

## Skew ブラウン運動に関するグラフの上の 熱方程式の基本解について

都立航空高専 岡田達也 (Tatsuya Okada)

本稿では, 無限に分岐するグラフの上の熱伝播を考える。  
とくに, グラフの分岐点において Skew をもつ拡散過程に対  
応する熱方程式について, いくつかの例で, その基本解を  
*explicit* に計算し, かつ,  $t \rightarrow \infty$  のときの基本解の *local* な  
漸近挙動を調べる。

### §1. 熱方程式の基本解

はじめグラフ  $G$  の各点における温度を  $0^\circ$  として, 時刻  
 $t=0$  で点  $y \in G$  に単位熱量を与えたときの時刻  $t=t_0$  での  
点  $x \in G$  における温度を  $U_{t_0}(x)$  とすると, 分岐点以外では,  
 $U$  は熱方程式:

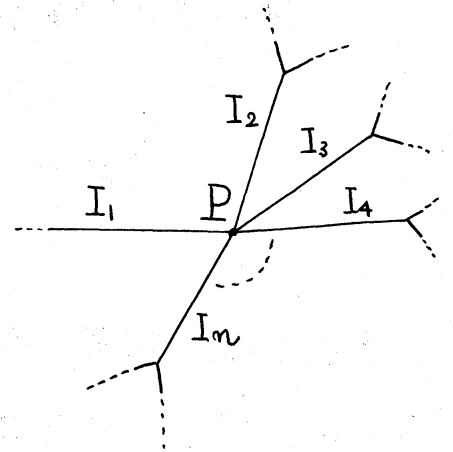
$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial}{\partial x} a(x)^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0 \quad (1)$$

をみたす。このときに  $U_t(x)$  を  $P_t(x, y)$  と表わして基本解と  
呼ぶ。以下,  $L = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dx} a^2 \frac{d}{dx}$  とおくことにする。

ここでは、各枝上（隣接する分岐点間）では、 $a(x), a(x)$  はともに定数でかつ  $a=C$  を仮定する。（つまり、 $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ ）

§2. Skew ブラウン運動

グラフ  $G$  の各枝上では通常の動きをするブラウン運動であり、グラフの分岐点  $P$  に粒子が到達したときには、点  $P$  から分岐する各枝  $I_1, I_2, \dots, I_n$  方向



に粒子がとび出す確率が各粒子ごとに独立にそれぞれ  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $\alpha_i \geq 0, i=1, \dots, n, \sum \alpha_i = 1$ ) であるものを点  $P$  で  $I_1, \dots, I_n$  方向に Skew  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  をもつ Skew ブラウン運動という。

たとえば、グラフ  $G$  を原点で 3 本の半直線に分岐するものとする:

例 1. [3]

原点で  $I_i$  方向に  $\alpha_i$

( $i=1, 2, 3$ ) の Skew

をもつ Skew ブラウン運動の

推移確率密度を  $P_t(x, y)$  とすると、

$$\sqrt{2\pi t} P_t(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + (2\alpha_i - 1) e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} & (x, y \in I_i) \\ 2\alpha_j e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} & (x \in I_i, y \in I_j) \end{cases} \quad (2)$$

(Walsh [5] の 1-dim Skew ブラウン運動の  $P_t$  の計算と同様に求まる。)

### 例 2. [3]

$I_i$  上で  $L = \frac{1}{2} \frac{1}{a_i^2} \frac{d}{dx} a_i^2 \frac{d}{dx}$  ( $i=1,2,3$ ) として,  $G$  上の熱方程式  $(\frac{\partial}{\partial t} - L)U = 0$  の基本解を推移確率密度にもつ拡散過程は, 原点で  $I_i$  方向に  $a_i^2 / (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$  ( $i=1,2,3$ ) の Skew をもつ Skew ブラウン運動である。

以下, グラフの分岐点において Skew をもついくつかのモデルで  $P_t(x, y)$  を計算する。

### § 3. $P_t(x, y)$ の求め方

$L$  は  $L^2(G, Cdx)$  上の作用素として自己共役で, 負のスペクトルをもつから,  $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$  に対してグリーン関数  $G(x, y, \lambda)$  を

$$\begin{cases} (\lambda I - L)G = \delta_y \\ G \rightarrow 0 \quad (|x - y| \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (3)$$

よりきめ, さらに, コーシーの積分定理より

$$P_t(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t} G(x, y, \lambda) d\lambda \quad (4)$$

として基本解が求まる。ここで  $G(x, y, \lambda)$  の求め方としては次の modulo constant で一意に定まる解  $U_{\pm}$  :

$$\begin{cases} (\lambda I - L)u_{\pm} = 0 \\ u_{\pm} \rightarrow 0 \quad (x-y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{複号同順}) \end{cases} \quad (5)$$

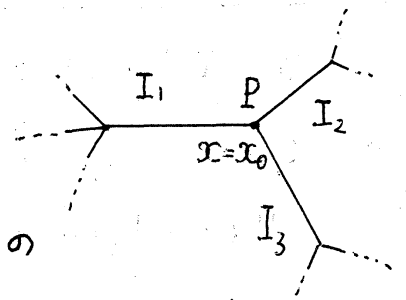
を用いて,

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} -u_-(y)u_+(x)/w(y) & (y \leq x) \\ -u_+(y)u_-(x)/w(y) & (x < y) \end{cases} \quad (6)$$

で定義されることがわかる ([1])。但し,  $w(y)$  は点  $y$  での  
ロンスキアン,  $w(y) = (u_- u'_+ - u'_- u_+)(y)$   
である。

さらに, 分岐点において Skew をもつ場合の分岐点におけ  
る  $u_{\pm}$  の条件 (温度保存, 熱量保存の条件) は §2 の例 2 より  
次のように与えられる。すなわち:

右図のように, 点  $P(x_0)$  で  $I_1, I_2, I_3$  方向  
にそれぞれ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  の Skew をもつ



Skew ブラウン運動に対応する熱方程式の

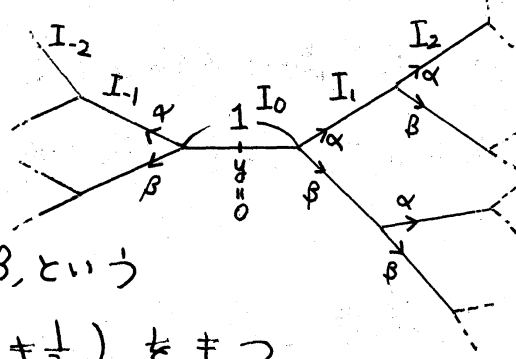
$P_t$  を計算するための  $u_{\pm}$  の点  $P$  における温度保存, 熱量保存  
の条件はそれぞれ,

$$\begin{cases} u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_1} = u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_2} = u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_3} \\ \alpha_1 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_1} + \alpha_2 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_2} + \alpha_3 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_3} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

で与えられる。

#### §4. 一様無限分岐 tree モデル

右図のような無限 homogeneous tree で、各分岐点でつねに原点  
方向に  $1-\alpha-\beta$ 、他の2方向に  $\alpha, \beta$ 、という



Skew ( $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \alpha + \beta < 1, \alpha + \beta \neq \frac{1}{2}$ ) をもつ

Skew ブラウン運動に対応する熱方程式の基本解  $P_t$  を計算する。まず  $L$  の定義域  $\mathcal{D}(L)$  は:

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ u \in C \mid \text{分岐点以外で } C^2\text{-class, 分岐点で §3 の (7) をみたす.} \right\}$$

ここで、 $u_+$ :  $(\lambda I - L)u_+ = 0, u_+ \rightarrow 0 (x \uparrow \infty)$

を求めると、

$$u_+ = r^n (\theta e^{\sqrt{\lambda}(x-n)} + e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)}) \quad x \in I_n$$

さらに、原点に関する対称性より

$$u_- = r^n (\theta e^{-\sqrt{\lambda}(x+n)} + e^{\sqrt{\lambda}(x+n)}) \quad (8)$$

とできる。但し、

$$\begin{cases} \theta = \left\{ \gamma - \gamma^{-1} - \sqrt{(\gamma - \gamma^{-1})^2 + 4(2\alpha + 2\beta - 1)^2} \right\} / 2(2\alpha + 2\beta - 1) \\ r = \left\{ \gamma + \gamma^{-1} - \sqrt{(\gamma + \gamma^{-1})^2 + 16(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)} \right\} / 4(\alpha + \beta) \quad (9) \\ \gamma = e^{\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

よって、§3の(6)で  $G(x, y, \lambda)$  がまた(4)で  $P_t(x, y)$  が求まる。

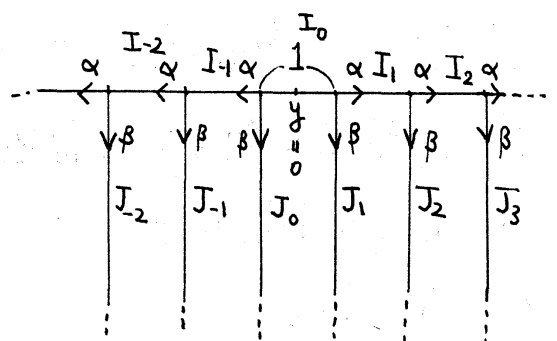
次に  $P_t(0, 0)$  の  $t \rightarrow \infty$  のときの減少のオーダーを調べてみる。  
 とくに指数のオーダーによる減衰が  $L$  のスペクトルの上端と  
 原点との距離に関係することがよく知られているが、ここ  
 は次のような結果が得られた：

定理

$$\begin{cases} \alpha + \beta > \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha + 2\beta - 1)|^2 t}) \quad t \rightarrow \infty \\ \alpha + \beta < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ P_t(0, 0) \rightarrow 1 - 2\alpha - 2\beta \quad t \rightarrow \infty \end{cases}$$

§5. komb type モデル

右図のように無限周期的に分岐する tree で、各分岐点で原点  
 方向に  $1 - \alpha - \beta$ 、他の方向に図の  
 ように  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \alpha + \beta < 1, \alpha \neq \frac{1}{2}$ )



という Skew をもつ Skew ブラウン運動に対応する熱方程式  
 の基本解  $P_t$  を計算する。このときも  $L$  の定義域は §4 と同様  
 であり、 $u_{\pm}$  はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}
 u_+ &= \begin{cases} r^n (\theta e^{\sqrt{\lambda}(x-n)} + e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)}) & x \in I_n \\ r^n \beta e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)} & x \in J_n \end{cases} \\
 u_- &= \begin{cases} r^n (\theta e^{-\sqrt{\lambda}(x+n)} + e^{\sqrt{\lambda}(x+n)}) & x \in I_n \\ r^n \beta e^{\sqrt{\lambda}(x+n)} & x \in J_n \end{cases}
 \end{aligned} \tag{10}$$

但し,

$$\begin{cases}
 r = \left\{ \gamma + (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma + (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 16\alpha(1-\alpha-\beta)} \right\} / 4\alpha \\
 \theta = \left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 4(2\alpha-1)(1-2\alpha-2\beta)} \right\} / 2(2\alpha-1) \\
 \beta = \left\{ (4\alpha-1)\gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 4(2\alpha-1)(1-2\alpha-2\beta)} \right\} / 2(2\alpha-1)\gamma \\
 \gamma = e^{\sqrt{\lambda}}
 \end{cases} \tag{11}$$

よって、§3の(6), (4)で  $P_t(x, y)$  が求まる。また、 $P_t(0, 0)$  の  $t \uparrow \infty$  のときの減少のオーダーについては次のような結果が得られた:

### 定理

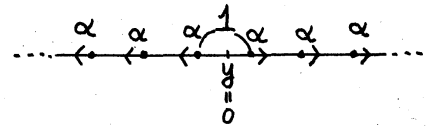
$$\begin{cases}
 1-\alpha-\beta = \alpha \text{ のとき } P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{3}{4}}) & t \uparrow \infty \\
 1-\alpha-\beta > \alpha \text{ のとき } P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{1}{2}}) & t \uparrow \infty
 \end{cases}$$

### §6. あとがき

1. §4のモデルは本質的には1次元の場合に帰着できる

のだが、ちなみに、1次元で周期的に skew をもつブラウン運動に対応する熱方程式の基本解  $P_t$  の  $t \uparrow \infty$  での減少のオーダーは次のようになる:

(I) 原点方向に  $1-\alpha$  の skew をもつ場合.

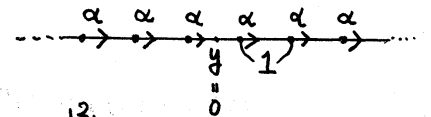


i)  $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow P_t(0,0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha-1)|^2 t}) \quad t \uparrow \infty$

ii)  $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow P_t(0,0) \rightarrow 1-2\alpha \quad t \uparrow \infty$

(II) 一定方向に skew  $\alpha$  をもつ場合.

$\alpha \neq \frac{1}{2}$



$\Rightarrow P_t(0,0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha-1)|^2 t}) \quad t \uparrow \infty$

2. §5 のモデルで  $1-\alpha-\beta=0$  の場合の  $P_t(0,0)$  の  $t \uparrow \infty$  の減衰のオーダーは指数的になる。

### 参考文献

- [1] B. Gaveau - M. Okada - T. Okada, Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis (to appear)
- [2] K. Itô - H.P. McKean, Diffusion processes and their sample paths. Springer. New York. (1965)



- [3] T. Okada, 不連続係数をもつ熱方程式の基本解, マルチンゲールとその周辺シンポジウム (1987)
- [4] M. Okada, *personal communication*
- [5] J.B. Walsh, *A diffusion with discontinuous local time*, *Astérisque*. 52-53 p37-45 (1978)