数理解析研究所講究録
第707巻 1989年 104-148

久保-安藤理論の拡張について

大阪教育大　　藤井淳一

Abstract. In 1980, F.Kubo anf T.Ando established the theory of means of positive linear bounded operators on a Hilbert space. Their operator means (or **connections**) are order-isomorphic to the class of nonnegative operator monotone function on $(0,\infty)$. Following after the Kubo-Ando theory, we shall generalize operator means to **solidarities** whose class is order-isomorphic to that of operator monotone functions on $(0,\infty)$. For invertible positive operators, the solidarity s for an operator monotone function f is defined by

$$A \text{ s } B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

like operator means. The relative operator entropy recently is a typical example of a solidaritiy. Since the solidarity does not always exists for noninvertible operators, first we show the existence condition. Next, common properties like operator means or the relative operator entropy are discussed. In these properties, we choose ones which axiomatize solidarities like the Kubo-Ando theory.

久保-安藤理論[9]において、作用素平均(connection)と $(0,\infty)$ 上の非負作用素単調関数とのアフィン順序同型が示された。ここでいう作用素平均 (connection) とは Hilbert空間上の正作用素の上の２項演算 m で、次の性質をもつものである：

(M1: 単調性)　　$A \leqq C,\ B \leqq D \implies A \text{ m } B \leqq C \text{ m } D,$

(M2: 上半連続性)　　$A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \implies A_n \text{ m } B_n \downarrow A \text{ m } B,$

(M3: transformer 不等式)　　$T^*(A \text{ m } B)T \leqq T^*AT \text{ m } T^*BT.$

ここでは、正規条件；$A \text{ m } A = A$ を仮定しない。すると上の同型対応 ϕ: $\text{m} \mapsto f$ は

次の式で与えられ（fを表現関数と言う）

(1) $$f(t) = 1\ m\ t \qquad (t > 0),$$

逆対応は、可逆な正作用素 A, B について

(2) $$A\ m\ B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

で与えられる。A m B も正作用素だから、(M2)から、可逆でない正作用素の平均も常に存在し、可逆作用素の平均で近似できる。作用素平均の演算はいくつかあるが、そのうち transpose，すなわち項を入替えた平均 m° が、以後の話に重要な役割を演ずる。表現関数でいえば、$F=f^\circ$ は

(3) $$F(t) = t\ m\ 1 = tf(1/t)$$

で与えられ、

(4) $$A\ m\ B = B^{1/2}F(B^{-1/2}AB^{-1/2})B^{1/2}$$

が得られる。

相対作用素エントロピー S(A|B) は、ちょうど式(2)の f(t) を log t に変えたものであるが[4]、もっと一般に、表現関数の非負性をはずした作用素単調関数 f に取り変えたときも、作用素平均や相対作用素エントロピーと似た性質をもつものが得られる：

(5) $$A\ s\ B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

ここでは s を、connection の一般化という意味で、solidarity とでも呼んでおく[6]。作用素平均のときと同様に、

(6) $$A\ s\ B = B^{1/2}F(B^{-1/2}AB^{-1/2})B^{1/2}$$

が成立つが、F は作用素単調とはならない。しかし幸運にも（cf. [1,7]）、

(7) F は作用素凹　かつ　F(0)≧0

という性質をもっている。この性質(7)は、Hansen-Pedersen [7] の意味での、Jensen 不等式：

(8) $X^*X \leqq 1 \Rightarrow X^*F(A)X \leqq F(X^*AX)$

が成立つ為の、同値条件である (cf. [8]) 。

したがって、作用素平均と solidarity の大きく違うのは、前項 (式(5),(6)における A の項) について単調性がなくなる点であり、非可逆な作用素に対して solidarity が必ずしも (有界作用素として) 存在するとはいえなくなる。対(A,B) が s の domain に入る，即ち、A s B が存在する為の必要十分条件は、f の transpose F を使うと

【定理1】 s を(5)で決まる solidarity とし、$F(t) = t \, s \, 1$ とするとき、

$$\exists A \, s \, B \iff E(\alpha) = F'(\alpha)A + f'(1/\alpha)B \text{ 下に有界な関数 } (\alpha>0).$$

したがって相対作用素エントロピーについては

【系1．1】 $\exists S(A|B) \iff H(\alpha) = \alpha B - (\log \alpha)A$：有界 for $\alpha > 1$.

また、Douglas [2] の意味での majorization の関係があるとき、solidarity は常に存在する：

【系1．2】 $\exists \lambda>0;\ \lambda A \leqq B \Longrightarrow f(\lambda)A \leqq \exists A \, s \, B \leqq \max_{t \leqq 1/\lambda} \{F(t)\} B.$

この定理を元に、solidarity の共通な性質を見ていくと、A s B が存在するような A, B の組，すなわち s の domain D は、次の意味で「極大」である：

(D1) B が可逆 $\Longrightarrow (A,B) \in D$ for $\forall A$

(D2) $A \, s \, (B+\varepsilon)$：lower bounded for $\varepsilon>0 \Longrightarrow (A,B) \in D$.

さらに、D にはいる (A,B) については

(S1) $B \leqq C \Longrightarrow A \, s \, B \leqq A \, s \, C$,

(S2-r) $B_n \downarrow B \Longrightarrow A \, s \, B_n \downarrow A \, s \, B$,

(S2-l) $A_n \to A$ (strongly) $\Longrightarrow A_n s \, 1 \to A \, s \, 1$ (strongly)

(S3) $T^*(A \text{ s } B)T \leqq T^*AT \text{ s } T^*BT,$

が成立する。これらの性質は、以下の２つの補題をもとにして証明する：

【補題１】 s を f に, s_d を $f_d(t) = f(t+d)$ に対する solidarity とする (d>0) 。

$$\exists c\,;\, cB \geqq A \Longrightarrow 0 \leqq A \, s_d B - A \, s \, B \leqq cf'(1/c)dB.$$

上の f_d については、 $f_d(0)$ が下に有界となり、s_d は作用素平均の平行移動となる：

【補題２】 s が $f(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) > -\infty$ となる f に対する solidarity のとき、

$$\exists \text{作用素平均 } m: \quad A \, s \, B = A \, m \, B + f(0)A.$$

さらに、性質(S2)から、非可逆作用素の solidarity は（存在すれば）可逆作用素によって近似できるので、以下の議論では、正作用素について可逆性を仮定して良い。 F に関するJensen不等式(8)から solidarity は半加法的：

(9) $(A+B) \, s \, (C+D) \geqq A \, s \, C + B \, s \, D$

であることがわかり、さらに joint-concavityを示すことができる：

【定理２】 $A = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$, $B = \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2$ のとき、

$$A \, s \, B \geqq \alpha(A_1 \, s \, B_1) + (1-\alpha)(A_2 \, s \, B_2)$$

逆に、正作用素上の２項演算 s が (D1,2) を満たす domain D の作用素について条件(S1)-(S3)が成立するとき、abstract solidarity とでも呼べば、

【定理３】 $f(t) = 1 \, s \, t$ によって決まる写像 $\Phi : s \mapsto f$ は、abstract solidarity 全体から、$(0,\infty)$上の作用素単調関数全体へのアフィン順序同型をなす。

という久保-安藤型の定理が得られる。もちろん、Φ は、ϕ の拡張である。

作用素平均のときと同様に、

(10) $f^-(t) = t \, s \, 1-t \qquad (t \in (0,1))$

によって、(0,1)上の作用素凹関数との対応を考えれば[3]、 $s \mapsto f^-$ で決まる対応は、

solidarity全体から $f^{-}(0) \geqq 0$ となる [0,1) 上の連続作用素凹関数全体へのアフィン順序同型となる。

References

[1] T.Ando: Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978.

[2] R.G.Douglas: On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413-416.

[3] J.I.Fujii: Operator concave functions and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25(1980), 453-461.

[4] J.I.Fujii and E.Kamei: A relative operator entropy in noncommutative information theory, to appear in Math. Japon.

[5] J.I.Fujii and E.Kamei: Uhlmann's interpolational method for operator means, to appear in Math. Japon.

[6] J.I.Fujii, M.Fujii and Y.Seo: An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities, Preprint.

[7] F.Hansen and G.K.Pedersen: Jensen's Inequality for operators and Löwner's theorem, Math. Ann., 258(19 82), 229-241.

[8] D.Kainuma and M.Nakamura: Around Jensen's inequality, Math. Japon., 25(1980), 585-588.

[9] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.