数理解析研究所講究録
第 706 巻 1989 年 102-109

Lacunary Walsh Series の従う極限定理について

筑波大学数学系　　福山克司 (Katusi Fukuyama)

0. 前言　研究集会の後，楠岡成雄先生に助言を頂き，講演した内容より更に発展を見ましたので，ここではそれを整理して述べたいとおもいます．有益な助言を下さった楠岡先生及び講演の機会を与えて下さった風巻紀彦先生そしてこの結果の計算の基礎の大部分を負うところの高橋茂先生にこの場を借りて深くお礼申し上げたいと思います．

1. 主定理　lacunary Walsh series の従う平均中心極限定理についてのべる．整数列 $\{n_m\}$ は間隙条件

(1.1)　$n_{m+1} / n_m \geqq 1+cm^{-\alpha}$, $c > 1$ and $0 \leqq \alpha < 1/2$

をみたすとする．Walsh 函数列の部分列 $\{w_{n_m}\}$ を確率空間 ($[0,1]$, dx) 上の確率変数列と思い，その挙動を調べる．簡単のために $\xi_j = w_{n_j}$ と書くことにする．実数列 $\{a_n\}$ は

$$A_n^2 = a_1^2+\cdots+a_n^2 \to \infty , \quad a_n = o(A_n n^{-\alpha}(\log n)^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty$$

をみたすとする．この条件のもとでは，

(1.2) $\lambda_n \to 0$, $A_n\lambda_n \to \infty$ and $a_n = O(A_n n^{-\alpha}(\log n)^{-1/2} \lambda_n)$ as $n \to \infty$

を満たすような正数列 $\{\lambda_n\}$ がとれるので，これを１つ固定する．$S_n = a_1\xi_1 +\cdots+ a_n\xi_n$ とし $A_n^{-1}S_n$ の分布函数を F_n ，標準正規分布の分布函数を G とする．

定理　$\| F_n - G \|_\infty = O(\lambda_n^{1/4})$ and $\| F_n - G \|_1 = O(\lambda_n^{2/7})$ as $n \to \infty$.

注意　この二つの評価より $\| F_n - G \|_p$ ($1 \leqq p \leqq \infty$) の評価が得られる．
また，$a_n \equiv 1$ の場合には，$\lambda_n = n^{\alpha-1/2}(\log n)^{1/2}$ ととれる．

2. 準備　高橋先生の論文の方針に概ね従い計算していく．

$$p(k) = \max \{ m ; n_m \leqq 2^k \} , \quad \Delta_k = S_{p(k+1)} - S_{p(k)} ,$$
$$B_k = A_{p(k+1)} \text{ and } l_k = [\alpha \log p(k) - \log c +1]$$

とおく．このとき

(2.1) $p(k+1) - p(k) = O(p^{\alpha}(k))$, $p(k+1)/p(k) \to 1$ and
$p(k)/p(k-l_k) \to 1$ as $k \to \infty$.

である．実際，

$$2c^{-1}p^{\alpha}(k) \geq 2^{l_k} \geq n_{p(k)} / n_{p(k-l_k)+1} > \prod_{m=p(k-l_k)+1}^{p(k)} (1 + cm^{-\alpha})$$

$$> 1 + \{ p(k) - p(k-l_k) \} cp^{-\alpha}(k)$$

なので

$$p(k) - p(k-l_k) = O(p^{-2\alpha}(k)) \quad \text{as } k \to \infty$$

であるから

$$p(k-l_k) / p(k) = 1 + O(p^{2\alpha-1}(k)) = 1 + o(1) \quad \text{as } k \to \infty$$

となり最後の式が示される．他の２式も同様に示される．

(1.1) と (2.1) より次の評価を得る．

(2.2) $b_k = \max \{ |a_n| ; p(k) < m \leq p(k+1) \}$

$$= O(B_k p^{-\alpha}(k)(\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)}) ,$$

$b'_k = \max \{ b_j ; k-l_k \leq j \leq k \} = O(B_k p^{-\alpha}(k)(\log p(k))^{-1/2})$,

$C_k = \sum_{m=p(k)+1}^{p(k+1)} |a_m| \leq b_k(p(k+1)-p(k)) = O(B_k(\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)})$,

$C'_k = \max \{ C_j ; k-l_k \leq j \leq k \} = O(B_k(\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)})$,

$C''_k = \max \{ C_j ; j \leq k \} = O(B_k\lambda_{p(k)})$ as $k \to \infty$.

補題 1. $E\left(B_N^{-2} \sum_{j=1}^{N} (\varDelta_j^2 - E\varDelta_j^2)\right)^2 = O(\lambda_{p(N)})$ as $N \to \infty$.

証明． $p(k) < i < j \leq p(k+1)$ とすると

$$n_j - n_i \geq n_i c i^{-\alpha} \geq 2^k c p^{-\alpha}(k) \geq 2^{k-\alpha \log p(k) + \log c}$$

なので，$k-l_k \leq s < k$ の範囲の Rademacher 函数 r_s が少なくとも１つ $\xi_i \xi_j$ にかかっている．それ故 $m \leq k-l_k$ なら $E(\varDelta_m^2 - E\varDelta_m^2)(\varDelta_k^2 - E\varDelta_k^2) = 0$ である．さらに
$E(\varDelta_m^2 - E\varDelta_m^2)(\varDelta_k^2 - E\varDelta_k^2)$ は $E\xi_p\xi_q\xi_r\xi_s$ の形の積分の和に書けるが，
$E\xi_p\xi_q\xi_r\xi_s = 1$ となる s は p, q, r について一意的であるから，

$$\left|\sum_{m<k\leq N} E(\Delta_m^2-E\Delta_m^2)(\Delta_k^2-E\Delta_k^2)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N}\ \sum_{m=k-l_k}^{k} E(\Delta_m^2-E\Delta_m^2)(\Delta_k^2-E\Delta_k^2)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N}\ \sum_{m=k-l_k}^{k} C_k^2\ C_m b'_k \ \leq\ \sum_{k=1}^{N} b'_k C'_k l_k C_k^2$$

$$= O\Big(\ \sum_{k=1}^{N} C_k^2 B_k^2 (\log p(k))^{-1} l_k p^{-\alpha}(k)\lambda^2{}_{p(k)}\Big)$$

$$= O\Big(\ \sum_{k=1}^{N} (B_k^2-B_{k-1}^2)(p(k+1)-p(k))B_k^2 p^{-\alpha}(k)\lambda^2{}_{p(k)}\Big)$$

$$= O\Big(\ \sum_{k=1}^{N} (B_k^2-B_{k-1}^2)B_k^2\lambda^2{}_{p(k)}\Big)$$

$$= O\big(\ B_N^4\lambda_{p(N)}^2\big)$$

一方,

$$\sum_{j=1}^{N} E(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)^2 \ \leq\ \sum_{j=1}^{N} E\Delta_j^4 \ \leq\ \sum_{j=1}^{N} C_j^2 E\Delta_j^2 \ \leq\ C''_N \sum_{j=1}^{N} E\Delta_j^2$$

$$= O(B_N^4\lambda_{p(N)}^2) \ \text{ as } N \to \infty \cdot \qquad \square$$

補題2.　ある $1 \geq L_2 > 0$ が存在して $|t| \leq L_2\lambda_{p(N)}^{-1/3}$ ならば,

$$E\exp\left(\left|t^2 B_N^{-2}\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right|\right) \leq 2e$$

をみたす.

証明

$$m(0)=1\ ,\ m(j+1)=\min\{\ m\ ;\ m-l_m \geq m(j)\ \}\wedge N\ ,$$

$$T_j = \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1}(\Delta_k^2-E\Delta_k^2)$$

とすると, $\{T_{2j}\}$, $\{T_{2j+1}\}$ は multiplicative system になる. 即ち

$$ET_{2i_1}\cdots T_{2i_r}=0 \ \text{ and } \ ET_{2i_1+1}\cdots T_{2i_r+1}=0 \ \text{ if } r\in\mathbb{N} \text{ and } i_1<\cdots<i_r$$

が成立する. さらに

$$\|T_j\|_\infty \leq \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} C_k^2 \leq l_{m(j+1)}C'^2_{m(j+1)}$$

$$= O\big(\ B^2_{m(j+1)}(\log p(m(j+1)))^{-1}\lambda^2_{p(m(j+1))}l_{m(j+1)}\big)$$

$$= O(\ B^2_{m(j+1)}\lambda^2_{p(m(j+1))})$$

であるから，

$$\max_j \ \|T_j\|_\infty = O(\ B^2_N\lambda^2_{p(N)}) \quad \text{as } N \to \infty \cdot$$

よってL_2を十分小さく取れば

$$4t^2B_N^{-2} \max_j \|T_j\|_\infty \leqq 1/2 \ , \ t^4B_N^{-2} \max_j \|T_j\|_\infty \leqq 1/32$$

を満たすようにできる．

$$\mathrm{E}\exp\left(\left|t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N(\Delta_j^2-\mathrm{E}\Delta_j^2)\right|\right) = \mathrm{E}\exp\left(\left|t^2B_N^{-2}\sum_j T_j\right|\right)$$

$$\leqq \mathrm{E}\exp\left(t^2B_N^{-2}\sum_j T_j\right) + \mathrm{E}\exp\left(t^2B_N^{-2}\sum_j -T_j\right)$$

$$\leqq \mathrm{E}^{1/2}\exp\left(2t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j}\right)\mathrm{E}^{1/2}\exp\left(2t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j+1}\right)$$

$$+ \mathrm{E}^{1/2}\exp\left(2t^2B_N^{-2}\sum_j -T_{2j}\right)\mathrm{E}^{1/2}\exp\left(2t^2B_N^{-2}\sum_j -T_{2j+1}\right)$$

ここで $e^w \leqq (1+w)e^{w^2}$（ $|w|\leqq 1/2$ ）を用いて最初の積分を評価する．

$$\mathrm{E}\exp\left(4t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j} - 16t^4B_N^{-4}\sum_j T_{2j}^2\right) \leqq \mathrm{E}\prod_j\left(1+\ 4t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j}\right) = 1.$$

ところで，

$$|T_{2j}| = \left|\sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1}(\Delta_k^2-\mathrm{E}\Delta_k^2)\right| \leqq \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1}(\Delta_k^2-\mathrm{E}\Delta_k^2) + 2\sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1}\mathrm{E}\Delta_k^2$$

$$\leqq T_{2j} + 2(B^2_{m(2j+1)}-B^2_{m(2j)})$$

なので

$$16t^4B_N^{-4}\sum_j T_{2j}^2 \leqq 16t^4B_N^{-4}\left(\max_j \|T_j\|_\infty\right)\sum_j |T_{2j}|$$

$$\leqq 16t^4B_N^{-4}\left(\max_j \|T_j\|_\infty\right)\left(\sum_j T_{2j} + 2B_N^2\right)$$

$$\leqq 2t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j} + 1$$

であるから，

$$\mathrm{Eexp}\left(2t^2B_N^{-2}\sum_j T_{2j}\right) \leqq e .$$

他の積分も同様に評価されるので，補題は示された．□

補題3．ある $L_3>0$ が存在して $|t|\leqq L_3$ なら $\mathrm{Eexp}(tB_NS_{p(N+1)}) \leqq e$ が成り立つ．

証明．$|t|\leqq L_3 \leqq 1/2$ なら $2|t|B_N^{-1}C_N'' \leqq 1/2$ となるように L_3 をとる．

$$\mathrm{Eexp}\left(2tB_N^{-1}\sum_{j=1}^N \varDelta_j - 4t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2\right) \leqq E\left(1+2tB_N^{-1}\varDelta_j\right) = 1 .$$

故に，

$$\mathrm{Eexp}(tB_NS_{p(N+1)}) = \mathrm{Eexp}\left(tB_N^{-1}\sum_{j=1}^N \varDelta_j - 2t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2\right)\exp\left(2t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2\right)$$

$$\leqq E^{1/2}\exp\left(2tB_N^{-1}\sum_{j=1}^N \varDelta_j - 4t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2\right)E^{1/2}\exp\left(4t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2\right)$$

$$\leqq e^{2t^2}\ E^{1/2}\exp\left(4t^2B_N^{-2}\sum_{j=1}^N (\varDelta_j^2 - E\varDelta_j^2)\right)$$

ここで L を改めて補題2の条件を満たすように小さくとりなおせばよい．□

3．定理の証明

ここでは

$$e^w = (1+w)\exp\left(2^{-1}w^2 + R(w)\right) ,\ |R(w)|\leqq|w|^3 \quad \text{if} \quad |w|\leqq 1/2$$

を用いる．z は複素数で $8|\mathrm{Im}z|\leqq L_3$ ，$|z|\leqq 2^{-1}L_2\lambda_{p(N)}^{-1/3}$ をみたすとする．

$T_n(z)=\prod_{j=1}^n\left(1+izB_n^{-1}\varDelta_j\right)$ とおくと $ET_n(z)=1$ である．また，

$$|T_n(z)| \leqq \exp\left(-B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2 - \mathrm{Im}z\ B_n^{-1}S_{p(n+1)}\right)$$

である．これらのことから，

$$\left|\mathrm{Eexp}\left(izA_{p(N+1)}^{-1}S_{p(N+1)}\right) - e^{-z^2/2}\right|$$

$$=\left|ET_N(z)\left[\exp\left(-2^{-1}B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^N \varDelta_j^2 + \sum_{j=1}^N R(izB_n^{-1}\varDelta_j)\right) - e^{-z^2/2}\right]\right|$$

$$\leqq \mathrm{Eexp}\left(B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2 - \mathrm{Im}z\ B_n^{-1}S_{p(n+1)}\right)$$

$$\times\left|\exp\left(\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right) - \exp\left(2^{-1}B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right)\right|$$

$$\leqq \mathrm{Eexp}\left(B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2 - \mathrm{Im}z\ B_n^{-1}S_{p(n+1)}\right)$$

$$\times\left[\left|\exp\left(\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right) - 1\right| + \left|\exp\left(2^{-1}B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right) - 1\right|\right]$$

$|e^w - 1| \leqq |w|e^{|w|}$ をもちいて，

$$\leqq \mathrm{Eexp}\left(B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2 - \mathrm{Im}z\ B_n^{-1}S_{p(n+1)}\right)$$

$$\times\left[\left|\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right|\exp\left|\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right|\right.$$

$$\left. + \left|2^{-1}B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right|\exp\left|2^{-1}B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right|\right]$$

$$\leqq E^{1/8}\exp\left(8B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2\right)E^{1/8}\left(-\mathrm{Im}z\ B_n^{-1}S_{p(n+1)}\right)$$

$$\times\left[E^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right)^2 E^{1/8}\exp\left|8\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right|\right.$$

$$\left. + E^{1/2}\left(B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right)E^{1/8}\exp\left|4B_N^{-2}z^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right|\right]$$

ここで，

$$\mathrm{Eexp}\left(8B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2\right) = e^{8(\mathrm{Im}z)^2}\mathrm{Eexp}\left(8B_N^{-2}(\mathrm{Im}z)^2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right)$$

であり，また

$$\left|\sum_{j=1}^{N}R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right| \leqq |z|^3B_N^{-3}C_N''\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2$$

$$\leqq \lambda_{p(N)}|z|^3\left(B_N^{-2}\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2) + 1\right)$$

$$\leqq B_N^{-2}L_2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2) + 1$$

なので

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right)^2 \leqq \lambda_{p(N)}|z|^3\left[E\left(B_N^{-2}\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right)+1\right]$$

$$E\exp\left|8\sum_{j=1}^{N} R(izB_n^{-1}\Delta_j)\right| \leqq eE\exp\left(B_N^{-2}L_2\sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^2-E\Delta_j^2)\right)$$

となる．以上のことより補題を用いて，

$$|\hat{F}_{p(N)}(z)-\hat{G}(z)| \leqq L\lambda_{p(N)}\left(|z|^3+|z|^2\right) \quad \text{if } |z| \leqq L'\lambda_{p(N)}^{-1/3}$$

となることが分かり，結局，

$$|\hat{F}_N(z)-\hat{G}(z)| \leqq L\lambda_N\left(|z|^3+|z|^2\right) \quad \text{if } |z| \leqq L'\lambda_N^{-1/3}$$

が示された．ここで Essen の定理を用いる．

定理

$$\| F-G \|_\infty \leqq C_1\int_{-T}^{T}\left|\frac{\hat{F}(t)-\hat{G}(t)}{t}\right|dt + C_2/T$$

$$\| F-G \|_1 \leqq C_3\left[\int_{-T}^{T}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{F}(t)-\hat{G}(t)}{t}\right)\right|^2 dt\right]^{1/2}$$

$$+ C_4\left[\int_{-T}^{T}\left|\frac{\hat{F}(t)-\hat{G}(t)}{t}\right|^2 dt\right]^{1/2}\left(1+1/T\right) + C_5/T$$

以下 L は本質的でない定数を表し，行ごとに必ずしも等しくないものとする．

$$\left|\frac{\hat{F}_N(z)-\hat{G}(z)}{z}\right| \leqq L\,\lambda_N\left(|z|^2+|z|\right) \quad \text{if } |z| \leqq L'\lambda_N^{-1/3}$$

であるから，C_t を t 中心で半径 $(L_3/8)\wedge(|t|/2)$ の円とすると，

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{F}_N(t)-\hat{G}(t)}{t}\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_t}\frac{\hat{F}_N(\zeta)-\hat{G}(\zeta)}{(\zeta-t)^2\zeta}\,d\zeta\right|$$

$$\leqq \sup_{\zeta\in C_t}\left|\frac{\hat{F}_N(\zeta)-\hat{G}(\zeta)}{\zeta}\right|\left((L_3/8)\wedge(|t|/2)\right)^{-1}$$

$$\leqq L\,\lambda_N\left(|t|^2+|t|+1\right) \quad \text{if } |t| \leqq L'\lambda_N^{-1/3}$$

これら二つの評価により，

$$\| F_N-G \|_\infty \leqq L\lambda_N\left(T^3+T^2+T^{-1}\right) \quad \text{and}$$

$$\| F_N - G \|_1 \leqq L\lambda_N \left(T^{5/2}+T^{3/2}+T^{1/2}+T^{-1}\right) \quad \text{if} \quad |T| \leqq L'\lambda_N^{-1/3}$$

ここで，それぞれ $T=\lambda_N^{-1/4}$, $T=\lambda_N^{-2/7}$とすると目標の評価がえられる． □

参考文献

T.Nakata , On the rate of convergence in mean central limit theorem for martingale differences , Rep.of Statist.Appl., Union of Japan Sci.and Engin.,23 (1976) 4 , 10-15.

S.Takahashi , On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series II , Tohoku Math.J., 27 (1975) , 391-403.