数理解析研究所講究録
第 705 巻 1989 年 104-114


# Flag manifold と Robinson-Schensted 対応

松澤 淳一 (京大・理)

この報告は Steinberg の論文 [St1] “An occurence of the Robinson-Schensted correspondence” の紹介である。主定理そのものは既に [St2] に述べられてい、[Sp] に証明も見られるが、[St1] では Robinson-Schensted 対応における操作の意味が幾何学的にかつ具体的に与えられているので、その様子を原論文に沿って紹介したい。

§1 Jordan block と Tableau の対応、$X^u$ の既約成分の構成
§2 Robinson-Schensted 対応
§3 key lemma, reduction と Robinson-Schensted 対応
§4 主定理、$X^u$ の既約成分と Robinson-Schensted 対応

## §1 Jordan block と Tableau の対応、$X^u$ の既約成分の構成

$V$ を $n$ 次元複素ベクトル空間、$X$ を flag manifold とする。$u \in GL(V)$ を unipotent な元とし、

$$X^u := \{F \in X \mid u \cdot F = F\}$$

とする。$u$ の Jordan block の大きさを、大きい順に並べて得られる $n$ の分割、つまり Young 図形を

$$\lambda(u) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \quad \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$$

で表す。$F = (V_0, \ldots, V_n) \in X^u$ $(dim V_i = i)$ とすると $V_i$ は $u$-stable だから $u \mid_{V_i}$ に対応する Young 図形の大きさは $i$ が増すにつれ一つずつ増える。そこで

$$\lambda(u \mid_{V_i}) \setminus \lambda(u \mid_{V_{i-1}})$$

に数字 $i$ を入れてできる Young tableau を $T(F)$ と書く。$T(F)$ は shape が $\lambda(u)$ で、数字 $1,\ldots,n$ が一つずつ入った standard tableau である。

(例) $n=3$,

$$u=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \lambda(u)=(2,1)=\begin{array}{|c|c|}\hline \phantom{0}&\phantom{0}\\\hline \phantom{0}&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$F=(\{0\},\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_3\rangle,\langle e_1,e_2,e_3\rangle)$$

$$F'=(\{0\},\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2\rangle,\langle e_1,e_2,e_3\rangle)$$

ここで $e_i=(0,\ldots\overset{i}{\breve{1}}\ldots,0)$ であり $\langle e_1,e_2\rangle$ は $e_1$ と $e_2$ で生成される $V$ の部分空間。このとき、

$$T(F)=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\qquad T(F')=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$N=u-1$ とする。$N$ は巾零元である。

**補題1.1**. $V\supset W$ を $V$ の超平面とすると

$$W \text{ が } N-stable \Leftrightarrow W\supset NV$$

(証明) $N$ は $V/W$ に巾零に作用するが、$W$ は余次元 1 なので、$V/W$ 上 0 で作用する。(終)

**補題1.2**. $k\geqslant 1$ とする。$\lambda(u)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ としたとき

(a) $$codim_{kerN^k}(kerN^{k-1})=\#\{\lambda_i\mid\lambda_i\geqslant k\}$$

(b) $$codim_{NV+kerN^k}(NV+kerN^{k-1})=\#\{\lambda_i\mid\lambda_i=k\}$$

(証明) (a) 大きさ $m$ の Jordan block を $J_m$ とする ($J_m^m=0$)。$k\leqslant m$ ならば

$$codim_{kerJ_m^k}(kerJ_m^{k-1})=1$$

よって $N$ の各ブロックごとに考えれば (a) を得る。

(b) $k > m$ なら

$$NV + kerJ_m^k = NV + kerJ_m^{k-1} = V$$

$$J_mV = \{{}^t(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbf{C}\}$$

$k < m$ なら

$$kerJ_m^k = \{{}^t(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \mid x_i \in \mathbf{C}\}$$

だから

$$J_mV + kerJ_m^k = \{{}^t(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbf{C}\}$$

よって

$$codim_{J_mV+kerJ_m^k}(J_mV + kerJ_m^{k-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

各ブロックごとに考えれば (b) を得る。(終)

**補題1.3**. $W$ を $N$-*stable* な超平面。$j$ を $W \supset kerN^{j-1}$ かつ $W \not\supset kerN^j$ をみたす唯一の数とする。このとき $\lambda_i = j$ となる $i$ が存在する。さらに $i$ をこのようなもののうち最大のものとすると、$u|_W$ のタイプ $\lambda'$ は

$$\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_r).$$

(証明) $W \supset kerN^{j-1}$, $W \not\supset kerN^j$, かつ $NV \subset W$ だから補題1.2 (b) より $\lambda$ は大きさ $j$ の成分をもつ。つまり $^\exists\lambda_i = j$. $W$ との交わりを考えると、$W$ が超平面であることより

$$codim_{W\cap kerN^k}(W \cap kerN^{k-1}) \neq codim_{kerN^k}(kerN^{k-1})$$

となるのは $k = j$ のときのみで、このとき右辺と左辺の差は 1 となる。$NV \subset W$ であることと考え合わせ、再び補題1.2(b) より $u|_W$ のタイプ $\lambda'$ は $\lambda$ において $\lambda_i$ を $\lambda_i - 1$ におきかえたものとなる ($i$ は $\lambda_i = j$ となる最大のもの)。(終)

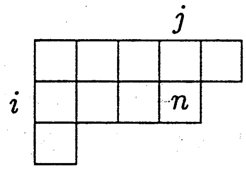
[$X^u$ の既約成分の構成]

$X^u$ の既約成分の、ある稠密な開集合について考える。

$u$ を unipotent な元とし、$u$ の Jordan type を $\lambda(u)$, shape が$\lambda(u)$ の standard tableau を $T$ とする ($T$ には 1 から $n$ までの数字が重複なしに、右向きと下向きに増加しながら入っている)。

$$C(T) := \{F \in X^u \mid T(F) = T\}$$

とすると $C(T)$ の閉包 $\overline{C(T)}$ は $X^u$ の既約成分となっていることをみる。standard tableau $T$ に対し $T(F)=T$ となる flag $F=(V_0,\ldots,V_n)\in X^u$ の作り方を考える。$T$ の $(i,j)$ の位置に $n$ があったとする。




補題 1.3 より

$$V_{n-1}\supset NV+kerN^{j-1},\qquad V_{n-1}\not\supset NV+kerN^{j}$$

よって超平面 $V_{n-1}$ の取りかたは $Proj(V/(NV+kerN^{j-1}))$ の、ある稠密開集合の点の取りかたに対応する。次元については、補題 1.2(b) より

$$NV+kerN^{j-1}\subset NV+kerN^{j}\subset NV+kerN^{j+1}\subset\cdots\subset V$$

$$codim_{NV+kerN^{k-1}}(NV+kerN^{k})=\#\{i\mid\lambda_i=k\}$$

だから

$$dimProj(V/(NV+kerN^{j-1}))=i-1,\quad(i=\#\{k|\lambda_k\geqslant j\})$$

$V_{n-2}$ については、上と同じことを $V_{n-1}$, $N|_{V_{n-1}}$ (これを $N_{n-1}$ と書くことにする) について考えればよい。従って $C(T)$ は

$$Proj(V/(NV+kerN^{j-1}))\times Proj(V_{n-1}/(N_{n-1}V_{n-1}+kerN_{n-1}^{j_{n-1}}))\times\cdots$$

の稠密開集合となる。よって $C(T)$ は次元が $\sum_{i=1}^{n}(i-1)\lambda_i$ の既約な代数多様体となる。ところで、この次元は $T$ によらない。よって $C(T)$ は $T$ によらず等次元となる。従って $C(T)$ は $X^u$ の既約成分の稠密で開な代数多様体となる。

## §2 Robinson-Schensted 対応

$$ST(\lambda):=\left\{\begin{array}{l}1\text{ から }n\text{ までの数字が重複なく入った大きさ }n,\text{ shape }\lambda\text{ の}\\ \text{standard tableaux}\end{array}\right\}$$

とする。このとき Robinson-Schensted 対応

$$\coprod_{\lambda:\text{大きさ } n \text{ の分割}} ST(\lambda) \times ST(\lambda) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathfrak{S}_n \quad (n\text{次対称群})$$

は以下のように与えられる。

$T, T' \in ST(\lambda)$ とする。$T'$ において数字 $n$ の書かれた箱と同じ位置にある $T$ の箱の数字を $x$ とする。$x$ のある行の一つ上の行において、$x$ より小さい数字の中で最大のものを $x'$ とする。$x'$ のあった箱に $x$ を入れ、$x'$ についてはその一つ上の行について $x$ と同じことを $x'$ についても行なう。これを繰返して最後に第一行めから追出された数字を $w_n$ とする。次に $T'$ の $n-1$ についても $n$ と同様の事をして $w_{n-1}$ を得る。このようにして $w_1, w_2, \ldots, w_n$ を得るが、$(T, T')$ に対して

$$w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

を対応させる対応を Robinson-Schensted 対応という。

(例)

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

とすると

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \to \underset{w_3 = 1}{\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right)} \to \underset{w_2 = 3}{\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array}\right)} \to \underset{w_1 = 2}{(\phi, \phi)}$$

$$\therefore w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

§3 key lemma, reduction と Robinson-Schensted 対応

$GL(V) \ni u$ を unipotent な元、$u$ の Jordan type を $\lambda(u) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $N = u - 1$ とする。

$1 \leqslant k \leqslant \lambda_1$ に対し、$V$ の $N$-stable な超平面 $W$ が $k$ に関して'generic'とは次の $(*)$ をみたすことをいう。

$$(*)\begin{cases} i = max\{m \mid \lambda_m \geqslant k\}, \quad \lambda_i = j \text{としたとき} \\ W \supset NV + kerN^{k-1} = NV + kerN^{j-1} \\ W \not\supset NV + kerN^{j} \end{cases}$$

このとき $N|_W$ のタイプは $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$ となる（∵補題1.3）。

**補題3.1**. $W$ を $N$-stable な超平面で次の $(**)$ をみたすものとする。

$(**)$ $\qquad N|_W$ のタイプ $\lambda'$ は $\quad (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$

(a) $i = 1$ のとき $(**)$ をみたす $W$ はただ一つに決る。
(b) $i > 1$ のとき、$X$ を、$(**)$ をみたし $X \neq W$ なる $N$-stable な超平面で、$\lambda_i = j$ に関して generic とする。$Y = X \cap W$ とすると $N|_Y$ のタイプ $\lambda''$ は $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$ となる。

(証明) $NV + kerN^{j-1}$ を含む超平面のなす空間の次元は $i-1$ $(\lambda_i = j)$ だったから（§1 $C(T)$ の構成参照）(a) はよい。また $i > 1$ のときは条件をみたす $X(\neq W)$ がとれる。$Y = X \cap W$ とすると $Y$ は $N$-stable。$Y$ は $W$ の超平面で $W \not\supset kerN^j$ だったから $Y \not\supset kerN^j$。

$$\therefore Y \supset NW + ker(N|_W)^{j-1}, \quad Y \not\supset NW + ker(N|_W)^j$$

さて、$\lambda'$ において $j$ 以上の part の最後は $\lambda_{i-1}$ 。よって、この節の最初に述べたことより $\lambda''$ は $\lambda'$ において $\lambda_{i-1}$ を $\lambda_{i-1} - 1$ に置き換えたもの、すなわち $\lambda'' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$。（終）

**[定義]** (RELATIVE POSITION). $X \ni F = (V_0, \dots, V_n)$, $F' = (V'_0, \dots, V'_n)$ とすると次の (1), (2) をみたす $\mathfrak{S}_n$ の元と、$V$ の基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在する。

(1) $v_1, \dots, v_i$ は $V_i$ の基底 $(1 \leqslant i \leqslant n)$
(2) $v_{w(1)}, \dots, v_{w(i)}$ は $V'_i$ の基底 $(1 \leqslant i \leqslant n)$

ここで $w$ はただ一つに決る（Buruhat 分解)。このとき $(F, F')$ は relative position $w$ にあるという。これを

$$w = w(F, F')$$

と書くことにする。

［注］$G$ を $(G/B, G/B)$（$B$ は Borel 部分群）に $g\cdot(B_1, B_2) = (gB_1, gB_2)$ で作用させる。$(g_1B, g_2B)$ と $(B, g_1^{-1}g_2B)$ とは同じ軌道にある。いま $g_1^{-1}g_2 \in B^{\exists}wB$（$w$ は Weyl 群の元）とすると、$(g_1B, g_2B)$ は relative position $w$ にあるという。

$X^u$ の既約成分 $C$, $C'$ の元 $F$, $F'$ が 'generic' とは次の条件をみたすことをいう。$F = (V_0, \ldots, V_n)$, $F' = (V_0', \ldots, V_n')$ とするとき

(1) $$V_m \cap V'_{n-k} \not\subset V'_{n-k-1}$$

となる $m, k$ に対して

(2) $$V_m \cap V'_{n-k-1} \neq V_{m-1} \cap V'_{n-k}$$

が成立。

いま

$$W_m^{(0)} = V_m \cap V_n', \quad W_m^{(1)} = W_m^{(0)} \cap V'_{n-1} = V_m \cap V'_{n-1}, \ldots$$

すなわち

$$W_m^{(k)} = V_m \cap V'_{n-k}$$

とすると、(1) の条件は

$$W_m^{(k)} \not\subset V'_{n-k-1}$$

と書ける。このような $m, k$ に対し、(2) の条件は

$$\begin{aligned}(2) &\iff (V_m \cap V'_{n-k}) \cap V'_{n-k-1} \neq V_{m-1} \cap V'_{n-k} \\ &\iff W_m^{(k)} \cap V'_{n-k-1} \neq W_{m-1}^{(k)}\end{aligned}$$

と書ける。

特に $k = 0$ の場合を次の補題で詳しくみてみよう。

**補題3.2 (key lemma).** $C(T)$, $C(T')$ の元を $F$, $F'$ とする。ただし $F$, $F'$ は、上に述べた意味で 'generic ' にとる。$F = (V_0, \ldots, V_n)$, $F' = (V_0', \ldots, V_n') \in X^u$ とし

$F'_1 = (V'_0, \ldots, V'_{n-1})$ を $F'$ の subflag とする。$F'_1$ から $F$ の subflag $F_1$ を次のように作る。

$$r = min\{i \mid V_i \not\subset V'_{n-1}\}$$
$$W_i = V_i \cap V'_{n-1} \quad (i \neq r) \text{ とし}$$
$$F_1 = (W_0, \ldots, W_{r-1}, W_{r+1}, \ldots, W_n) \qquad (W_n = V'_{n-1})$$

このとき、$(T(F_1), T(F'_1))$ は $(T(F), T(F'))$ から Robinson-schensted 対応の最初の操作で得られる tableaux となる。($T(F_1)$ は $\lambda(u|_{W_i}) \setminus \lambda(u|_{W_{i-1}})$ $(i \neq r+1)$ には $i$ を、$\lambda(u|_{W_{r+1}}) \setminus \lambda(u|_{W_{r-1}})$ に $r+1$ を入れたもの)

(証明) $T(F_1)$ には数字 $1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$ が入っている。ただし、$W_k = V_k$ $(k < r)$ だから $k(<r)$ は $T(F_1)$ において $T$ と同じ位置にあり、$k(>r)$ の位置が変る。いま $T$ の $(i,j)$ の位置にあった数字 $m$ が $T(F_1)$ において位置を変えたとすると次が成立する。

(*claim*).

(a) $i = 1$ のとき $m = r$ となり $m$ が $T$ から消える。
(b) $i > 1$ のとき $m$ は行を一つ上がる。上がった行においては $m$ より小さい数が動く。

$\because$)

$$\underbrace{\lambda(u|_{W_0}),\ \lambda(u|_{W_1}), \ldots, \lambda(u|_{W_{r-1}}),}_{1\sim r-1 \text{ が入る。位置は } T \text{ と同じ}}\ \underbrace{\lambda(u|_{W_{r+1}}), \ldots, \lambda(u|_{W_n})}_{r+1\sim n \text{ が入る}}$$

(a) $m > r$ とする。$(i,j)$ の位置にあった数字 $m$ が動いたということは $\lambda(u|_{W_m})$ は $\lambda(u|_{V_m})$ において第 $i$ 行を一つ減らしたものということである。つまり補題 1.3 で $V = V_m$, $W = W_m$, $i$ と $j$ は $m$ の位置 $(i,j)$ としたものである。一方 $V_{m-1} \subsetneqq V_m$ も同じ性質をもつ。しかも $W_m \neq V_{m-1}$ ($F, F'$ は generic だから) よって補題 3.1 (a) より $i > 1$ 。すなわち $i = 1$ ならば $m = r$ 。

(b) $i > 1$ とする。補題 3.1 (b) において $W$ を $W_m = V_m \cap V'_{n-1}$ とし、$V_{m-1} \neq W_m$ だから $V_{m-1}$ を $X$ とすると

$$\begin{aligned} W_m \cap V_{m-1} &= V_m \cap V'_{n-1} \cap V_{m-1} \\ &= V_{m-1} \cap V'_{n-1} \\ &= W_{m-1} \end{aligned}$$

だから補題 3.1 (b) より $u|_{W_{m-1}}$ のタイプは $\lambda(u|_{W_m})$ の $i-1$ 行を一つ減らしたものとなる。この減ったところに $m$ がいるわけだから、$m$ は $T(F_1)$ の $i-1$ 行にあることになる。つまり $T(F_1)$ においては、$m$ は $T(F)$ にあった位置より一つ上の行にある。以上より claim がいえた。

さて、こうして $m$ は一つ上の行に上がり、その行にあって $m$ より小さい数字を追出す。追出された数字についても同じ議論が成立つから、これを繰返し、最後に claim (a) により $r$ が一行目から追出される。$T_1$ の作り方の一意性より、こうした数の動きかたは一通りに決る。また $T_1$ は standard だから $m$ によって追出される数は、$m$ より小さいもののうち最大のものである。なぜなら、$m$ より一つ上の行に数字が

$$a_1\ a_2\ \cdots a_{k-1}\ a_k \cdots \qquad (a_i < m,\ 1 \leqslant i \leqslant k)$$

と並んでいて、たとえば $a_{k-1}$ が追出されたとすると

$$a_1\ a_2\ \cdots m\ a_k \cdots$$

となってしまい、右向きに増加にならなくなってしまう。従って以上に述べた数字の動かしかたは Robinson-Schensted 対応の操作による数字の動かしかたになっている。(終)

## §4 主定理、$X^u$ の既約成分と Robinson-Schensted 対応

さて、§3 で述べたアルゴリズムを繰返していくことになるのだが、補題 3.2 の直前に述べた意味で $F$ と $F'$ を generic にとっておけば、補題 3.2 の議論が次々と適用できて、次の定理を得る。

定理 (Steinberg). $u \in GL(V)$ を unipotent な元とし、$X^u$ を $u$ で固定される flag 全体のなす代数多様体とする。$\lambda(u)$ を $u$ の Jordan type とし、$T$, $T'$ を shape が $\lambda(u)$ の standard tableaux とする。$T$, $T'$ に対応した $X^u$ の既約成分をそれぞ

れ $C$, $C'$ とする (§1 参照)。$F$, $F'$ をそれぞれ $C$, $C'$ の元とし、§3 で述べた意味で generic なものとする。このとき

$$w(F,\ F') = w(T,\ T')$$

(左辺は relative position (§3)、右辺は Robinson-schensted 対応)

(証明)

$$F = (V_0, \ldots, V_n) \quad F' = (V_0', \ldots, V_n') \quad w = w(F,\ F')$$

$$V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle \qquad V_i' = \langle e_{w(1)}, \ldots, e_{w(i)} \rangle \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

とする。$V_{n-1}' \not\supset V_i$ となる最小の $i$ は $w(n)$。補題 3.2 より、これは Robinson-Schensted 対応のアルゴリズムで得られる最初の数字である。さて補題 3.2 中の subflag $F_1$, $F_1'$ は

$$\begin{aligned} F_1 &= (V_0, \ldots, V_{w(n)-1},\ V_{w(n)+1} \cap V_{n-1}', \ldots, V_n \cap V_{n-1}') \\ &= (W_0, \ldots, W_{w(n)-1},\ W_{w(n)+1}, \ldots, W_n) \\ F_1' &= (V_0', \ldots, V_{n-1}') \end{aligned}$$

$$W_i = \begin{cases} \langle e_1, \ldots, e_i \rangle, & \text{for } i < w(n) \\ \langle e_1, \ldots, \check{e}_{w(n)}, \ldots, e_i \rangle, & \text{for } i > w(n) \end{cases}$$

であり $V_{n-2}' = \langle e_{w(1)}, \ldots, e_{w(n-2)} \rangle$ だから $W_i \not\subset V_{n-2}'$ となる最小の $i$ は $w(n-1)$。これを繰返せば補題 3.2 より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ w(1) & w(2) & \ldots & w(n) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

は Robinson-Schensted 対応で $(T,\ T')$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の元に他ならない。よって定理が証明された。(終)

(例) §1 の例において $F$, $F'$ は generic でない。そこで

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

に対し、次のように $F,\ F'$ を generic にとり直す。

$$C(T) = \{(\{0\},\ \langle ke_1 + le_3\rangle,\ \langle e_1, e_3\rangle,\ \langle e_1, e_2.e_3\rangle) \mid k,\ l \in \mathbf{C}\}$$
$$C(T') = \{(\{0\},\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2 + se_3\rangle,\ \langle e_1, e_2.e_3\rangle) \mid s \in \mathbf{C}\}$$

となっているから、$C(T)$ の元で $l \neq 0$ となる元 $F$ をとり、$C(T')$ の元 $F'$ を

$$F' = (0,\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2 + se_3\rangle,\ \langle e_1, e_2.e_3\rangle)$$

とし

$$v_1 = ke_1 + le_3 \quad (l \neq 0),\ v_2 = e_1,\ v_3 = e_2 + se_3$$

とすると

$$F = (0,\ \langle v_1\rangle,\ \langle v_1, v_2\rangle,\ \langle v_1, v_2.v_3\rangle)$$
$$F' = (0,\ \langle v_2\rangle,\ \langle v_2, v_3\rangle,\ \langle v_1, v_2.v_3\rangle)$$

となるから $(F,\ F')$ は relative position $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ にある。一方、§2 の例より $w(T,T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. よって

$$w(F,\ F') = w(T,\ T') = w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 参考文献

[Sp] N. Spaltenstein, "Classes unipotentes de sous-groupes de Borel," Lecture Notes in Math. no. 946, Springer-Verlag, 1982.

[St 1] R. Steinberg, *An occurence of the Robinson-Schensted correspondence*, J. of Alg. **113** (1988), 523–528.

[St 2] R. Steinberg, *On the desingularization of the unipotent variety*, Invent. Math. **36** (1976), 209–224.