

無限ネットワーク上のマルティンゲールとその応用

岡田正己 (Masami Okada) 東北大学教養部(数学)

以下は塩田氏・関口氏との共同研究 [1] による。

無限グラフネットワーク N の一点 0 を固定する。[1] において、 $P_t(0,0) = O(t^{-\beta})$ $t \uparrow \infty$ なる β は、次で与えられることを予想した。

予想 N 上の標準拡散過程 X_t が再帰的のとき、

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\|u_n\|_1^2 \|u_n\|_2^{-2})}{\log(\|u_n\|_2^2 \varepsilon(u_n, u_n)^{-1})}, \quad \text{但し } \{u_n\} \text{ は}$$

アドミッシブルなものとする。即ち、 u_n はコンパクトサポート K_n を持ち、 $(K_n \uparrow N, n \rightarrow \infty)$ 、その内点では 0 以外で調和であり、任意の調和関数 h に対して

$$\int_N h(x) u_n(x) dx \rightarrow h(0), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{なるものとする。}$$

注意 $\beta \leq 1$ のとき、我々の考えているのは遠方で、アースして得られる電圧の与える関数列 $\{u_n\}$ である。 $\beta > 1$ の時は、 0 以外で調和、というのを、

$\Delta u_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ が何かで、おきかえなければならぬが、まずもう少しケーススタディが必要と思われる。

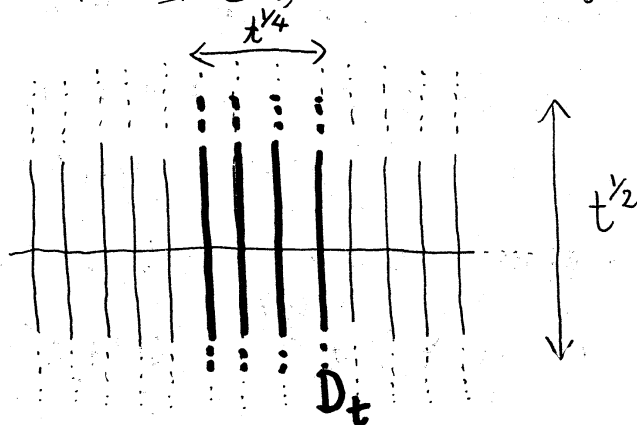
上の予想は、マルティンゲールの考え方を using している。この考え方を適用して、いくつかの具体例に対して、 β を計算してみよう。予想、というわけは、次のようなことを仮定せざるを得ないからである。いずれ、誰かが厳密な証明を与えることを期待する。

仮説 X_t が再帰的であるような場合、 X_t は、特徴的な振がりの範囲を持つ、即ち、増大領域列 $\{D_t\}$ があって、

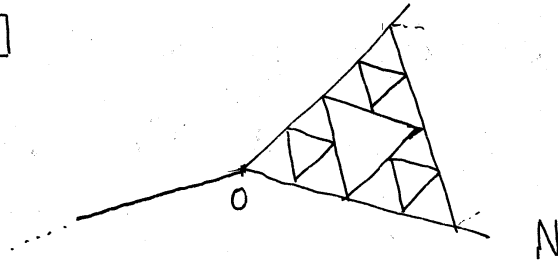
$$(i) \quad \forall c > 0 \text{ に対して } \exists \delta_c > 0 \text{ で } \inf_{t > 0} P_0(X_t \in D_{ct}) > \delta_c$$

$$(ii) \quad \sup_t P_0(X_t \notin D_{mt}) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ (急減少)}$$

例えば、下の図を参照して下さい。

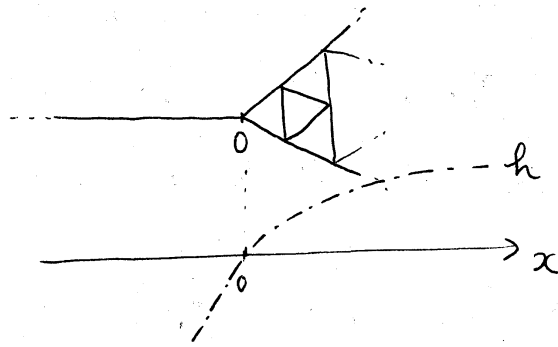


①



半直線と pre Sierpinski
Gasket をつなげると

これに対しては $P_t^{(1)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{\log 3}{\log 5}}\right)$ ということは、
わかっている。調和関数 h としては、たいたい、



$$h(x) \doteq \begin{cases} x & \dots x < 0 \\ \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2} & \dots x > 0 \end{cases}$$

とすればよい。 x の指数 $\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}$ というのは、電圧を
計算することで得られる。半直線をつなげない、も
もとの pre S.G. では、0点から出発したブラウン粒
子は、 t 時刻後、0点からの距離が $O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right)$ の
範囲に留まり、かつ抗がっていることが知られてい
る。さて、今の場合も、そうであることを、直観的に
導いてみよう。 t 時刻後 $x < 0$ の範囲に粒子の存在す
る確率を q_t とすると、 $x < 0$ では $O(t^{1/2})$, $x > 0$
では $O(d_t)$ の範囲に抗がる、とすると、マルティンゲ
ール性より、 (i) $(1 - q_t) d_t^{\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}} = O(q_t t^{\frac{1}{2}})$ である。

③

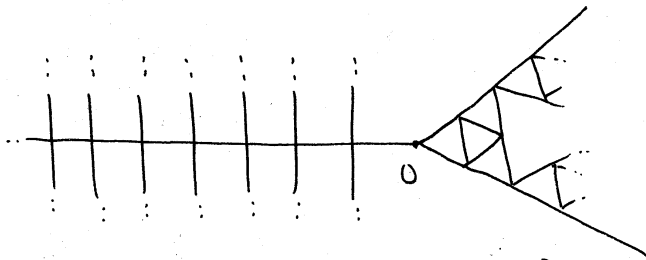
次に 0 点で、確率密度(関数)は連続、即ち、 t の
 オークは、一致しなければならない、ということよ

り、 (ii) $O\left(\frac{q_t}{t^{1/2}}\right) = \frac{1-q_t}{d_t^{\frac{\log 3}{\log 2}}}$ (⊙ 全長 $d_t^{\frac{\log 3}{\log 2}}$ の範囲に
 平均的に広がっている)

(i) と (ii) より、 $\begin{cases} d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right) \\ q_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 5} - \frac{1}{2}}\right) \end{cases}$ が、出る。 $\frac{\log 2}{\log 5} \doteq 0.4307$
 $\frac{1}{2} - \frac{\log 3}{\log 5} \doteq 0.1826$

結論 このような結合では、そう珍しいことは、
 おこらない。粒子は、当然 pre S. G. 側に見出される
 確率が大きい。

②



この時は $P_t^{(2)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{3}{4}}\right)$ ということが、わかっ
 ている。こんどは $d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right)$ だが、① とちがう

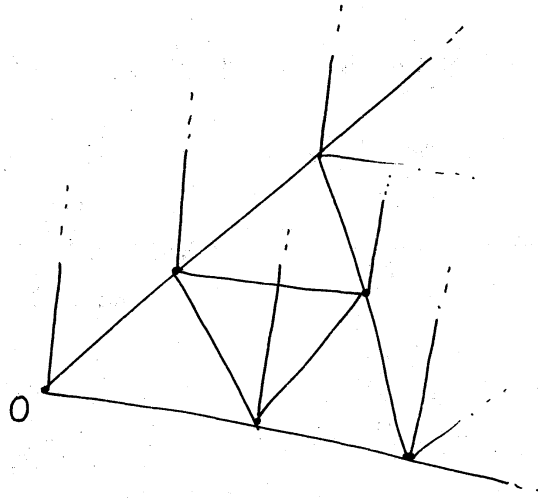
点は粒子が pre S. G. 側に見出される確率 $1 - q_t =$
 $O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 5} - \frac{3}{4}}\right) \doteq O\left(t^{-0.067}\right)$ となる事である。

示し方は、同様なので略す。 $x < 0$ の部分での調和
 関数は、各枝上は定数となるものを採用し、

特徴的振がりの大きさが $x < 0$ で $t^{\frac{1}{4}}$, $x > 0$ で d_t

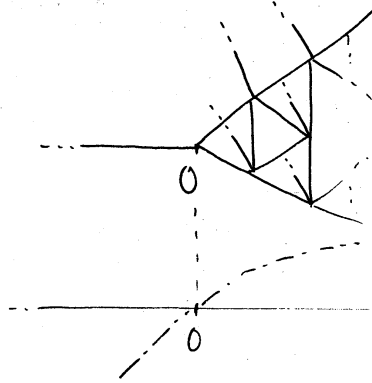
とおけばよい。この場合も、結合前の様子で、大体
 わかるわけである。

3



pre S. G. の節点に
垂直線をとったもの

これを



とみて、 h としては、 $x > 0$
 $\therefore \doteq x^{\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}}$ 、垂直の枝
 上は、定数であるものを採用
 する。 $x > 0$ の拡がりの大さ
 x は d_t とおく。

すると、 \mathbb{R}^2 に「ゲージ」性より (i) $O(q_t t^{\frac{1}{2}}) = (1 - q_t) d_t^{\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}}$

確率密度が $x \geq 0$ で一致することより

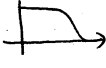
$$(ii) O\left(\frac{q_t}{t^{1/2}}\right) = \frac{1 - q_t}{d_t^{\frac{\log 3}{\log 2} \left(t^{\frac{1}{2}} + 1\right)}}$$

この2つの式から $d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{2 \log 5}}\right)$, $q_t = t^{\frac{\log \frac{5}{3}}{2 \log 5} - \frac{1}{2}}$

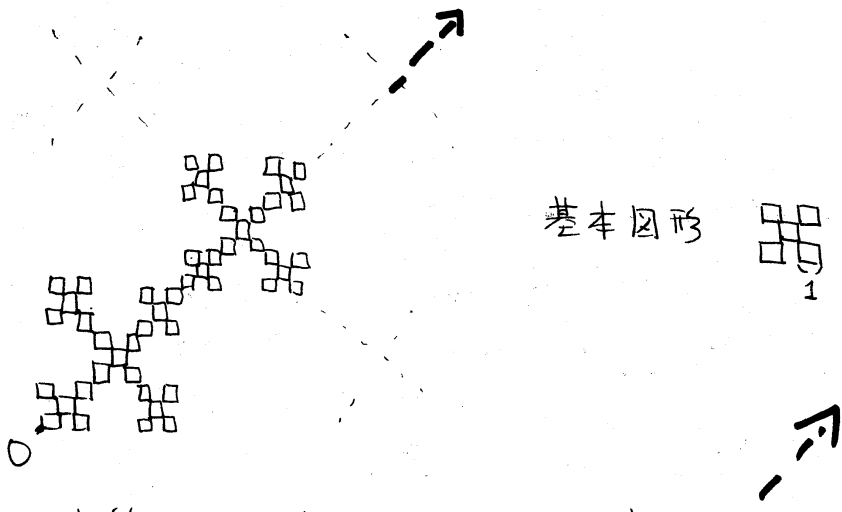
$$\text{従って } P_t^{(3)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log 3}{\log 5} + 1\right)}\right) \doteq O\left(t^{-0.8413}\right)$$

が成る。

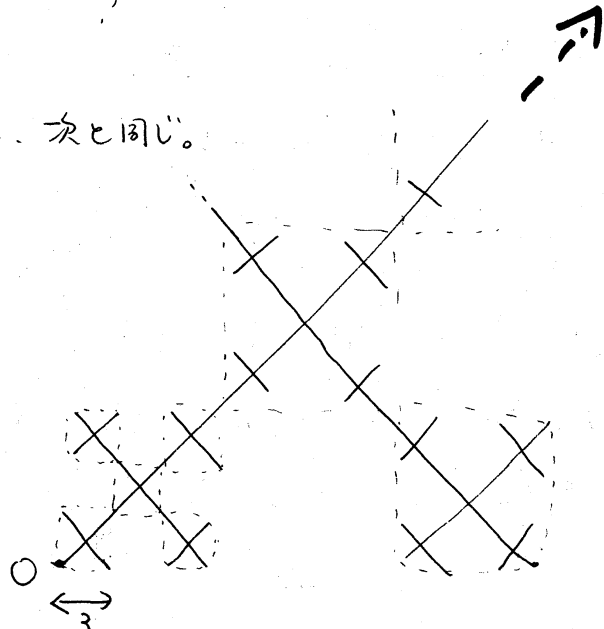
注意 別解として $\inf_{u \in \mathbb{R}^2} \frac{\log \|u\|_1^2 / \|u\|_2^2}{\log \|u\|_2^2 / \epsilon(u, u)}$ を計算する方法

もある。 Q としては、0点で最大値をとり、各垂直の枝上で  式の形をしたものを選ばなければならない。 \inf というこゝから d_t のオーダーが出る仕組みになっている。同じ値が出るのは喜ばしいことで、何か数学的事実が潜んでいるのだろう。

④



これは、本質的に、次と同じ。

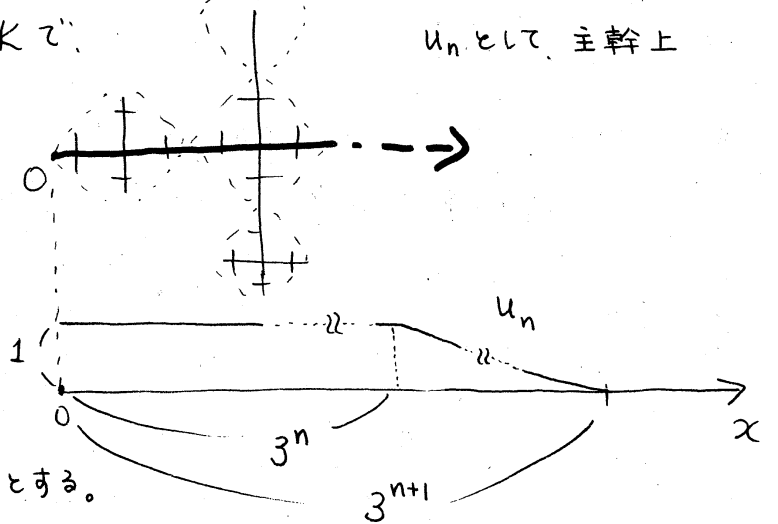


形から、これには Carlen-Kusuoka-Stroock が「ズバリ」適用できて、 $\|P_t^{(4)}\| = O(t^{-\alpha})$ $t \uparrow \infty$ なる α は

$$\alpha = \inf_{u \neq 0} \frac{\log \|u\|_1^2 / \|u\|_2^2}{\log \|u\|_2^2 / \epsilon(u, u)}$$

より、計算できる。形から、 $\alpha = \beta$

だから！ もちろん、 \inf をとる u が、わかりやすい事、 $\mathcal{E}(u, u)$ も計算しやすい事が、カギであるが、この場合は、OKで、 u_n として、主幹上



と定め、枝上は定数とする。

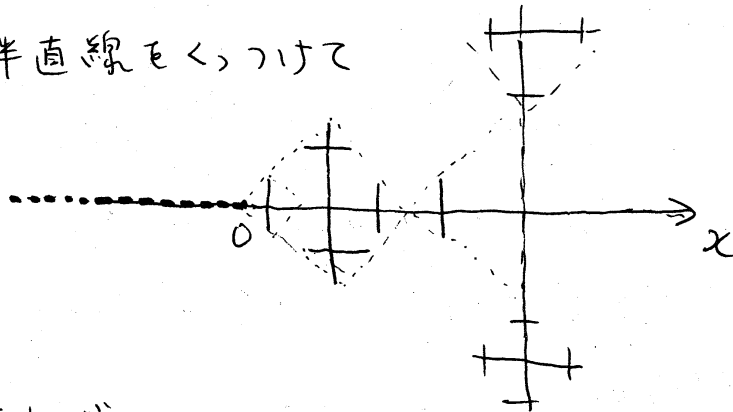
$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|u_n\|_2^2 / \|u_n\|_2^2}{\log \|u_n\|_2^2 / \mathcal{E}(u, u)} = \log 5 / \log 15 \doteq 0.594$$

従って $P_t^{(4)}(0,0) = O(t^{-\frac{\log 5}{\log 15}})$ 、また、 $d_t^{\frac{\log 5}{\log 3}} = O(t^{\frac{\log 5}{\log 15}})$

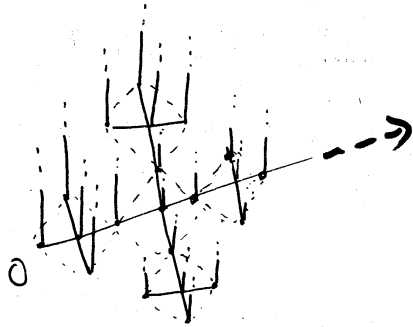
から、 $d_t = O(t^{\frac{\log 3}{\log 15}}) \doteq O(t^{0.4057})$ も出る。

注意 $O(t^{-\frac{1}{2}}) > O(d_t^{\frac{\log 5}{\log 3}})$ であること、即ち $d_t \geq O(t^{\frac{\log 3}{2 \log 5}})$

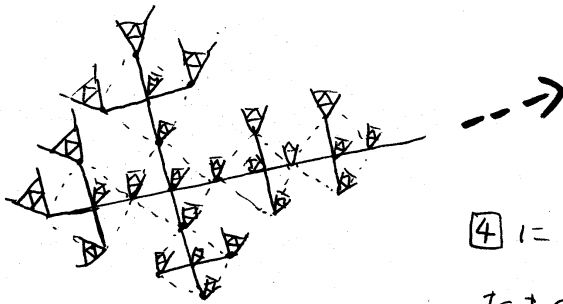
$\doteq O(t^{0.3413})$ が、あらかじめわかっておれば、 $\square \sim \square$ までのマルチスケール法も適用可能である。それには仮想的に半直線もくっつけて



とすれば"よい。

[5]₁[4] に半直線 E をつけたもの

マルティンゲールの考え方で、同様にして、 $d_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{2 \log 15}}\right)$
 が出て、 $P_t^{(5_1)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 5}{\log 15}\right)}\right)$ となる。

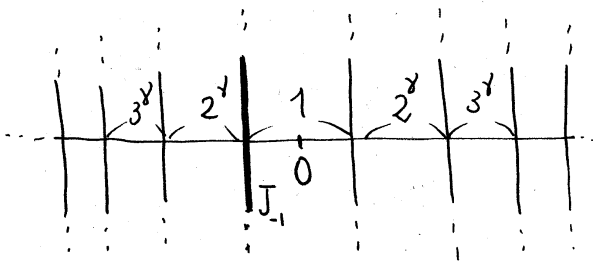
[5]₂[4] に pre. S.G. E をつけたもの

となる。

この時も同様にして $d_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 15} \cdot \frac{\log 5}{\log 5}}\right)$, $P_t^{(5_2)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{\log 3}{\log 5} - \frac{\log 3}{\log 15}}\right)$

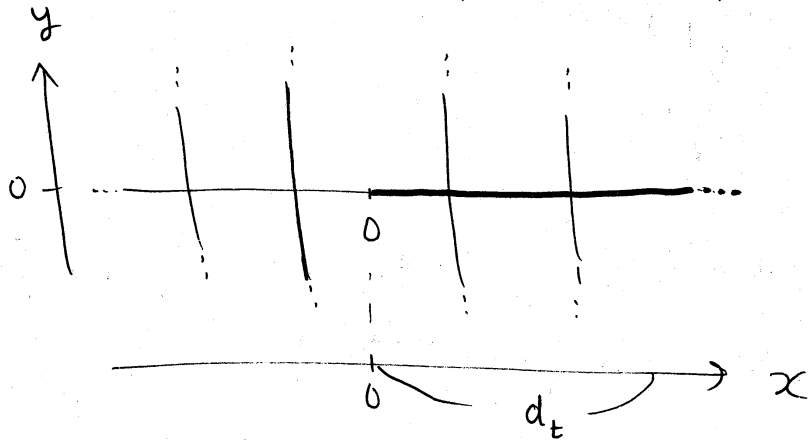
$\equiv O\left(t^{-0.8712}\right)$ となる。

[6]



このタイプもマルティンゲールの考えが適用できる。
 便宜上 $-1 < \gamma \leq 0$ としておく。この逆の方が、今は

$x < 0$ では、 J_1 上 $f(x) = \frac{|y|}{2}$ 、それより左は定数 $= -\frac{1}{2}$ とする。 $x > 0$ では主幹上 $f(x) = x$ 、枝上は定数とする。



さて、抗がりの範囲を d_t とすれば、 d_t の直に枝は $n = O(d_t^{\frac{1}{\gamma+1}})$ 本出ている。確率 q_t で J_1 に見出される、とすれば、マルチスケールでの考え方によって、

$$(i) O(q_t \sqrt{t}) + (\frac{1}{2} - q_t) \frac{1}{2} = O(d_t)$$

ところで、 J_1 に見出される確率 q_t は枝の数 n 本だから、たいたい平均的なので、(ii) $q_t = O(\frac{1}{n}) = O(d_t^{-\frac{1}{\gamma+1}})$

である。これから、 $d_t = O(t^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma+2)}})$ 、となって、即ち、全長 $O(\sqrt{t} \times n) = O(t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2(\gamma+2)}}) = O(t^{\frac{\gamma+3}{2(\gamma+2)}})$ の範囲に抗がるわけなので、 $P_t^{(6)}(0,0) = O(t^{-\frac{\gamma+3}{2(\gamma+2)}})$ となる。

以上のやり方以外に $\inf \frac{\log}{\log}$ 法、電圧法なども同じ値を与えるのは心強い！

□ snow fractal

これは本邦古来のかごめ模様 に似たものから、入れ子
(或は輸入の?) (又は亀形)

式に定まる簡単なフラクタル模型なのだが、その上で
調和関数 h (の増大 order) がわからないので $P_t^{(h)}$
の減少オーダーが計算できない。この例の様に、逆
に計算できない無限グラフネットワークの方が、ずっと
多いのかもしれない。やや悲観的になってきたので、
この辺で。

問題 一般に 対称な図形 に対して h の増大オーダーの
計算法をえよ。

Reference(s)

[1] M. Okada - T. Sekiguchi - Y. Shiota

Heat kernels on Infinite Graph Networks and
Deformed Sierpiński Gaskets.

(submitted)

[2] 以下は、上の文献を御覧下さい。