson-Schensted 対応 $w \mapsto (P(w), Q(w))$

この Robinson-Schensted 対応を最初に考えたのは，G. de B. Robinson **[Ro]** である。(ただ Robinson の言い回しは，見かけがずいぶん違っている。)目的は，対称群や $GL(n,\mathbb{C})$ の表現論に現れるいわゆる Littlewood-Richardson 法則を証明することであった。Littlewood-Richardson 法則については，例えば I. G. Macdonald の本 [M, I.9] に書かれている。しかしこの Robinson の証明は不完全であったといわれており，大体 1970 年以降になって Macdonald, G. P. Thomas **[Th]** をはじめ何人かが完全な証明を発表した。

一方，それとはおそらくまったく独立に，C. Schensted も **[Sche]** の中でこの対応を定義し，次のような純粋に組合せ論的な問題に解答を与えた。

定理 $w \in \mathfrak{S}_f$ とするとき，数列 $(w(1), w(2), \ldots, w(f))$ の単調増加部分列 ($1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqq f$ であって，$w(i_1) < w(i_2) < \cdots < w(i_l)$ なるもの) のうち最も長いものの長さは，$P(w)$ の第 1 行の長さに等しい。また，単調減少部分列のうち最も長いものの長さは，$P(w)$ の第 1 列の長さに等しい。

C. Greene [**Gr74**] はこれを拡張して，$P(w), Q(w)$ のすべての行の長さの意味を明らかにした。

この対称群の場合の Robinson-Schensted 対応は，のちに対称群の *left cell* や *right cell* と呼ばれるものと関係していることがわかり，A 型の Hecke 環の *ideal* や，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の *universal envelopping algebra* の*primitive ideal* の分類と関係することになった。これについては有木氏と谷崎氏の解説がある。

また，$\mathbb{C}^n$ の *flag* に関する幾何学的な現象を表していることも発見され，これを通じて対称群の Springer 表現とも関係があることがわかった。これについては松澤氏と谷崎氏の解説がある。

このように，いちばんもとの形である対称群の場合の Robinson-Schensted 対応には，その具体形に意味づけが何通りか与えられている。

一方 Robinson-Schensted 対応は，重複を許した順列に対しても拡張される。この重複を許した順列に拡張された形の Robinson-Schensted 対応は，$GL(n, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_f$ の $V^{\otimes f}$ ($V = \mathbb{C}^n$) 上の表現の分解を言い表した，I. Schur または H. Weyl の相互律と関係がある。しかしこれまでのところその関係は，大ざっぱにいって，Robinson-Schensted 対応が全単射で結び付けている二つのものの数が等しいということに対する意味づけでしかなく，Robinson-Schensted 対応の具体形に直接表現論的な意味がつくという研究は，少なくとも筆者はこれまで知らなかった。

ところが最近，伊達悦朗・神保道夫・三輪哲二氏 [**D-Ji-M**] は，Lie 環の *quantum deformation* と呼ばれるものを用いて，重複を許した順列に拡張された Robinson-Schensted 対応の具体形に一つの表現論的な意味を与えた。

時代は前後するが，Robinson-Schensted 対応は D. E. Knuth [**Kn70**] によって，現在 Knuth 対応と呼ばれているものに拡張された。また，ここ数年になって，R. P. Stanley やその門下の組合せ論の研究者を中心とする人たちによって，これらの対応と $GL(n, \mathbb{C})$ や対称群の表現の間の関係が再び注目され，A. Berele [**Ber**], J. R. Stembridge [**Ste87**], S. Sundaram [**Su**], R. Proctor [**P**], B. E. Sagan [**Sa**], D. Worley [**Wo**] らによって，Robinson-Schensted

対応の○○版という感じのものが次々と作られ，その性質が研究されている。それぞれ Weyl の相互律と類似する現象と関連しているのだが，全単射の具体形に対する詳しい意味づけはなお今後の問題といえる。

なお，Weyl の相互律との系統とは少し別のものとして，*left cell*, *right cell* を記述するものとしての Robinson-Schensted 対応を他の古典型 Weyl 群に拡張した D. Barbash と D. Vogan の仕事 **[Ba-V]** や，やはり B 型・C 型 Weyl 群やその他対称群と有限群の *wreath* 積に拡張した岡田聡一氏 (岡田氏の記事参照) の仕事もある。また，対称群の元の最短表示の個数に関係した P. H. Edelman, C. Greene の仕事 **[E-Gr]** もある。

私の担当記事では，Robinson-Schensted 対応の組合せ論的な部分を紹介するとともに，対称群と $GL(n,\mathbb{C})$ の表現との関連のうち以前からわかっていた部分を紹介して以下の記事の前座とし，また，今後の進展を期待して，いくつかの変種のうち Sp の表現と関係する Berele の対応 **[Ber]** をおもに紹介する。

以下の構成は次のとおりである。

§1 の残りの部分では，Robinson-Schensted 対応を定義するのに必要な順列に関する規約や，*partition*, *tableau* などのことばの規約を定め，オリジナルと変種を含め，どういう対応があるのか概観する。§2 では，重複を許した順列に対する Robinson-Schensted 対応を具体的に定義し，基本的な性質を紹介する。§3 では，Berele の対応を具体的に紹介する。

1.2. 順列，partition 及び tableau

対称群と順列　f を自然数とするとき，$\mathfrak{S}_f$ で f 次対称群を表す。f 次対称群とは，集合 $\{1,2,\ldots,f\}$ から自分自身への全単射の全体が，写像の合成に関してなす群である。

組合せ論の文献では，$\mathfrak{S}_f$ の元の表記 (特に順列との同一視) や積の順番などについて，さまざまな流儀が行われているようである。ここで，この記事で用いる表記を確定しておく。ほかの文献 (特に M.-P. Schützenberger など) にあたるときには注意していただきたい。

対称群 $\mathfrak{S}_f$ の元 w を具体的に表すには，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(f) \end{pmatrix}$ のように書く。ここで，$1 \leqq i \leqq f$ に対して，$w(i)$ は w を写像と見たときの w による i の像である。たとえば，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は，教科書で $(1\,2\,3)$ とも書かれる 3 項巡回置換である。図 1 の $\mathfrak{S}_3$ の元の表記も，全部これに則って書いた。

$\mathfrak{S}_f$ の元 w と w' の積は，通常の写像の合成の記法に則って定めることにする。すなわち，

$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(f) \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ w'(1) & w'(2) & \cdots & w'(f) \end{pmatrix}$ とするとき,

$$ww' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ w\big(w'(1)\big) & w\big(w'(2)\big) & \cdots & w\big(w'(f)\big) \end{pmatrix}$$

である。例えば, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

また, $\mathfrak{S}_f$ の元 $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(f) \end{pmatrix}$ を順列 (数列) $w(1)\,w(2)\cdots w(f)$ と同一視することもある。上記の 3 項巡回置換のこの記事における順列表記は 231 である。

partition と Young 図形 **partition** (分割) とは, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leqq i \leqq l)$ なる自然数の列で, 広義の単調減少, すなわち $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_l$ なるものをいう。l を *partition* λ の **長さ (length)** といい, $l(\lambda)$ で表す。ただし, λ_l のあとに何個か 0 を付け加えた数列も λ と同一視することがある。その場合でも, $l(\lambda)$ はあくまで λ の 0 でない成分の個数である。*partition* 全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す。(この辺の記号は [M] によっている。)

partition λ に対し, $|\lambda| = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i$ とおく。$|\lambda| = f$ である *partition* を f の **partition** (分割) といい, λ が f の *partition* であることを $\lambda \vdash f$ と書く。($\vdash$ は, 例えば [Ja-Ke] で用いられている記号である。)

一方, この原稿では, **Young 図形** とは次の条件 (1) と (2) を満たす$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合を意味することにする。

(1) $|Y| < \infty$,

(2) $(i, j) \in Y, i' \leqq i, j' \leqq j \implies (i', j') \in Y$.

図では, 図 2 (左) のように, 行列と同様に第 1 座標軸を上から下に, 第 2 座標軸を左から右にとって格子点の集合として表したり, さらに図 2 (右) のように格子点を正方形 (箱) で置き換えて表したりする。

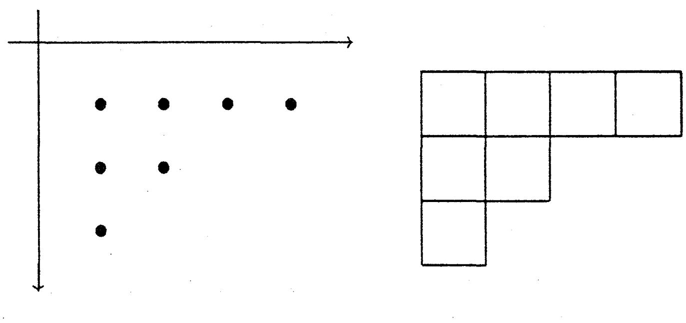


図 2. (4,2,1) の Young 図形

partition 全体と Young 図形全体とは,

$$\text{第}\ i\ \text{項}\ \lambda_i \longleftrightarrow \text{第}\ i\ \text{行にある箱の個数}$$

という関係で対応づけることにより，1 対 1 に対応する。以下 *partition* λ に対応する Young 図形を同じ文字 λ で表し，λ を表す Young 図形，λ の Young 図形，Young 図形 λ などと呼ぶ。図 1 は *partition* $(4,2,1)$ の Young 図形である。また Young 図形 λ に対し，λ_i はつねに第 i 行の長さの意味で用いる。さらに第 j 列の長さを λ'_j で表す。

次に，$\lambda \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像$T\colon \lambda \to \mathbb{N}$ を，*shape* が λ の **Young tableau** または単に **tableau** という。図では，図 3 (左) のように Young 図形 λ の第 i 行第 j 列の箱の中に$T(i,j)$ を書き込んだり，図 3 (右) のように箱の枠を書かずに $T(i,j)$ だけを並べたりして表す。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad = \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 \end{array}$$

図 3. *shape* $(4,2,1)$ の Young *tableau* の例

なお，後に $\mathbb{N}$ 以外の全順序集合への写像も *tableau* ということがある。

注意　*tableau* の用語にもいろいろな流儀があり，*tableau* といっただけで成分の間に条件を課す定義 [M] もある。

1.3. standard tableau と対称群の表現

shape λ の *tableau* $T\colon \lambda \to \mathbb{N}$ が **standard** であるとは，この記事では次の (S1)–(S3) の条件を満たすことをいう。

(S1) $T(i,1) < T(i,2) < \cdots < T(i,\lambda_i) \quad (1 \leqq i \leqq l(\lambda))$,
(S2) $T(1,j) < T(2,j) < \cdots < T(\lambda'_j, j) \quad (1 \leqq j \leqq \lambda_1)$,
(S3) T は 1 から f までの数字をちょうど 1 個ずつ含む。

shape が λ の *standard tableau* 全体の集合をここでは $\mathrm{STab}(\lambda)$ で表す。

$T \in \mathrm{STab}(\lambda)$, $0 \leqq i \leqq f$ とするとき，T 中で i 以下の数字が占めている部分の形は Young 図形となる。これを $\lambda^{(i)}$ とおけば，$\phi = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(f)} = \lambda$ かつ $|\lambda^{(i)}| - |\lambda^{(i-1)}| = 1$ である。

ここで次の記法を導入しよう。Young 図形 λ, μ に対し，μ が λ に箱を一つ付け加えたものであるとき，すなわち

$$\lambda \subset \mu \quad \text{かつ} \quad |\mu| - |\lambda| = 1 \quad \text{であるとき}$$

$\lambda \prec \mu$ または $\mu \succ \lambda$ と書くことにする。なお，今用いた記号 $\lambda \subset \mu$ は，左上隅をそろえたとき λ がそっくり μ に含まれることを意味する。すべての i に対して $\lambda_i \leqq \mu_i$ と同値である。

明らかに，

$$\mathrm{STab}(\lambda) \longleftrightarrow \{(\phi = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(f)} = \lambda) \in \mathcal{P}^{f+1} \mid \lambda^{(i-1)} \prec \lambda^{(i)}\ (1 \leqq i \leqq f)\}$$

と同一視することができる。

$\mathfrak{S}_f$ の標数 0 の体上の既約表現は，f の *partition* と 1 対 1 に対応づけることができる。(例えば [**Ja-Ke**, p. 52, Th. 2.3.15] 参照。) *partition* λ に対応する既約表現を，ここでは $\lambda_{\mathfrak{S}_f}$ で表す。(あとで *partition* に対応する $GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現や $Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約表現をそれぞれ $\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$, $\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ で表すので，その名前との統一感を出すための記号である。)

$\lambda_{\mathfrak{S}_f}$ の次数 (表現空間の次元) については，

$$\deg \lambda_{\mathfrak{S}_f} = \#\mathrm{STab}(\lambda)$$

であることが知られている。さらに，$\mathrm{STab}(\lambda)$ の元を *basis* とする *vector space* の上に $\mathfrak{S}_f$ の作用を定義して (作用をこの *basis* について書き下して)，$\lambda_{\mathfrak{S}_f}$ を構成する方法もいくつか知られている。(例えば [**Ja-Ke**, p.124, 3.3.29 *The seminormal form of* $[\alpha]$], [N] などを参照)

1.4. semistandard tableau と $GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現

λ を *partition* とするとき，*shape* λ の Young *tableau* T に対して，条件 (S1), (S2) のうち行に関する単調増加性 (S1) を緩めた条件

(SS1) $T(i,1) \leqq T(i,2) \leqq \cdots \leqq T(i,\lambda_i) \quad (1 \leqq i \leqq l(\lambda))$,

(SS2) $T(1,j) < T(2,j) < \cdots < T(\lambda'_j, j) \quad (1 \leqq j \leqq \lambda_1)$

を満たすとき **semistandard** であるといい，*shape* λ の *semistandard tableau* 全体の集合を SSTab(λ) で表す。そのうち中に書かれている数字が n 以下であるもの全体を $\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ で表す。*standard tableau* の場合の (S3) のような，現れる数字の回数に関する条件は *semistandard tableau* 自体にはない。

注意 [M] では，*semistandard tableau* のことを単に *tableau* と呼んでいる。

Young *tableau* T の **weight** とは，T 中に数字 i が現れる回数を $m_i(T)$ としてできる数列 $(m_1(T),\ m_2(T),\ \ldots)$ のことをいい，この数列を $wt(T)$ で表す。$m_i(T)$ は i が十分大きくなればすべて 0 になる。0 ばかりになったら適当なところで打ち切ってよいことにしておく。λ が *partition* で，$\boldsymbol{m}$ が 0 以上の整数からなる数列であるとき，*shape* が λ で weight が $\boldsymbol{m}$ の *semistandard tableau* 全体の集合をここでは SSTab$(\lambda;\boldsymbol{m})$ で表す。この書き方に従えば，§1.3 で定義した *standard tableau* については $\mathrm{STab}(\lambda)=\mathrm{SSTab}(\lambda;(1^f))$ である（(1^f) は 1 が f 個続く数列の略記)。

$\mu\subset\lambda$ であるような Young 図形 λ と μ を用いて $\lambda\setminus\mu$ ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の部分集合としての差集合) と表される $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の部分集合を**skew Young 図形** といい，λ/μ で表す。($\setminus$ はもっと広く差集合に用い，差が *skew* Young 図形になるとき / を用いる。) $|\lambda/\mu|=|\lambda|-|\mu|$ とおく。*skew* Young 図形のうち，一つの列に高々一つしか箱を含まないものを **horizontal strip** という。また，一つの行に高々一つしか箱を含まないものを **vertical strip** という。

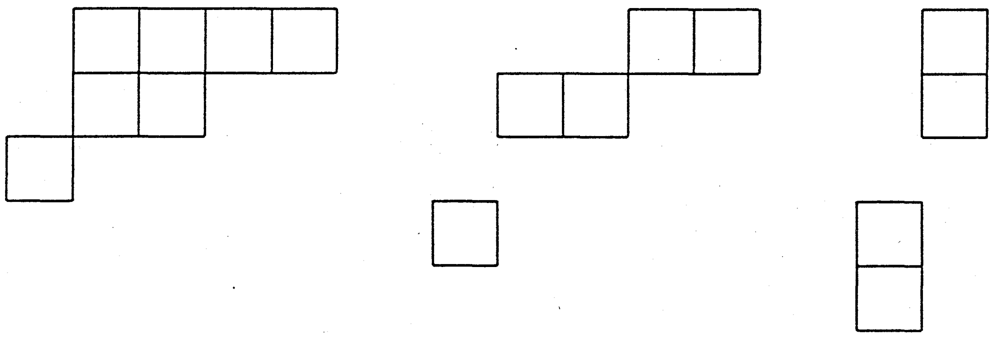


図 4. *skew* Young 図形，*horizontal strip*, *vertical strip* の例

semistandard 性の条件は，i 以下の数字が占める部分を $\lambda^{(i)}$ と書くとき，$\lambda^{(i)}$ が Young 図形であり，i が占める部分 $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ が*horizontal strip* であることを意味する。すなわち，

次のように同一視できる。

$$\mathrm{SSTab}_n(\lambda) \longleftrightarrow$$
$$\{(\phi=\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)}=\lambda)\in\mathcal{P}^{n+1} \mid \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}\text{ は } \textit{horizontal strip}\ (1\leqq i\leqq n)\}$$

semistandard tableau の一つの意味づけとして，$GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現の *weight* 分解がある。それを説明しよう。

$G=GL(n,\mathbb{C})$ の有限次元表現 ρ が **多項式表現** [resp. **有理表現**] であるとは，$g=(g_{ij})\in G$ に対して $\rho(g)=(\rho(g)_{kl})$ とするとき，表現行列の各行列成分 $\rho(g)_{kl}$ が g の行列成分 g_{ij} の多項式 [resp. 有理式] で表されることをいう。言うまでもなく多項式表現は有理表現の特別の場合である。これらの表現は，完全可約である。

$GL(n,\mathbb{C})$ の既約な有理表現は，*highest weight* というものによってラベルづけすることができる。それにはまず *maximal torus* と呼ばれる部分群を一つ *fix* する。$GL(n,\mathbb{C})$ の **maximal torus** とは，$\mathbb{C}$ の乗法群 $\mathbb{C}^*$ いくつかの直積と同型な部分群のうち包含関係に関して極大なものをいう。対応する Lie 環のことばでいえば，Cartan *subalgebra* に対応するものである。最も標準的な *maximal torus* として，対角行列全体$T=\{\mathrm{diag}(t_1,t_2,\ldots,t_n)\mid t_i\in\mathbb{C}^*\ (1\leqq i\leqq n)\}$ をとることができる。

$\widehat{T}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{rat}}(T,\mathbb{C}^*)$ を T の *rational character* 全体のなす群とすると，対応

$$\widehat{T}\ni\chi_{\boldsymbol{m}} \longleftrightarrow \boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$$
$$\text{ただし}\quad \chi_{\boldsymbol{m}}(\mathrm{diag}(t_1,t_2,\ldots,t_n))=t_1^{m_1}t_2^{m_2}\ldots t_n^{m_n}$$

により $\widehat{T}\cong\mathbb{Z}^n$ である。

(ρ,V) を $GL(n,\mathbb{C})$ の有理表現とする。$\chi\in\widehat{T}$ に対し

$$V_\chi=\{v\in V\mid \rho(t)(v)=\chi(t)v\quad(\text{for all } t\in T)\}$$

とおくと，V は

$$V=\bigoplus_{\chi\in\widehat{T}}V_\chi$$

と分解する。$V_\chi\neq0$ であるような χ を表現 ρ の **weight** といい，V_χ の元を *weight* χ に属する **weight vector**，V_χ を **weight space** という。なお，$\chi_{\boldsymbol{m}}\in\widehat{T}$ を$\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n$ と同一視して，$\boldsymbol{m}$ を *weight* と言ってもよいことにしておく。

さて，$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\boldsymbol{m}' = (m'_1, m'_2, \ldots, m'_n)$ のとき，$\widehat{T}$ の元 $\chi_{\boldsymbol{m}}$ と $\chi_{\boldsymbol{m}'}$ の間に順序 $\geqq$ を

$$\chi_{\boldsymbol{m}} \geqq \chi_{\boldsymbol{m}'} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} m_j \geqq \sum_{j=1}^{i} m'_j \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \quad \text{かつ} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{j=1}^{n} m'_j \end{cases}$$

によって定義する。(実はこれは，$\chi_{\boldsymbol{m}} - \chi_{\boldsymbol{m}'}$ が上半三角行列全体からなる Borel *subgroup* に対応する *positive roots* の和で書けるという条件である。)すると，ρ が既約な有理表現ならば，ρ の *weight* の集合にはただ一つの最大元が存在する。これを ρ の **highest weight** という。

$GL(n, \mathbb{C})$ の既約な有理表現は，*highest weight* をとることにより，**dominant integral weight** の集合

$$\{\, \boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \mid m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \,\}$$

と 1 対 1 に対応することが知られている。

このうち，既約な多項式表現の *highest weight* は，$m_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ で特徴づけられる。これは長さが n 以下の *partition* (に必要なら 0 を補ったもの) とみなしてよい。この意味で，長さ n 以下の *partition* λ に対し，対応する $GL(n, \mathbb{C})$ の既約な多項式表現を $\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$ で表すことにする。

多項式表現の場合は，*weight* $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ もすべて $m_i \geqq 0$ を満たす。$V_{\chi_{\boldsymbol{m}}}$ の次元を weight $\chi_{\boldsymbol{m}}$ または $\boldsymbol{m}$ の**重複度(multiplicity)** という。そして，これが実は *semistandard tableau* の個数によって数えられる。すなわち，

$$\dim V_{\chi_{\boldsymbol{m}}} = \#\mathrm{SSTab}(\lambda; \boldsymbol{m})$$

が成立するのである。

character のことばで述べれば次のようになる。

$GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元多項式表現または有理表現 (ρ, V) の **character** とは

$$\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n} (\dim V_{\chi_{\boldsymbol{m}}})\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{m}}$$

($\boldsymbol{t}$ は変数 $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ をまとめたものを表し，$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{m}}$ は $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_n^{m_n}$ を意味するものとする) なる $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ の元のことをいう。$g \in GL(n, \mathbb{C})$ の固有値を $t_1, t_2, \ldots, t_n$ に代入すると，$\operatorname{trace} \rho(g)$ になる。

$\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$ の *character* は Schur 関数 $s_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ と呼ばれる対称多項式になることが知られている。上に述べたことは，言い換えれば

$$s_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)} \boldsymbol{t}^{wt(T)}$$

と書くことができる。

なお，二つの有理表現は，*character* が等しければ同値である。従って，ある多項式表現の *character* がわかっているとき，それを s_λ の一次結合で書くことができれば，その係数が既約成分 $\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$ の重複度である。

さて，上で述べたことの基礎には次の現象がある。

$\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$ を $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群

$$\begin{array}{|c|c|} \hline GL(n-1, \mathbb{C}) & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{C}^* \\ \hline \end{array}$$

に制限すると，

$$\lambda_{GL(n,\mathbb{C})} \downarrow_{GL(n-1,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*} \cong \sum_{\substack{\lambda/\mu : \text{ hor. strip} \\ l(\mu) \leqq n-1}} \mu_{GL(n-1,\mathbb{C})} \otimes \chi_{|\lambda/\mu|}$$

と既約表現の和に *multiplicity-free* に分解する。この制限を繰り返して $T \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$ まで到達すると，

$$(\phi = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} = \lambda), \quad \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)} \text{ は } \textit{horizontal strip}$$

なる列 (Gelfand *pattern* とも見なせる) によってラベルづけされた 1 次元の既約成分の直和に分解する。$\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ はこの列と 1 対 1 に対応していた。

このような 1 次元部分空間に *basis* を取ったのが，Gelfand-Tsetlin *basis* である。

1.5. Robinson-Schensted 対応とその一族

(A) オリジナルの Robinson-Schensted 対応 Robinson [Ro] と Schensted [Sche] が最初に考えた対称群の場合の Robinson-Schensted 対応とは，次のような全単射である。

$$\text{(RS)} \qquad \mathfrak{S}_f \ni w \quad \overset{\sim}{\longmapsto} \quad (P(w), Q(w)) \in \coprod_{\lambda \vdash f} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

$P(w)$ を w の P-**symbol**, $Q(w)$ を Q-**symbol** と呼ぶ習慣がある。

こういう全単射の存在に限って言えば，$\mathfrak{S}_f$ の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_f]$ を $\mathfrak{S}_f \times \mathfrak{S}_f$-*module* と見たときの分解

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_f] \underset{\mathfrak{S}_f \times \mathfrak{S}_f}{\simeq} \bigoplus_{\lambda \vdash f} \lambda_{\mathfrak{S}_f} \otimes \lambda_{\mathfrak{S}_f}$$

から数量的に導かれる。ただし，$\mathfrak{S}_f \times \mathfrak{S}_f$ の $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_f]$ への作用は，*basis* である $\mathfrak{S}_f$ の元への作用を (w_1, w_2): $w \mapsto w_1 w w_2^{-1}$ によって定める。

さらに，(RS) の具体形とこの分解との関係を与えるのが，一つは Springer 表現を使った議論であり，また A 型 Hecke 環の *basis* C_w を使う議論であると考えられる。

(B) 重複を許す順列の場合

伊達・神保・三輪氏が意味を与えたのはこの *version* である。

n を自然数とするとき $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ と略記する。$[n]$ の元をいくつか並べたものを ($[n]$ 上の) **word** と呼び，長さが f の *word* 全体の集合を $[n]^f$ で表すことにする。要するに重複を許した順列である。*word* w に対しても，数字 i の現れる回数を $m_i(w)$ とおいてできる数列$(m_1(w),\ m_2(w),\ \ldots)$ を w の **weight** といい，$wt(w)$ で表す。

Robinson および Schensted は次のような全単射を構成した。

$$\widetilde{\text{(RS)}} \qquad [n]^f \ni w \quad \overset{\sim}{\longmapsto} \quad (P(w), Q(w)) \in \coprod_{\substack{\lambda \vdash f \\ l(\lambda) \leqq n}} \mathrm{SSTab}_n(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

しかも，$w \mapsto P(w)$ は *weight-preserving* である。

対称群の場合の (RS) は，この中に *weight* が (1^f) の *word* の場合として含まれる。一方，(RS) の性質を少し調べることにより，Schensted 自身がやったように，$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ を (RS) の特殊な場合と見ることもできる。(§2.2 参照)

$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ は，$(\mathbb{C}^n)^{\otimes f}$ の $GL(n,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_f$ に関する分解 (Schur または Weyl の相互律) を数量的に反映している。

簡単のため $V=\mathbb{C}^n$ とおく。$GL(n,\mathbb{C})$ の V への自然な作用 (縦ベクトルに行列を左からかける作用) から，各 f に対して $V^{\otimes f}=V\otimes V\otimes\cdots\otimes V$ (f 個) への作用が次のように定まる。

$$g\cdot(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_f)=g\cdot v_1\otimes g\cdot v_2\otimes\cdots\otimes g\cdot v_f$$

また，$\mathfrak{S}_f$ の $V^{\otimes f}$ への作用が次のように定まる。

$$w\cdot(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_f)=v_{w^{-1}(1)}\otimes v_{w^{-1}(2)}\otimes\cdots\otimes v_{w^{-1}(f)}$$

この $GL(n,\mathbb{C})$ の作用と $\mathfrak{S}_f$ の作用は，互いに他の *commutant* を張っている。そして，$V^{\otimes f}$ は $GL(n,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_f$ の二つの群の作用のもとで

$$\text{(SW)}\qquad V^{\otimes f}\underset{GL(n,\mathbb{C})\times\mathfrak{S}_f}{\cong}\bigoplus_{\substack{\lambda\vdash f\\ l(\lambda)\leqq n}}\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}\otimes\lambda_{\mathfrak{S}_f}$$

と分解することが知られている。これが Schur 及び Weyl の相互律である。(上の (SW) は Schur と Weyl のつもりである。)

$V^{\otimes f}$ の *basis* として最も素朴なのは $e_{w(1)}\otimes e_{w(2)}\otimes\cdots\otimes e_{w(f)}$ $(w\in[n]^f)$ ($e_1,\ldots,e_n$ は V の標準的な基底) である。この元は T の関する *weight vector* であり，その *weight* は $wt(w)$ に等しい。一方 Schur-Weyl 相互律の右辺を考えれば，同じ $V^{\otimes f}$ の *basis* として $\coprod_{\substack{\lambda\vdash f\\ l(\lambda)\leqq n}}\mathrm{SSTab}_n(\lambda)\times\mathrm{STab}(\lambda)$ をとることができ，その元 (P,Q) の T の関する *weight* は $wt(P)$ に等しい。これからわかるように，$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ のような *weight-preserving* な全単射が存在するのは，分解 (SW) の反映である。

別の立場からいえば，$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ は分解 (SW) の $GL(n,\mathbb{C})$ に関する部分を組合せ論的に証明するものともいえる。すなわち，$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ の両辺の *weight* 母関数をとると

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)^f=\sum_{\substack{\lambda\vdash f\\ l(\lambda)\leqq n}}\#\mathrm{STab}(\lambda)\,s_\lambda(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

となる。左辺は $V^{\otimes f}$ の *character* に等しいから，§1.4 に述べたことを思い出せば，これは $V^{\otimes f}$ 中の $\lambda_{GL(n,\mathbb{C})}$ の重複度が#STab(λ) であることを示している。

(C) Knuth 対応 D. E. Knuth (TEXを作った Knuth) は，**[Kn70]** で $(\widetilde{\mathrm{RS}})$ をさらに次のように拡張した。

自然数 m, n と 0 以上の整数 f に対して

$$M^f_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geqq 0}) = \{\, (a_{ij})_{1\leqq i\leqq n,\, 1\leqq j\leqq m} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geqq 0},\ \sum_{i,j} a_{ij} = f \,\}$$

とおく。このとき，Knuth は次のような全単射を構成した。

$$\text{(Kn)} \qquad M^f_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geqq 0}) \ \xrightarrow{\sim}\ \coprod_{\substack{\lambda\vdash f \\ l(\lambda)\leqq \min\{n,m\}}} \mathrm{SSTab}_n(\lambda) \times \mathrm{SSTab}_m(\lambda)$$

この対応は，$w \in [n]^f$ に対し行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = w(j)\ \text{の場合}) \\ 0 & (\text{そうでない場合}) \end{cases}$$

で定めることにより $(\widetilde{\mathrm{RS}})$ を含んでいる。特に (RS) も A が置換行列の場合として含んでいる。

この Knuth 対応は，次の意味で (2 重に) *weight-preserving* となる。左辺の元である行列 A の 第 i 行の和を m_i $(1 \leqq i \leqq n)$，第 j 列の和を k_j $(1 \leqq j \leqq n)$ とする。このとき，A に対応する右辺の元を (P, Q) とすれば，$wt(P) = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $wt(Q) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ となる。

Knuth 対応に関係のある表現論的な現象は，$M_{n,m}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}$ 上の $n \times m$ 行列の空間) の上の *symmetric algebra* の $GL(n,\mathbb{C}) \times GL(m,\mathbb{C})$ に関する分解である。$GL(n,\mathbb{C}) \times GL(m,\mathbb{C})$ の作用は，$M_{n,m}(\mathbb{C})$ への作用

$$GL(n,\mathbb{C}) \times GL(m,\mathbb{C}) \ni (g_1, g_2)\colon X \mapsto g_1 X\, {}^t g_2$$

からひきおこされるものとする。すなわち，V_1 と V_2 をそれぞれ $GL(n,\mathbb{C})$ と $GL(m,\mathbb{C})$ の自然表現の空間として，$M_{n,m}(\mathbb{C}) = V_1 \otimes V_2$ とみなす。

その既約表現への分解は次のようになることが知られている。(S^f は *symmetric algebra* の f 次の *part* を表す。)

$$S^f(M_{n,m}(\mathbb{C})) \underset{GL(n,\mathbb{C})\times GL(m,\mathbb{C})}{\cong} \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash f \\ l(\lambda)\leqq\min\{n,m\}}} \lambda_{GL(n,\mathbb{C})} \otimes \lambda_{GL(m,\mathbb{C})}$$

(Kn) の左辺でラベルづけされる素朴な *basis* としては，次のものがとれる。$M_{n,m}(\mathbb{C})$ の *basis* として *matrix unit* E_{ij} をとると，(*symmetric algebra* の元に多項式のような表記を用いれば) $S^f(M_{n,m}(\mathbb{C}))$ の *basis* として $E_{11}^{a_{11}}E_{12}^{a_{12}}\dots E_{nn}^{a_{nn}}$ $((a_{ij}) \in M_{n,m}^f(\mathbb{Z}_{\geqq 0}))$ がとれる。この *basis element* は，$GL(n,\mathbb{C})$ の *maximal torus* T_1 と $GL(m,\mathbb{C})$ の *maximal torus* T_2 に関して同時に *weight vector* であり，T_1 に関する *weight* が $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, T_2 に関する *weight* が $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ である (m_i, k_j は上と同様にそれぞれ (a_{ij}) の行和，列和を表すものとする)。

一方，上の既約分解に則した形で，同じ *shape* の *semistandard tableau* の *pair* (P, Q) に対応して，T_1 に関する *weight* が $wt(P)$ に等しく，T_2 に関する *weight* が $wt(Q)$ に等しい *weight vector* である*basis* をとることが可能である。従って (Kn) のような対応の存在は，$S^f(M_{n,m}(\mathbb{C}))$ の既約分解の反映である。

一方の立場からは，次のようになる。(Kn) の両辺の *weight* 母関数を，$(m_1, m_2, \dots, m_n)$ には変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を，$(k_1, k_2, \dots, k_n)$ には $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を用いて作る。f をすべて動かしてその和をとったものは，適切なべき級数環の中で意味があって，次の Cauchy *identity* と呼ばれるものになる。

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 - x_i y_j)} = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P} \\ l(\lambda)\leqq\min\{n,m\}}} s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) s_\lambda(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

この左辺は $S(M_{n,m}(\mathbb{C}))$ の $GL(n,\mathbb{C}) \times GL(m,\mathbb{C})$ に関する*character* と見ることができて，対応 (Kn) は $S(M_{n,m}(\mathbb{C}))$ の既約分解を組合せ論的に証明しているものともいえる。

(D) dual Knuth 対応 Knuth は同じ [K70] において，*dual* Knuth 対応と呼ばれる次のような対応も構成した。

$$M_{n,m}^f(\{0,1\}) = \{\, (a_{ij})_{1\leqq i\leqq n,\, 1\leqq j\leqq m} \mid a_{ij} \in \{0,1\},\ \sum_{i,j} a_{ij} = f \,\}$$

とおく。このとき

$$(\mathrm{Kn}^*) \qquad M^f_{n,m}(\{0,1\}) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\substack{\lambda\vdash f\\ \lambda\subset\square_{n,m}}} \mathrm{SSTab}_n(\lambda)\times\mathrm{SSTab}_m(\lambda')$$

ここで，$\square_{n,m}$ は $n\times m$ の長方形型の Young 図形を表す。また *partition* λ に対し，λ' は λ の *conjugate partition* と呼ばれるもので，Young 図形のことばでいえば，主対角線に関して折り返した図形に対応するものである。

これに対応する表現論的な現象は

$$\bigwedge^f(M_{n,m}(\mathbb{C})) \underset{GL(n,\mathbb{C})\times GL(m,\mathbb{C})}{\cong} \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash f\\ \lambda\subset\square_{n,m}}} \lambda_{GL(n,\mathbb{C})}\otimes\lambda'_{GL(m,\mathbb{C})}$$

である。($\bigwedge^f$ は外積代数の f 次の *part* を表す。)

(E) Berele の対応 ((B) の Sp 版) GL の多項式表現の *weight* の重複度を数える SSTab の Sp, SO への拡張について **[Ko-Te]** で扱った。GL の混合テンソル表現については **[Ko]** がある。

Sp の場合の *tableau* を最初に作ったのは R. C. King **[Ki]** である。A. Berele **[Ber]** はそれを用いて，$V=\mathbb{C}^{2n}$ を $Sp(2n,\mathbb{C})$ の自然表現 (*vector* 表現) の空間とするとき，(B) の *analogue* として，$V^{\otimes f}$ の分解を数量的に反映した (または組合せ論的に証明する) 次のような対応を構成した。

$$[\overline{n}]^f \xrightarrow{\sim} \coprod_{\substack{\lambda\vdash f \text{ or } f-2\\ \text{or } \dots\\ l(\lambda)\leqq n}} \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda)\times\mathrm{UDTab}_{n,f}(\lambda)$$

ここで，$[\overline{n}]$ は全順序集合 $1<\overline{1}<2<\overline{2}<\cdots<n<\overline{n}$ の略記である。また $\mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda)$ は *partition* λ に対応する $Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約表現の*weight* の重複度を数えるのに用いられる *tableau* の集合であり，具体的には §3 で定義する。なお，$Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約な多項式表現と *partition* との対応は H. Weyl の古典的な書 **[Wey]** に扱われている。

また，

$$\mathrm{UDTab}_{n,f}(\lambda)=\{(\phi=\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(f)}=\lambda)\in\mathcal{P}^{f+1} \mid l(\lambda^{(i)})\leqq n \quad (0\leqq i\leqq f), \lambda^{(i)}\succ\lambda^{(i-1)} \quad \text{または} \quad \lambda^{(i)}\prec\lambda^{(i-1)}\}$$

である。このようなものを Sundaram は [**Su86**] で *up-down tableau* と名づけた。$\lambda \vdash f$ のとき $\mathrm{STab}(\lambda) = \mathrm{UDTab}_{f,f}(\lambda)$ とみなせることに注意していただきたい。

[**Wey**] で示されているように，$V^{\otimes f}$ における $Sp(2n,\mathbb{C})$ の *commutant* としてはBrauer *algebra* と呼ばれるものが現れる。(正確には Brauer は直交群の場合にこのことを示し，類似の *algebra* が Sp の場合にも使えることはWeyl 自身の結果である旨の記述が [**Wey**] にある。直交群の場合の *algebra* と Sp の場合の *algebra* は，パラメタを含む形で統一的に定義できるので，現在どちらも Brauer *algebra* と呼ばれているようである。)最近，Birman, Wenzl およびは J. Murakami は，$\mathrm{UDTab}_{n,f}(\lambda)$ の元を *basis* とする *vector space* の上に，Brauer *algebra* およびその *q-analogue* の既約表現を構成した。

(F) $GL(n,\mathbb{C})$ の mixed tensor 表現の場合の Stembridge の対応　J. R. Stembridge は [**Ste87**] の中で，Berele の対応と類似の方法を用いて，$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ 上の$GL(n,\mathbb{C})$ の表現の分解に対応する次のような全単射を構成した。$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r+s})$ を1 を r 個，-1 を s 個含むベクトルとする。このような ε ごとに次のような対応が定義される。

$$[n]^r \times [n]^s \quad \xrightarrow{\sim} \coprod_{\substack{(\lambda,\mu)\in\mathcal{P}\times\mathcal{P} \\ r-|\lambda|=s-|\mu|\geqq 0 \\ l(\lambda)+l(\mu)\leqq n}} \mathrm{RatTab}_n(\lambda,\mu) \times \mathrm{UDScTab}_{n,\varepsilon}(\lambda,\mu)$$

$GL(n,\mathbb{C})$ の有理表現は，$\{(\lambda,\mu) \in \mathcal{P}\times\mathcal{P} \mid l(\lambda)+l(\mu) \leqq n\}$ によってもラベルづけされる。$\mathrm{RatTab}_n(\lambda,\mu)$ は，ここでは定義しないが，(λ,μ) に対応する $GL(n,\mathbb{C})$ の既約有理表現の*weight* の重複度を数えるのに使われる，ある条件を満たす *semistandard tableau* の対の集合である ([**Ko**] 参照)。$\mathrm{UDScTab}_{n,\varepsilon}(\lambda,\mu)$ は (これもここでは定義しないが) *up-down staircase tableau* と呼ばれる，ある条件を満たす *partition* の *pair* の列の集合である。

(G) $SO(2n+1,\mathbb{C})$ の場合の Sundaram の対応　$SO(2n+1,\mathbb{C})$ の $V^{\otimes f}$ 上の表現の分解に対応する *version* を S. Sundaram が構成した。われわれが現在持っているのは非公式なノートであるが，[**Su**] に含まれるはずである。彼女の対応は，$SO(2n+1,\mathbb{C})$ の既約指標と $Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約指標の間の関係に基づいている。

(H) $O(N,\mathbb{C})$ の場合の Proctor の対応　最近 R. Proctor は N が偶数，奇数の場合を含めて直交群の *version* を構成した。(彼の *preprint* [**P**] には，初版 88 年 7 月，改訂 89 年 4 月とある。) R. Proctor の方法の特徴は，SO の表現ではなく O の表現をとらえ，既約表現のラベルづけにも“$l(\lambda) \leqq n = \left[\frac{N}{2}\right]$ なる λ” だけではなくて，*determinant* の作用も区別する

[Wey] のラベリングを用いたところにある。(実は筆者も 2 月ごろこれを試みようとしたが，残念ながら成功しなかった。)

(I) $\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ の spinor 表現も含めた Benkart, Stroomer の対応　さらに最近 (1989 年 6 月付)，Benkart および Stroomer が，$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ の多項式または *spinor* 表現と *spin* 表現のテンソル積，及び *spinor* 表現と自然表現 ($\mathbb{C}^{2n+1}$ 上の *vector* 表現) のテンソル積に対応する *insertion* を構成した [Be-Str]。(*insertion* は，Robinson-Schensted 型の対応の基礎になる写像である。)

(J) Sagan, Worley の shifted tableau の version　Sagan [Sa] は *shifted tableau* (図 5 のような図形に数字を書き込んだ *tableau*) に対して，(A) や (C) に似た対応を構成した。対称群の普通の表現の代わりに射影表現が，Schur 関数の代わりに Schur の Q 関数と呼ばれるもの (Hall-Littlewood 対称関数 $Q(x;t)$ の t に -1 を代入したもの) が関係する。Worley [Wo] も同様の対応を構成した。また最近 Stembridge が [Ste89] の中で，Schur Q 関数の積の分解公式 (Schur 関数の場合の Littlewood-Richardson 法則に対応するもの) をこれを用いて作った。

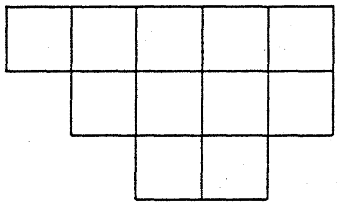


図 5. *shifted shape* の例

(K) Berele, Regev による (B) の Lie superalgebra $\mathrm{pl}(k,l)$ 版　Berele, Regev [Ber-Re] は Lie *superalgebra* $\mathrm{pl}(k,l)$ ($\mathfrak{gl}(k/l)$ とも書かれる) に対する Schur-Weyl 相互律の類似を追求し，その中で (k,l) *semistandard tableau* と全単射 (k,l)-RoSch を構成した。

(L) spinor 上の (C_m, C_n) dual pair の version　長谷川浩司氏が [Has87], [Has88] で発見した*spinor* 上の *dual pair* のうち (C_m, C_n) の場合に対応する全単射を，Berele の写像を利用して作ることができる [Te]。

注意　以上では，表現論を既知とする立場からはこれらの全単射を “表現論的な現象を数量的に反映するもの” と表現し，また一方，全単射による証明を重視する立場からは，これらの全単射は対応する *character* の等式，表現の分解を組合せ論的に証明するものだとも表現してきた。

いずれの立場でも，古典的な *character* の計算だけからは得られない情報が得られることを示すことが，これから重要だと考えられる。その意味で，[**D-Ji-M**] は新しい局面の始まりとなることが大いに期待されるわけである。

2. Robinson-Schensted 対応の具体的定義と性質

この § では，§1.5 (B) の全単射 (重複を許した順列に，形の等しい *semistandard tableau* と *standard tableau* の対を対応させる対応) を，Knuth [**Kn70**] の流儀で定義する。

以下，§2.1 で *semistandard tableau* に新しい文字を一つ挿入する *row insertion* と呼ばれる方法を定義し，§2.2 でそれを用いて §1.5 (B) の Robinson-Schensted 対応を定義する。また対称群の場合，逆元をとると *P-symbol* と *Q-symbol* が入れ替わるという性質や，Knuth の基本関係を紹介する。§2.3 では *column insertion* と呼ばれるもう一つの挿入を定義し，それとの関係から順列 (重複のない場合) を左右ひっくり返すと *P-symbol* が転置になるという性質を紹介する。§2.4 では，Schützenberger の *jeu de taquin* と呼ばれる *algorithm* との関係を用いて，左右をひっくり返した順列の *Q-symbol* を記述する。

Robinson-Schensted 対応の定義のしかたにも，*column insertion* を用いるものや *insertion* を行う順が逆のものなどいろいろあるが，その間の関係もこれで明らかになる。文献にあたるときは注意していただきたい。

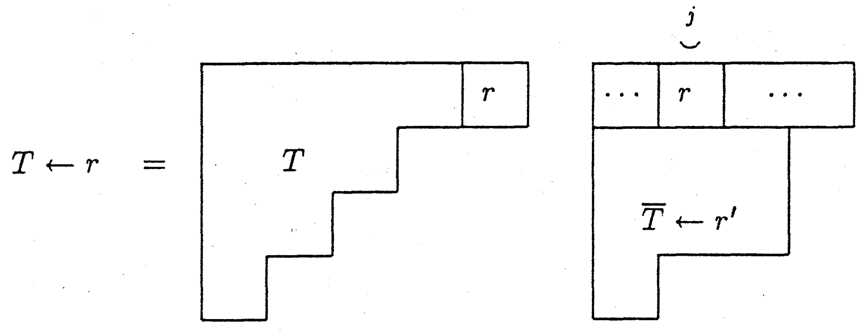
2.1. Schensted row insertion の定義

Schensted は [**Sche**] の中で，*insertion* と呼ばれる操作を 2 種類定義した。この節では，そのうち後に *row insertion* と呼ばれるようになったほうを，[**Kn70**] の拡張された *formulation* で定義する。

注意 Sp の表現に関係する Berele の対応 (§1.5 (E) で述べたもの) においても，この *row insertion* のほうが基礎として使われる (§3 参照)。

定義 $T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$, $r \in [n]$ とする。このとき新しい $T \leftarrow r$ と書かれるものを次のように帰納的に定義する。ただし，終結の場合は $T = \phi$ のときを含む。また継続の場合，$r' = T(1, j)$ とおき，$T \leftarrow r$ の第 1 行は T の第 1 行の $(1, j)$ を r で置き換えたものとする。第 2 行以降は，T の第 2 行以降 $\overline{T}$ にこの操作を帰納的に適用して r' を挿入したものと

する。最終的には必ず終結の場合に到達する。



$T(1, \lambda_1) \leqq r$ のとき (終結の場合)

$T(1, j-1) \leqq r < T(1, j)$ のとき (継続の場合)

この操作を **row insertion** と呼び，略して (RI) と書くことにする。(第 1 行，第 2 行，... の順に数字を挿入していくからである)。

注意 [**D-Ji-M**] ではこれを $T \downarrow r$ で表し，上からの *insertion* と呼んでいる。この記事では [**Sche**] の記号 $T \leftarrow r$ を用いる。

例

$$\begin{array}{cccc}1&1&2&3\\2&2&3&4\\3&&&\\4&&&\end{array} \leftarrow 2 \;=\; \begin{array}{cccc}1&1&2&2\\\cancel{2}&\cancel{2}&\cancel{3}&\cancel{4}\\3&&&\\4&&&\end{array} \leftarrow 3 \;=\; \begin{array}{cccc}1&1&2&2\\\cancel{2}&\cancel{2}&\cancel{3}&\cancel{3}\\\cancel{3}&&\leftarrow 4&\\4&&&\end{array}$$

$$= \begin{array}{cccc}1&1&2&2\\2&2&3&3\\3&4&&\\4&&&\end{array}$$

注意 Schensted は [**Sche**] の中で，もとの *tableau* の中身の数字がすべて相異なっていて，挿入する数字もそれらのどれとも異なる場合の *row insertion* を定義した。これをあとの説明のために (RI) の *distinct version* と呼ぼう。この場合定義の中の $\leqq$ は $<$ で置き換えてよい (Schensted はそう定義している)。ここで定義した形は Knuth の [**Kn70**] のものであり，Knuth はこれを Schensted's *insertion* などと呼んでいる。

(RI) において最も基本的な考察は次のものである。少し技術的な *statement* であるが，すべての性質の証明の基礎になるものである。

補題 2.1 λ は *partition*, $T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$, $r \in [n]$ とする。$T \leftarrow r$ の操作において，r が収まった第 1 行中の位置を $(1, j_1)$, 追い出した文字を r_1 とおく。以下 $i = 2, 3, \ldots$ に対して順にr_{i-1} が収まった第 i 行中の位置を (i, j_i), 追い出した文字を r_i とおく。最後に第 k 行において r_{k-1} が行の最後についてT $\leftarrow r$ の操作が終結したものとし(k をそのように定め), r_{k-1} の収まった位置を (k, j_k) とおく。このとき次が成立する。

$$r < r_1 < r_2 < \cdots < r_{k-1}$$

$$j_1 \geqq j_2 \geqq \cdots \geqq j_{k-1} \geqq j_k$$

証明 k に関する帰納法で示す。$k = 1$, すなわち $T \leftarrow r$ が第 1 行で直ちに終結するならば，示すことは何も存在しない。そうでない場合，r_1 $(= T(1, j_1))$ は $r < T(1, j_1)$ となるように選んだのだから，$r < r_1$ は成立する。もし第 2 行が j_1 より真に短ければ，j_2 はたかだか (第 2 行の長さ) $+ 1$ であるから$j_2 \leqq j_1$ が成立する。そうでなくて $T(2, j_1)$ が存在する場合は，T の *semistandard* 性 (特に列の *strict* 性) により $r_1 = T(1, j_1) < T(2, j_1)$ である。j_2 は $r_1 < T(2, j)$ なる j の最小のものであるから，$j_2 \leqq j_1$ が成立する。r_1 以降の部分と j_2 以降の部分は，終結までの行数が一つ少ない $\overline{T} \leftarrow r_1$ の場合に帰着される。∎

この考察から，次の命題で述べるように，(RI) の行き先が $\coprod_{\mu \succ \lambda} \mathrm{SSTab}_n(\mu)$ に含まれることがわかる。

命題 2.2 λ は *partition*, $T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$, $r \in [n]$ とする。このとき $T \leftarrow r$ も *semistandard tableau* で，その *shape* は λ に一つ箱を付け加えたものである。

証明 k, j_i, r_i は上の補題と同じ意味に用いる。$k = 1$ ならば，*shape* が Young 図形になることは明らかだし，新しい隣接関係は $T(1, \lambda_1)$ とその右に収まった r だけで，ここで *semistandard* 性が保たれていることは，場合分けにおける終結の場合の条件から明らかである。

そうでない場合，上の補題により $j_k \leqq j_{k-1}$ であるから，新しくふえた場所の上にはもとから箱が存在する。従って $T \leftarrow r$ の *shape* は Young 図形になっている。行ごとに *semistandard* 性が保たれていることは，定義における r や r_i の収まり場所の選びかたから明らかである。問題は r_i と，r_i の新しく収まった場所 $(i+1, j_{i+1})$ の上隣 (i, j_{i+1}) との大小関係であ

る。$j_{i+1} \leqq j_i$ であるから，(新しい) 第 i 行の広義増加性により，上隣の元は (i, j_i) に収まった r_{i-1} 以下である。$r_{i-1} < r_i$ であるから，r_i は上隣の元より真に大きい。従って $T \leftarrow r$ は *semistandard tableau* である。∎

それのみならず，(RI) は次の全単射を与える。

定理 2.3 *partition* λ を *fix* するとき，

$$\text{(RI)} \qquad \mathrm{SSTab}_n(\lambda) \times [n] \ni (T, r) \quad \longmapsto \quad (T \leftarrow r) \in \coprod_{\mu \succ \lambda} \mathrm{SSTab}_n(\mu)$$

は全単射である。

証明 (RI) の逆写像になるべき写像を次のようにして作ることができる。*deletion* と呼ぶことが多いが，ここでは *inverse row insertion* を略して (IRI) と呼ぶ。U を右辺の元とする。U の *shape* は λ の Young図形から箱一つだけはみ出している。はみ出している箱の行番号を k とし，はみ出している箱の中身を r_{k-1} として，U からこの箱を削除する。第 $k-1$ 行の中で r_{k-1} より真に小さい最も左の箱の中身を r_{k-2} とおき，この箱の中身を r_{k-1} で置き換える。以下第 $k-2$ 行，第 $k-3$ 行，... と進み，第 1 行まで置き換え終わった *tableau* を T とおいて，第 1 行で消された中身 (上の記号でいえば r_0) を r とおく。このとき (T, r) を (IRI) による U の像とする。これが (RI) の逆写像であることは，比較的容易にわかる。∎

注意 (RI) は，$GL(n, \mathbb{C})$ の表現でいえば次の事実に対応している。

$$\lambda_{GL(n,\mathbb{C})} \otimes \square_{GL(n,\mathbb{C})} \underset{GL(n,\mathbb{C})}{\cong} \bigoplus_{\substack{\mu \succ \lambda \\ l(\mu) \leqq n}} \mu_{GL(n,\mathbb{C})}$$

$\square_{GL(n,\mathbb{C})}$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の自然表現 (*vector* 表現) である。

なお §2.3 で，同じ集合の間の全単射をもう一通り紹介する。それが Schensted の定義したもう一つの *insertion* で，*column insertion* と呼ばれるものである。

2.2. row insertion に基づく Robinson-Schensted 対応の定義

row insertion を繰り返して *word* w の *P-symbol* と *Q-symbol* を 定める。

定義 $w \in [n]^f$ とする。w の P-**symbol** $P(w)$ を

$$P(w) = (\cdots((\phi \leftarrow w(1)) \leftarrow w(2)) \leftarrow \cdots) \leftarrow w(f)$$

で定める。また，$(\cdots((\phi \leftarrow w(1)) \leftarrow w(2)) \leftarrow \cdots) \leftarrow w(i)$ の *shape* を $\lambda^{(i)}$ とおくとき，*partition* の列

$$(\phi = \lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)},\ \lambda^{(2)},\ \ldots,\ \lambda^{(f)} = P(w) \text{ の } shape)$$

に対応する *standard tableau* (§1.3 参照) を w の *Q-symbol* と呼び，$Q(w)$ で表す。

定理 2.4

$$(\widetilde{\mathrm{RS}}) \qquad [n]^f \ni w \quad \longmapsto \quad (P(w), Q(w)) \in \coprod_{\substack{\lambda \vdash f \\ l(\lambda) \leqq n}} \mathrm{SSTab}_n(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

は全単射である。

証明 $Q(w)$ は一つずつふえていく *shape* の履歴を記録したものであるから，これを逆にたどりながら (IRI) を繰り返せば，$(\widetilde{\mathrm{RS}})$ の逆写像が得られる。 ∎

注意 定理 2.4 の写像 $(\widetilde{\mathrm{RS}})$ が §1.5 (B) で述べた重複を許した順列に対する **Robinson-Schensted 対応** である。

Schensted は [**Sche**] において，§2.1 で述べた (RI) の *distinct version* だけを用いて，同じやり方で §1.5 (A) で述べた対称群の場合の (RS) を定義した。従って (RS) は $(\widetilde{\mathrm{RS}})$ において，$n = f$ で w が 1 から f までの文字を一つずつ含む *word* の場合に限ったものである。

対称群の場合の (RS) において，大小関係で隣り合う二つの自然数 i, $i+1$ の*P-symbol* や *Q-symbol* の中での位置関係と，もとの $\mathfrak{S}_f$ の元の間には次のような関係がある。

命題 2.5 $w \in \mathfrak{S}_f$, $1 \leqq i \leqq f-1$ とする。

(1) $w(i)$, $w(i+1)$ の大小と $Q(w)$ の中での i と $i+1$ の位置関係の間には次の関係がある。

$$w(i) < w(i+1) \iff Q(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より右の行にある}$$

$$w(i) > w(i+1) \iff Q(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より下の列にある}$$

(2) w を $[n]^f$ の元 $w(1)\,w(2)\,\cdots\,w(f)$ とみなす。w 中に i と $i+1$ の現れる位置 (すなわち $w^{-1}(i)$ と $w^{-1}(i+1)$ の大小関係) と，$P(w)$ の中での i と $i+1$ の位置関係の間には次の関係がある。

$$w = \cdots i \cdots i+1 \cdots \iff P(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より右の行にある}$$

$$w = \cdots i+1 \cdots i \cdots \iff P(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より下の列にある}$$

ここでは証明は省略する。証明はむずかしくない。

注意 1 (1) は，“$w(i) < w(i+1)$” の $<$ を $\leqq$ にすることにより，重複を許した順列にも拡張される。

注意 2 Schensted はいま述べた (2) を利用して，対称群の場合の (RS) を重複を許した順列に対する $(\widetilde{\mathrm{RS}})$ に拡張した。Schensted の方法は次の通りである。

$w \in [n]^f$ とする。例えば $w = 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1\ 3\ 3\ 2$ としよう。このとき $P(w) = \begin{array}{l} 1\,1\,2\,3\,3 \\ 2\,2\,3 \\ 3 \end{array}$，$Q(w) = \begin{array}{l} 1\,2\,5\,7\,8 \\ 3\,4\,9 \\ 6 \end{array}$ である。ここで，w の中で 2 度以上現れる同じ文字をすべて区別し，大小関係は早く現れるものほど小さいと定めることにしよう。そのように見直したものを$w^* = 2_1\ 3_1\ 1_1\ 2_2\ 3_2\ 1_2\ 3_3\ 3_4\ 2_3$ (ここで文字の大小は$1_1 < 1_2 < 2_1 < 2_2 < 2_3 < 3_1 < 3_2 < 3_3 < 3_4$) とする。これを $\mathfrak{S}_9$ の元 (行き先のほうは数字が $1, 2, \ldots, 9$ ではなく$1_1, 1_2, \ldots, 3_4$ と書かれているが) と思って (RS) を適用すると，$P(w^*) = \begin{array}{l} 1_1\,1_2\,2_3\,3_3\,3_4 \\ 2_1\,2_2\,3_2 \\ 3_1 \end{array}$，$Q(w^*) = \begin{array}{l} 1\,2\,5\,7\,8 \\ 3\,4\,9 \\ 6 \end{array}$ である。ここで例えば $2_1, 2_2, 2_3$ は大小関係において連続した文字で，w^* 中にこの順で現れるから，(2) により，$P(w^*)$ 中この 3 文字は一つの *horizontal strip* (§1.4 参照) を占め，$2_1, 2_2, 2_3$ はその中にこの順で左から現れることが保証される。これは 2 に限らずどの数字についてもいえる。言い換えれば，文字の添字を落としてできる *tableau* は *semistandard* になることが保証される。

逆に，$P \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$，$Q \in \mathrm{STab}(\lambda)$ とするとき，P において同じ数字は一つの *horizontal strip* を占めているから，それらに左から順に $_{1,\,2,\,\ldots}$ と添字をつけた *tableau* をP^* とすると，(P^*, Q) に (RS) の逆写像を適用して得られた *word* w^* は，例えば $2_1, 2_2, \ldots$ を左からこの順で含む。従って (P, Q) に w^* の添字を消した *word* を対応させる写像が逆写像になる。

こうして

$$\text{同じ数字に左から添字をふる} \longrightarrow (\mathrm{RS}) \longrightarrow \text{添字を消す}$$

は $[n]^f$ から $\coprod_{\substack{\lambda\vdash f\\ l(\lambda)\leqq n}} \mathrm{SSTab}_n(\lambda)\times\mathrm{STab}(\lambda)$ への全単射になる。

これが Schensted が (RS) を重複を許した順列に拡張した手順である。

Schensted の手順に従うとき，実は *insertion* の操作中常に，例えば 2_1, 2_2, 2_3 の位置関係について (2) が適用できるから，同じ行に 2 が二つ並ぶようなことがあるときは，必ず左の 2 のほうが添字が若い。従って同じ数字を区別しなくても，同じ数字が横に並んだときは右のもののほうが大きいのと同じに扱って*insertion* を行えば，$P(w^*)$ の文字の添字を落とした *tableau* と同一の *tableau* ができる。*shape* の成長のしかたも同一である。すなわち，Schensted の手順と，ここで説明したような拡張した (RI) を使った $\widetilde{(\mathrm{RS})}$ とは一致するのである。

Schensted の手順で見ると，$\widetilde{(\mathrm{RS})}$ は (RS) の特別の場合と見ることができる。例えば，上で例に用いたような 2 個の 1 と 3 個の 2 と 4 個の 3 からなる順列に対する $\widetilde{(\mathrm{RS})}$ は，1_1, $1_2, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 3_4$ の順列のうちで，1_1 と 1_2 など主たる数字が同じものは添字の小さい順に左からあるという条件を満たすものに限定して (RS) を適用したのと同じだからである。

対称群の元に対する (RS) は，逆元をとると *P-symbol* と *Q-symbol* が入れ替わるという美しい性質がある。このことは Robinson が **[Ro]** の中で述べているが，そこには “it is not difficult to see” と書かれているだけである。後に Schützenberger が **[Schü]** に証明を発表した。

$\widetilde{(\mathrm{RS})}$ にはこれに対応する *statement* はないが，$\widetilde{(\mathrm{RS})}$ をさらに拡張した Knuth 対応 (§1.5 (C) 参照) までいくと，$n = m$ のとき，“$M_{n,n}(\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ の元を転置すると *P-symbol* と *Q-symbol* が入れ替わる” という *statement* に拡張されて，これも成立する。

ここでは対称群の場合の証明の概略を **[Kn68]** に沿って示す。帰納法が適用できるように **[Schü]**, **[Kn68]** に従って $\mathbb{N}$ の任意の二つの f 元部分集合の間の全単射 $w = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_f \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_f \end{pmatrix}$ に対して *P-symbol* $P(w)$ と *Q-symbol* $Q(w)$ の定義を拡張する。ここで $w = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_f \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_f \end{pmatrix}$ は定義域が $\{q_1, q_2, \ldots, q_f\}$ (ただし $q_1 < q_2 < \cdots < q_f$), 値域が $\{p_1, p_2, \ldots, p_f\}$ で，$q_i \mapsto p_i$ $(1 \leqq i \leqq f)$ なる写像を表す。*P-symbol* は *word* $p_1p_2\cdots p_f$ の *P-symbol*, *Q-symbol* は p_i の挿入で増えた場所に (対称群の元ならば i を書き込むところを) q_i を書き込んでできるものである。

定理 2.6 $q_1 < q_2 < \cdots < q_f$ をすべて自然数とし，また $p_1, p_2, \ldots, p_f$ を f 個の互いに異な

る自然数とする。$w = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_f \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_f \end{pmatrix}$ に対し，$P(w^{-1}) = Q(w)$, また $Q(w^{-1}) = P(w)$ である。特に $w \in \mathfrak{S}_f$ に対してこれが成立する。

証明の概略 $P(w)$ の *shape* を λ とし，$l(\lambda) = l$ とおく。$1 \leqq t \leqq l$ なる t に対し，$\binom{q_i}{p_i}$ が w において **class** t **に属する**とは，ϕ に $p_1, p_2, \ldots, p_i$ の順に挿入したとき p_i が位置 $(1,t)$ におさまることとする。w における *class* t の *pair* の全体を $\binom{q_{i_1}}{p_{i_1}}, \binom{q_{i_2}}{p_{i_2}}, \ldots, \binom{q_{i_k}}{p_{i_k}}$, $q_{i_1} < q_{i_2} < \cdots < q_{i_k}$ とすると $p_{i_1} > p_{i_2} > \cdots > p_{i_k}$ であり，$P(w)$ と $Q(w)$ の $(1,t)$-成分はそれぞれ p_{i_k}, q_{i_1} である。また，$P(w), Q(w)$ の 2 行目以降は，$\begin{pmatrix} q_{i_2} & \cdots & q_{i_k} \\ p_{i_2} & \cdots & p_{i_k} \end{pmatrix}$ をすべての t に対してあわせて q の小さい順に並べたもの (これを w' とおく) の *P-symbol* と *Q-symbol* になる。

さて $\binom{q}{p}$ が w 中で *class* t に属することは，$q_{i_1} < q_{i_2} < \cdots < q_{i_s} = q$ かつ $p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_s} = p$ となるような $i_1, i_2, \ldots, i_s$ の長さ s の最大値がちょうど t であることを意味する。w^{-1} は $\binom{p_1}{q_1}, \binom{p_1}{q_2}, \ldots, \binom{p_f}{q_f}$ を p の小さい順に並べ換えたものであるから，このことより $\binom{q}{p}$ が w 中で *class* t に属すれば，$\binom{p}{q}$ も w^{-1} 中で *class* t に属することがわかる。

従って w^{-1} 中の *class* t の *pair* の全体を w^{-1} の中で左にあるものから並べると，$\binom{p_{i_k}}{q_{i_k}}$, $\binom{p_{i_{k-1}}}{q_{i_{k-1}}}, \ldots, \binom{p_{i_1}}{q_{i_1}}$ となり，$P(w^{-1}), Q(w^{-1})$ の $(1,t)$-成分はそれぞれ q_{i_1} と p_{i_k} となる。これが各 t に対して成立するから，$P(w^{-1}), Q(w^{-1})$ の第 1 行はそれぞれ $Q(w), P(w)$ の第 1 行に一致する。また $P(w^{-1}), Q(w^{-1})$ の第 2 行以降は，$\begin{pmatrix} p_{i_{k-1}} & \cdots & p_{i_1} \\ q_{i_k} & \cdots & q_{i_2} \end{pmatrix}$ をすべての t に対してあわせて p の小さい順に並べたものの *P-symbol*, *Q-symbol* となる。これはちょうど w'^{-1} に相当するから，行数に関する帰納法に訴えて，第 2 行以降についても *P-symbol* と *Q-symbol* が入れ替わることがわかる。 ∎

一般の重複を許した順列に対する $\widetilde{\text{(RS)}}$ に戻ろう。同じ *P-symbol* を持つ *word* に対して，Knuth は [**Kn70**] で次のことを示した。

定理 2.7 $[n]^f$ 上の同値関係 $\equiv$ を

$$w \equiv w' \Longleftrightarrow P(w) = P(w')$$

によって定義すると，$\equiv$ は次の 2 種類の基本関係で生成される。

(KE1) $x < y \leqq z$ のとき $\cdots yxz \cdots \equiv \cdots yzx \cdots$

(KE2) $x \leqq y < z$ のとき $\cdots xzy \cdots \equiv \cdots zxy \cdots$

証明の概略 まず (KE1) と (KE2) が成立することを示す。左側の $\cdots$ の部分の *word* の *P-symbol* を T とおく。(KE1) は，x の挿入は y の挿入の軌跡を含めて左側にしか影響せず，z の挿入は y の挿入の軌跡の真に右側にしか影響しないことをちょっと注意深く見ればよい。(KE2) を示すために，T に z, x, y の順で挿入したときの，補題 2.1 でいう j_1 をそれぞれ m_1, l_1, j_1 とする。$l_1 \leqq m_1$ であるが，$l_1 < m_1$ のときと $l_1 = m_1$ のときに分ける。$l_1 < m_1$ のときは，二通りの順番の挿入で第 1 行は同じ結果になり，第 2 行以降 $\overline{T}$ に挿入するもの z', x', y' も同じく (KE2) の条件 $x' \leqq y' < z'$ を満たすので，あとは行数に関する帰納法にかかる。$l_1 = m_1$ のときは，第 1 行の結果が同じになることを注意深く見るとともに，第 2 行以降 $\overline{T}$ への挿入が (KE1) の条件を満たすことを示して行数に関する帰納法にかける。

逆に同じ *P-symbol* を持つ *word* どうしが必ず (KE1) と (KE2) を使って互いに移りあえることを見るには，例えば次のようにすればよい。$T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$, $l(\lambda) = l$ に対し，T の第 i 行に並ぶ数字をそのままの順で *word* と見たものを T_i と書くとき，

$$\rho(T) = T_l\, T_{l-1}\, \cdots\, T_1 \quad (\textit{word}\ T_l \text{ から } T_1 \text{ までをこの順に並べたもの})$$

とおく。$P(\rho(T)) = T$ は容易にわかる。任意の *word* w に対し，(KE1) と (KE2) の変形で w から $\rho(P(w))$ にいけることを示せばよい。実際，$T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$, $r \in \mathbb{N}$ に対し，(KE1) と (KE2) の変形で $\rho(T)\, r$ (この意味は $\rho(T)$ のあとに 1 文字 r をつけたした *word*) から $\rho(T \leftarrow r)$ にいけることを，*row insertion* の定義と並行した議論で示すことができる。これを繰り返せばよい。∎

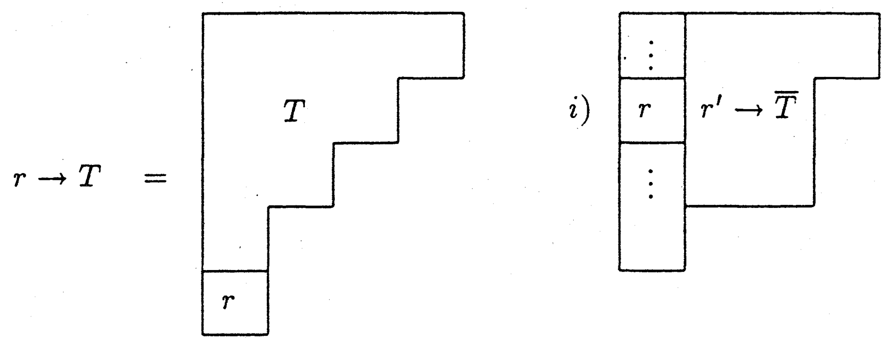
注意 この基本関係の形から，*word* 全体が *word* の連結という演算に関してなす単位的半群は，*semistandard tableau* 全体の集合に *quotient* として落ちることがわかる。この視点は Knuth によって [**Kn70**] の中で指摘され，その後 Lascoux, Schützenberger が強調している。

2.3. column insertion と reverse word の P-symbol

さて，別の全単射として *column insertion* というのもあり，それと *row insertion* との関係からRobinson-Schensted 対応のもう一つの著しい性質が導かれる。

定義 $T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$, $r \in [n]$ とする。このとき新しい $r \to T$ と書かれるものを次のように

帰納的に定義する。



$T(l(\lambda),1) < r$ のとき (終結の場合)　　$T(i-1,1) < r \leqq T(i,1)$ のとき (継続の場合)

ただし，終結の場合は $T = \phi$ のときを含む。また継続の場合，$r' = T(i,1)$ とおき，$r \to T$ の第 1 列は T の第 1 列の $(i,1)$ を r で置き換えたものとする。第 2 列以降は，T の第 2 列以降 $\overline{T}$ にこの操作を帰納的に適用して r' を挿入したものとする。最終的には必ず終結の場合に到達する。

この操作を *row insertion* に対して **column insertion** と呼ぶ (第 1 列，第 2 列，... の順に書き換えていくからである)。

column insertion では等しい文字をあとから挿入するもののほうが小さいかのように扱っていることに注意されたい。

ここで *row insertion* と *column insertion* に右からの矢印と左からの矢印を用いるのは，次の著しい性質と関係がある。(このことは対称群の元の場合に Schensted が示した [**Sche**]。一般の場合はそれから導かれる。)

命題 2.8　$T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$, r, $s \in [n]$ とする。このとき次が成立する。

$$r \to (T \leftarrow s) = (r \to T) \leftarrow s$$

証明の概略　$r \to T$ における挿入の軌跡 (変化の生じた場所の集合) と $T \leftarrow s$ における挿入の軌跡は，高々一つの箱で交わる。交わらなければ，交換可能はやさしい。交わる場合，$r \to T$ でそこに入る元 r' と $T \leftarrow s$ でそこに入る元 s' の大小を $r' \leqq s'$ と $r' > s'$ の場合に分けて，この付近がどうなるかを注意深く見ればよい。 ∎

これを用いると次が示せる。

命題 2.9 $w \in [n]^f$ に対して次が成立する。

$$w(1) \to (\cdots \to (w(f-1) \to (w(f) \to \phi))\cdots) = (\cdots((\phi \leftarrow w(1)) \leftarrow w(2)) \leftarrow \cdots) \leftarrow w(f)$$

証明　定理 2.8 から形式的にすぐ従う。∎

これを対称群の元の場合に適用して言い換えれば，次が得られる。これも Schensted による。

命題 2.10 $\mathfrak{S}_f$ の最長元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & f \\ f & f-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ を w_0 で表すとき，$\mathfrak{S}_f$ の任意の元 w に対して次が成立する。

$$P(ww_0) = P(w)'$$

(ただし，$'$ は左上から右下に向かう対角線に関して転置した*tableau* を表す。[M] における *conjugate partition* の記号を*tableau* にも応用したものである。)

証明　数字がすべて異なるので，*row insertion*, *column insertion* とも場合分けに等号はいらない。その場合 $(T \leftarrow r)' = r \to (T')$ が成立する。このことと，定理 2.9 を $ww_0 = w(f)\,w(f-1)\,\cdots\,w(1)$ に適用したものとから出る。∎

2.4. sliding algorithm と reverse word の Q-symbol

w と ww_0 の *Q-symbol* の間の関係を見るために，Schützenberger が明らかにした *jeu de taquin* (もしくは *sliding algorithm*) との関係が重要である。後に述べる Berele の Sp 版の中でも必要になるので，少し一般的に定義しておく。

定義 λ は *partition*, $(i,j) \in \lambda$ (λ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合とみなす) とするとき，写像 $T\colon \lambda \setminus \{(i,j)\} \to \mathbb{N}$ を*shape* λ の (i,j)-**punctured tableau** という。(i,j) をその穴という。(i,j)-*punctured tableau* T が **semistandard** であるとは，穴を飛ばして，各行が非減少 ($\leqq$) 数列，各列が増加 ($<$) 数列であることをいう。

注意　次の例では，穴に数字を埋めて，*punctured* でない *semistandard tableau* にする方法

はないが，それでも *punctured tableau* としては *semistandard* であるという。

1	3	3
2		4
3	4	5

定義の続き T を *shape* λ の (i,j)-*punctured tableau* とするとき，

(1) $R(T)$ は T の穴と右隣を交換したもの(右隣がなければ *undefined*),

(2) $D(T)$ は T の穴と下隣を交換したもの(下隣がなければ *undefined*),

(3) $L(T)$ は T の穴と左隣を交換したもの(左隣がなければ *undefined*),

(4) $U(T)$ は T の穴と上隣を交換したもの(上隣がなければ *undefined*)

とする。

注意 1 以上は Berele [**Ber**] の記号である。ただし，*undefined* とするところは Berele の定義を少々変更した。

注意 2 T は *semistandard* な *punctured tableau* であるとすると，

(1) 穴に右隣も下隣もある場合，$R(T)$ と $D(T)$ のいずれか一方のみが *semistandard* である。

(2) 穴に右隣があるが下隣がない場合，$R(T)$ は *semistandard* である。

(3) 穴に下隣があるが右隣がない場合，$D(T)$ は *semistandard* である。

$U(T)$ と $L(T)$ についても同じことがいえる。

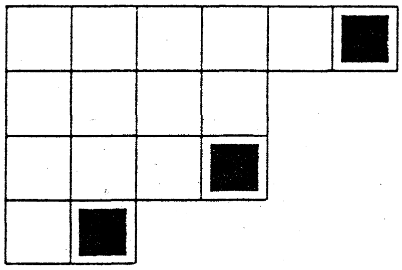
定義の続き T を *semistandard* な *punctured tableau* とするとき，

(1) $D(T)$ と $R(T)$ のうち *semistandard* のほうを $\overline{A}(T)$ とおく (両方 *undefined* — すなわち穴が *shape* の凸角にある — なら $\overline{A}(T)$ は *undefined* とする)。そして列 $(T,\ \overline{A}(T),\ \overline{A}^2(T),\ \ldots)$ において *undefined* になる直前を $A(T)$ とおく。

(2) $L(T)$ と $U(T)$ のうち *semistandard* のほうを $\overline{B}(T)$ とおく (両方 *undefined* — すなわち穴が $(1,1)$ にある — なら $\overline{B}(T)$ は *undefined* とする)。そして列 $(T,\ \overline{B}(T),\ \overline{B}^2(T),\ \ldots)$ において *undefined* になる直前を $B(T)$ とおく。

ここでは A を **sliding**, B を **inverse sliding** と呼ぶ。

Young *diagram* の凸角とは，次の図の黒い部分のような *cell* のことである。



注意 Sp 版以外の場合の議論にも用いることを意図しているため，$\overline{A}$，$\overline{B}$ の定義も Berele のものと微妙に異なる。

partition λ を *fix* したとき，A と B は次のような全単射を与える。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{穴が } \textit{shape } \lambda \text{ の } (1,1) \text{ にある} \\ \textit{punctured semistandard tableaux}\end{array}\right\}$$
$$A \Big\downarrow \Big\uparrow B$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{穴が } \textit{shape } \lambda \text{ の凸角にある} \\ \textit{punctured semistandard tableaux}\end{array}\right\}$$

無論 *weight* は保存される。

定義 T を成分がすべて異なる *semistandard tableau* とするとき，$(1,1)$ 成分を取り除いて *punctured tableau* を作り，それに上で定義した A を施した結果を*shape* が λ より一つ小さい *tableau* と見たものを $\Delta(T)$ と書く。

重要なのは Schützenberger の示した次の事実である。

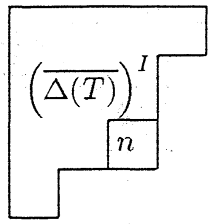
命題 2.11 $q_1 < q_2 < \cdots < q_f$ をすべて自然数とし，また $p_1, p_2, \ldots, p_f$ を f 個の互いに異なる自然数とする。$w = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_f \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_f \end{pmatrix}$，$w' = \begin{pmatrix} q_2 & \cdots & q_f \\ p_2 & \cdots & p_f \end{pmatrix}$ とおくとき，次が成立する。

$$Q(w') = \Delta(Q(w))$$

証明は省略する（[Schü] 参照)。

これを用いると，対称群の元 w と ww_0 の *Q-symbol* の間の関係を記述することができる。

定義 $\lambda \vdash f$ とし，$T \in \mathrm{STab}(\lambda)$ とするとき，$T^I \in \mathrm{STab}(\lambda)$ を (帰納的に) 次で定める：$\Delta(T)$ は数字 2 から f までが 1 個ずつ現れる *tableau* となるが，数字を 1 ずつ小さいものに書き換えてできる *standard tableau* を$\overline{\Delta(T)}$ で表すことにする。このとき

$T^I =$ 

とおく。ただし数字 n は T に属するが $\Delta(T)$ には属しない箱に書き込む。

こう定めると，

命題 2.12 $w \in \mathfrak{S}_f$ に対して次が成立する。

$$Q(ww_0) = (Q(w)^I)'$$

(ただし，$'$ は左上から右下に向かう対角線に関して転置した*tableau* である。)

3. Berele による Sp の version

A. Berele は [Ber] において，§1.5 (B) の Robinson-Schensted 対応の Sp 版というべき §1.5 (E) のような対応を構成した。ここでは Berele の対応を具体的に紹介する。

この様な全単射を構成する前提として，*semistandard tableau* と *standard tableau* に相当するものを見つける必要がある。*semistandard tableau* の類似物 (*P-symbol* として使うもの) は，$Sp(2n, \mathbb{C})$ の既約表現の重複度を数えるのに使えるもので，できれば既約表現の空間の *basis* として解釈可能なものが望ましい。*standard tableau* の類似物 (*Q-symbol* として使うもの) は$V^{\otimes f}$ の既約成分のラベルづけに使えるもので，既約表現 $\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ と自然表現 (*vector* 表現) のテンソル積の既約分解の規則から作ることができるはずである。

3.1. $Sp(2n)$-tableau

まず既約表現のラベルづけからはじめる。$Sp(2n, \mathbb{C})$ を定義するのに，$\mathbb{C}^{2n}$ 上の *nonsingu-*

lar な交代形式はすべて $GL(2n,\mathbb{C})$ のもとで共役であるから，どれをとってもよいが，行列

$$J=\begin{pmatrix} &&&&&&&1\\ &&&&&&1&\\ &&&&&\iddots&&\\ &&&&1&&&\\ &&&-1&&&&\\ &&\iddots&&&&&\\ &-1&&&&&&\\ -1&&&&&&& \end{pmatrix}$$

に対応する交代形式をとれば，*maximal torus* として

$$T=\{\,t=\mathrm{diag}(t_1,t_2,\dots,t_n,t_n^{-1},\dots,t_2^{-1},t_1^{-1})\mid t_i\in\mathbb{C}^*\ (1\leqq i\leqq n)\,\}$$

をとることができ，$\widehat{T}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{rat}}(T,\mathbb{C}^*)$ とおくと，

$$\widehat{T}\ni\chi_{\boldsymbol{m}}\ \longleftrightarrow\ \boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n\quad \text{ただし}\quad \chi_{\boldsymbol{m}}(t)=t_1^{m_1}t_2^{m_2}\dots t_n^{m_n}\quad(t\in T)$$

により $\widehat{T}\cong\mathbb{Z}^n$ である。

$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)$, $\boldsymbol{m}'=(m_1',m_2',\dots,m_n')$ のとき，$\widehat{T}\ni\chi_{\boldsymbol{m}}$, $\chi_{\boldsymbol{m}'}$ の間に順序 $\geqq$ を

$$\chi_{\boldsymbol{m}}\geqq\chi_{\boldsymbol{m}'}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{i}m_j\geqq\sum_{j=1}^{i}m_j'\quad(1\leqq i\leqq n)\quad\text{かつ}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_j\equiv\sum_{j=1}^{n}m_j'\ (\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}$$

で定義する。(実は J を上のようにとると，$B=Sp(2n,\mathbb{C})\cap\{\text{上半三角行列}\}$ が Borel *subgroup* になり，$\chi_{\boldsymbol{m}}\geqq\chi_{\boldsymbol{m}'}$ は $\chi_{\boldsymbol{m}}-\chi_{\boldsymbol{m}'}$ が B に対応する *positive roots* の和で書けるという条件である。)

$Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約多項式表現 ($Sp(2n,\mathbb{C})$ の場合は，既約有理表現といっても同じになる) は，この順序に関する *highest weight* をとることにより，*dominant integral weight* の集合

$$\{\,\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n\mid m_1\geqq m_2\geqq\cdots\geqq m_n\geqq0\,\}$$

と 1 対 1 に対応する。これは長さ n 以下の *partition* の集合と見なしてよい。この意味で長さ n 以下の *partition* λ に対応する $Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約表現を $\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ で表す。

King の定義した，$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ の *weight* の重複度を数えるための *tableau* は次のようなものである。記号，証明は **[Ko-Te]** にあわせてある。

定義 $[\overline{n}] = \{1, \overline{1}, 2, \overline{2}, \ldots, n, \overline{n}\}$ とおく。ただし，$[\overline{n}]$ の元の間には

$$1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n < \overline{n}$$

のように全順序が入っているものとする。以下では，*partition* λ を表す Young 図形の中に $[\overline{n}]$ の元を書き込んだものを，*shape* が λ の *tableau* と呼ぶことにする。*shape* λ の *tableau* T が $Sp(2n)$**-tableau** であるとは，

(Sp1) $T(i,1) \leqq T(i,2) \leqq \cdots \leqq T(i,\lambda_i) \quad (1 \leqq i \leqq l(\lambda))$,
(Sp2) $T(1,j) < T(2,j) < \cdots < T(\lambda'_j, j) \quad (1 \leqq j \leqq \lambda_1)$,
(Sp3) (*shape chain* 条件) $T(i,j) \geqq i \quad (1 \leqq i \leqq l(\lambda))$

の三つの条件を満たすことをいう。

T を $Sp(2n)$-*tableau* とするとき，$1 \leqq i \leqq n$ の各 i に対して，$m_i(T) = (i$ の個数$) - (\overline{i}$ の個数$)$ とおいてできる数列 $(m_1(T), m_2(T), \ldots, m_n(T))$ をT の **weight** という。*shape* が λ の $Sp(2n)$-*tableau* 全体の集合を $\mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda)$ で表し，*shape* が λ で *weight* が $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ の$Sp(2n)$-*tableau* 全体の集合を $\mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda; \boldsymbol{m})$ で表す。

注意 1 $Sp(2n)$-*tableau* は **[Ko-Te]** の用語であり，**[Ber]** では *Sp-standard tableau* と呼んでいる。

注意 2 (Sp3) は，$1 \leqq i \leqq n$ の範囲のすべての i に対して，$i, \overline{i}$ 以下の文字が占めている部分の行数が i 以下であることと同値である。

$\chi \in \widehat{T}$ に対し，$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ の *weight* χ に属する *weight space* を V_χ で表すとき，$\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\dim V_{\chi_{\boldsymbol{m}}} = \#\mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda; \boldsymbol{m})$$

が成立する。

これは次のことから来ている。

$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ を $Sp(2n,\mathbb{C})$ の部分群

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{n-1}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{n-1}} \\
\hline
A & 0 & B \\
\hline
0 & \begin{matrix} t_n & 0 \\ 0 & t_n^{-1} \end{matrix} & 0 \\
\hline
C & 0 & C \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{ただし} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n-2,\mathbb{C}),\ t_n \in \mathbb{C}^*$$

に制限すると,

$$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})} \downarrow_{Sp(2n-2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*} \cong \sum_{\substack{(\mu,\nu)\ \text{s.t.} \\ \lambda/\mu,\ \mu/\nu\ :\ \text{hor. strips} \\ l(\nu)\leqq n-1}} \nu_{Sp(2n-2,\mathbb{C})} \otimes \chi_{|\mu/\nu|-|\lambda/\mu|}$$

と分解する (*multiplicity-free* ではない)。そこで λ/μ の部分に $\overline{n}$ を, μ/ν の部分に n を書き込むことにする。この分解を続けていくと T まで到達し, *weight* の重複度と $Sp(2n)$-*tableau* の関係が得られる。

3.2. up-down tableau

λ を長さが n 以下の *partition* とし, $\square_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ を $Sp(2n,\mathbb{C})$ の自然表現 (*vector* 表現) とすると, $\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ と $\square_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ のテンソル積は次のように分解する。

$$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})} \otimes \square_{Sp(2n,\mathbb{C})} \cong \bigoplus_{\substack{\mu\succ\lambda\ \text{or}\ \mu\prec\lambda \\ l(\mu)\leqq n}} \mu_{Sp(2n,\mathbb{C})}$$

従って, $\square_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ の表現空間を V とおくとき, $V^{\otimes f}$ 中の $Sp(2n,\mathbb{C})$ に関する既約成分は

$(\phi = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(f)}) \in \mathcal{P}^{f+1}$, ただし

$$l(\lambda^{(i)}) \leqq n, \quad \lambda^{(i-1)} \prec \lambda^{(i)} \text{ または } \lambda^{(i-1)} \succ \lambda^{(i)} \quad (1 \leqq i \leqq f)$$

なる列によってラベルづけされる。これは §1.5 (E) で定義した **up-down tableau** 正確には *n-symplectic up-down f-tableau* すなわち $\mathrm{UDTab}_{n,f}$ の元にほかならない。これが *standard tableau* の概念の拡張であることも §1.5 (E) に述べた。

3.3. Berele の insertion

Berele の 対応を構成する基本ステップは，$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})} \otimes \square_{Sp(2n,\mathbb{C})}$ の分解に対応する次のような全単射を定義することである。(これを Berele の *row insertion* (BRI) と呼ぼう。)

$$\mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda) \times [\overline{n}] \xrightarrow{\sim} \coprod_{\substack{\mu \succ \lambda \text{ or } \mu \prec \lambda \\ l(\mu) \leqq n}} \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\mu)$$

定義 $T \in \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda)$ 及び $r \in [\overline{n}]$ とするとき，新しい *tableau* $T \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} r$ を次のように定める。

(1) $T \leftarrow r$ (Schensted の意味の *row insertion* によって得られる *tableau*) が $Sp(2n)$-*tableau* ならば$T \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} r = T \leftarrow r$ とする。

(2) $T \leftarrow r$ が $Sp(2n)$-*tableau* でないとき

$T \leftarrow r$ は *semistandard* ではあるから，$Sp(2n)$-*tableau* でないということは，定義中の条件 (Sp3) を満たさない場所があるということである。k 及び $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ それに$j_1, j_2, \ldots, j_k$ を補題 2.1 と同じ意味に定める。T と $T \leftarrow r$ の違いは，r が $(1, j_1)$ に入ったことと，r_i が (i, j_i) から (i, j_{i+1}) に移動した$(1 \leqq i \leqq k-1)$ ことである。第 1 行に入った r は条件 (Sp3) には抵触しえないから，r_i $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の中に，$r_i \leqq \overline{i}$ なのに第 $i+1$ 行に送られてしまったものがある。そういう i のうち最小のものを i^* とおく。

このとき

(1) $r_{i^*} = \overline{i^*}$,

(2) $r_{i^*-1} = i^*$,

(3) T の第 i^* 行は $\boxed{i^*}\boxed{\cdots}\boxed{i^*}\boxed{\overline{i^*}}\boxed{\cdots}$ $(j_{i^*} = 1$ なら i^* はない$)$ の形をしていた

が成立しなくてはならない。なぜならば，まず (1) は，i^* の選びかたより $r_{i^*} \leqq \overline{i^*}$ でなければならないが，仮に $r_{i^*} \leqq i^*$ とすると，補題 2.1 により $r_{i^*-1} < i^*$ でなければならないのでi^* の最小性に反することになるからである。(2) は，(1) と補題 2.1 により $r_{i^*-1} \leqq i^*$ でなければならないが，仮に $r_{i^*-1} < i^*$ とすると上と同様に i^* の最小性に反することにな

るからである。(3) は，(1) により $T(i^*, j_{i^*}) = \overline{i^*}$ であることと*semistandardness*，そして $Sp(2n)$-*tableau* の定義 (Sp3) により第 i^* 行には $\overline{i^*-1}$ 以下の元は現れ得ないことによる。

ここで，r_{i^*-1} 以前の移動を行ったあと，第 i^*-1 行から追い出された $r_{i^*-1} = i^*$ と，まだ第 i^* 行にある $r_{i^*} = \overline{i^*}$ とを捨て去り，(i^*, j_{i^*}) を穴にして *semistandard punctured tableau* を作る。これに §2.4 の *punctured tableau* のところで定義した A を施して得られた*tableau* を $T \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} f$ と定める。

注意 1 上で作った *semistandard punctured tableau* は，穴以外の中身に関しては$Sp(2n)$-*tableau* の条件 (Sp3) を満たす。操作 A は中身を左と上に動かすだけだから，できあがった $T \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} r$ も$Sp(2n)$-*tableau* になる。

注意 2 上では定義の自然さから (i^*, j_{i^*}) を穴にしたが，そのかわりに，(i^*, j_{i^*}) の $\overline{i^*}$ を取り去ったあと第 i^* 行の i^* を一つずつ右に移動させて$(i^*, 1)$ を穴にして A を施すとしても同じものが定義できる。A を施すと，i^* が順に左に戻って穴が (i^*, j_{i^*}) まで移動していき，上で定義した *punctured tableau* と同じものになるからである。Berele は $(i^*, 1)$ を穴にして定義している。$(i^*, 1)$ を穴にするほうが，全単射の証明はしやすい。

定理 3.1 λ を長さ n 以下の *partition* とするとき，

$$\text{(BRI)} \qquad \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda) \times [\overline{n}] \ni (T, r) \quad \longmapsto \quad (T \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} r) \in \coprod_{\substack{\mu \succ \lambda \text{ or } \mu \prec \lambda \\ l(\mu) \leqq n}} \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda)$$

は全単射である。

証明 逆写像になるべき写像 (IBRI) (*inverse* Berele *row insertion*) を作る。U を右辺の元とする。U の *shape* を μ とする。$\mu \supset \lambda$ ならば，(RI) の逆写像 (IRI) を U に施して得られる (T, r) を(IBRI) による U の像と定める。(IRI) は *semistandardness* 条件を保つ上に，文字を上に移動するだけだから *shape chain* 条件も保つ。従ってこのときの T はちゃんと $Sp(2n)$-*tableau* になる。

$\mu \subset \lambda$ ならば，U を穴が λ の凸角にある *punctured tableau* とみなし，§2.4 で定義した *inverse sliding* B を少し修正したものを施す。

その修正を述べるために，まず上で述べた通り，穴を飛ばして$Sp(2n)$-*tableau* の条件を満たしている *punctured tableau* を，**punctured $Sp(2n)$-tableau** と呼ぶことにしよう。そし

て T が *punctured* $Sp(2n)$-*tableau* のとき，穴が第 2 列以降にあれば，$B(T)$ は再び *punctured* $Sp(2n)$-*tableau* になることに注意しよう。これを確かめるには，*semistandardness* 条件については $B(T)$ の定義から明らかであるから，*shape chain* 条件だけ考慮すればよい。

$B(T)=L(T)$ ならば数字は縦方向には移動していないので，T が *shape chain* 条件を満たしていることから$B(T)$ も満たしていることは明らかである。

次に $B(T)=U(T)$ の場合を考える。穴の位置を (i,j) とすれば，穴の左隣も，第 i 行にあるから T の *shape chain* 条件より i 以上である。(穴は第 2 列以降にある場合を考えているから，左隣は存在する。) $B(T)=U(T)$ になるのは定義により (穴の左の元) $\leqq$ (穴の上の元) の場合であるから，$B(T)$ で新たに穴の位置に降りてくる元 (もと穴の上隣だった元) はi 以上であり，この元も *shape condition* に反することはない。

以上により，$B(T)$ が *punctured* $Sp(2n)$-*tableau* でなくなるのは，穴が $(i,1)$ の位置にあって，上隣の元 $T(i-1,1)$ が $\overline{i-1}$ 以下の場合だけである。そこで，$U(T)$ の定義を変更して，この場合には *undefined* とし，$B(T)$ もそれにともなってこの場合には($L(T)$ も $U(T)$ も *undefined* となるので) *undefined* とする。すると，この意味で $B(T)$ が *undefined* な $Sp(2n)$-*tableau* 全体と $A(T)$ が *undefined* な $Sp(2n)$-*tableau* 全体は，A およびこの意味の B とによって全単射で結ばれる。

$$
\left\{\begin{array}{l}
\text{穴が } shape\ \lambda \text{ の } (1,1) \text{ にあるか,}\\
\text{第 1 列の第 2 行以下にあってかつ}\\
\text{上隣を降ろすと } shape\ chain \text{ 条件に反する}\\
punctured\ Sp(2n)\text{-}tableaux
\end{array}\right\}
$$
$$
A\Big\downarrow\Big\uparrow B
$$
$$
\left\{\begin{array}{l}
\text{穴が } shape\ \lambda \text{ の凸角にある}\\
punctured\ Sp(2n)\text{-}tableaux
\end{array}\right\}
$$

話をもとに戻し，このように修正した B を U に施してできた穴の位置を $(i^*,1)$ としよう。(もし第 i^* 行に文字 i^* があればそれらを左に詰めて穴を右に移動してから) 穴に $\overline{i^*}$ を入れる。(これが $Sp(2n)$-*tableau* であることは明かである。)そして (IRI) と同様にして，U の第 i^*-1 行までの部分に，文字 i^* を戻していく。$\widetilde{\text{(RS)}}$ の逆写像も $Sp(2n)$-*tableau* という性質を保存するから，その結果得られる *tableau* T はやはり $Sp(2n)$-*tableau* である。第 1 行から飛び出してきた元を r とおき，(T,r) を (IBRI) による U の像と定める。

これが (BRI) の逆写像になることは容易に確かめられる。 ∎

3.4. Berele の対応

次が目的の，$V^{\otimes f}$ の Sp に関する分解に対応する，Berele の全単射である。

定理 3.2 自然数 n と 0 以上の整数 f を *fix* するとき，

$$\text{(Ber)} \qquad [\overline{n}]^f \ni w \longmapsto (P^{\mathcal{B}}(w), Q^{\mathcal{B}}(w)) \in \coprod_{\substack{\lambda \vdash f \text{ or } f-2 \\ \text{or } \ldots \\ l(\lambda) \leqq n}} \mathrm{Sp}_{2n}\mathrm{Tab}(\lambda) \times \mathrm{UDTab}_{n,f}(\lambda)$$

は全単射である。ここで $P^{\mathcal{B}}(w)$ は ϕ に $w(1), w(2), \ldots, w(f)$ をこの順で (BRI) で *insert* してできる $Sp(2n)$-*tableau*, $Q^{\mathcal{B}}(w)$ はその挿入に伴う *shape* の変化を表す *up-down tableau* である。

証明 定理 3.1 を反復適用すればよい。∎

S. Sundaram は [**Su86**] の中で，この性質を詳しく調べているので，詳しいことはそちらに譲ることにする。

参 考 文 献

[**Ba-V**] Dan Barbash and David Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex clasical groups*, Math. Ann. **259** (1982), 153–199.

[**Ben-Str**] Georgia Benkart and Jeffrey Stroomer, *Tableaux and insertion schemes for spinor representations of the orthogonal Lie algebra* $\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$, preprint, 1989.

[**Ber**] Allan Berele, *A Schensted-type correspondence for the symplectic group*, J. Combin. Theory A **43** (1986), 320–328.

[**Ber-Re**] Allan Berele and A. Regev, *Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras*, Adv. in Math. **64** (1987), 118–175.

[**Br**] Richard Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. of Math. **38** (1937), 854–872.

[**D-Ji-M**] Etsuro Date, Michio Jimbo and Tetsuji Miwa, *Representations of $U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ at $q=0$ and the Robinson-Schensted correspondence*, RIMS preprint, vol. 656, 1989.

[**E-Gr**] Paul H. Edelman and Curtis Greene, *Balanced tableaux*, Adv. in Math. **63** (1987), 42-99.

[**Gr74**] Curtis Greene, *An extension of Schensted's theorem*, Adv. in Math. **14** (1974), 254–265.

[**Has87**] Kohji Hasegawa, *Dual pairs on spinors — cases of (C_m, C_n) and $(C_m^{(1)}, C_n^{(1)})$*, Proc. Japan Acad. **63 A** (1987), 356–359.

[**Has88**] ______________, *Dual pairs on spinors*, (to appear).

[**Ja-Ke**] Gordon D. James and Adalbert Kerber, "The representation theory of the symmetric group," Encycropedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, Reading, 1981.

[**Ki**] Ronald Curtis King, *Weight multiplicities for the classical groups*, in "Group theoretical methods in phisics, 4th international colloquium, Nijmegen 1975," Lecture Notes in Physics, vol. 50, Springer-Verlag, New York, pp. 490–499.

[**Kn68**] Donald E. Knuth, "The art of computer programming, vol. 1," 5.1.4, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[**Kn70**] ______________, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific J. Math. **34** (1970), 709–727.

[**Ko**] Kazuhiko Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups — by means of the universal characters —*, Adv. in Math. **74** (1989), 57–86.

[**Ko-Te**] Kazuhiko Koike and Itaru Terada, *Young-diagrammatic methods for the restriction of representations of complex classical Lie groups to reductive subgroups of maximal rank*, Adv. in Math. (to appear).

[**M**] Ian G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials," Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[**N**] Hiroshi Naruse, *On an isomorphism between Specht module and left cell of $\mathfrak{S}_n$*, preprint, 1988/89.

[**P**] Robert A. Proctor, *A Schensted algorithm which models tensor representations of* *the orthogonal group*, preprint, 1988/89.

[**Ro**] Gilbert de B. Robinson, *On the representations of the symmetric group*, Amer. J. Math. **60** (1938), 745–760.

[**Sa**] Bruce E. Sagan, *Shifted tableaux, Schur Q-functions, and a conjecture of R. Stanley*, J. Combin. Theory A **45** (1987), 62–103.

[**Sche**] Craige Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math. **13** (1961), 179–191.

[**Schü**] Marcel-Paul Schützenberger, *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, Math. Scand. **12** (1963), 117–128.

[**Ste87**] John R. Stembridge, *Rational tableaux and the tensor algebra of* $\mathfrak{gl}_n$, J. Combin. Theory A **46** (1987), 79–120.

[**Ste89**] ______________, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*, Adv. in Math. **74** (1989), 87–134.

[**Su86**] Sheila Sundaram, *On the combinatorics of representations of* $Sp(2n, \mathbb{C})$, Ph. D. Thesis, M.I.T., 1986.

[**Su**] ______________, *Orthogonal tableaux and an insertion algorithm for* $SO(2n+1)$, J. Combin. Theory A (to appear).

[**Te**] Itaru Terada, *Berele の insertion と spinor 上の dual pair*, preprint, 1989.

[**Th**] Glânffrwd P. Thomas, *On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions*, Adv. in Math. **30** (1978), 8–32.

[**Wey**] Hermann Weyl, "The Classical Groups, their invariants and representations," 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1946.

[**Wo**] D. Worley, *A theory of shifted Young tableau*, Ph. D. Thesis, M.I.T., 1984.