数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 11-26

代数体における行列の分割関数について

学習院大学理 三井孝美 (Takayoshi Mitsui)

行列の分割関数については、これまで、有理整数または $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ の元を要素とする行列を考えてきた。これらはそれぞれ体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$ の整数を要素とする行列であり、したがって、代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ の元を要素とする行列へさらに問題を拡張することは自然である。この一般の場合、実共役、複素共役があるから、実対称行列、Hermite 行列を同時に考えなければならず、複雑化を免れないが、考えるべき問題の対象を順次に定義していくことからはじめる。

§1 分割関数と生成関数

行列は特に断らない限り m 次の正方行列とする。転置行列は A' で表わす。まず次のような行列の集合を定義する：

$$\mathcal{S}=\{\, S \mid \text{実対称行列}\ (S=S')\,\} \subset M(m,\mathbb{R}),$$

$$\mathcal{H}=\{\, H \mid \text{Hermite 行列}\ (H=\overline{H'})\,\} \subset M(m,\mathbb{C}).$$

これらは $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$, $\mathbb{R}^m\times\mathbb{C}^{m(m-1)/2}$ $(\cong\mathbb{R}^{m^2})$ と同相であ

る。さらに

$$\mathfrak{P} = \{ S \mid S > 0 \text{（正値定符号行列）} \} \subset \mathcal{S},$$

$$\mathfrak{P}_H = \{ H \mid H > 0 \text{（正値 Hermite 行列）} \} \subset \mathcal{H}$$

を考える。

次に，代数体 K は $\mathbb{Q}$ 上 n 次とし，$K^{(1)}, \cdots, K^{(r_1)}$ を K の実共役，$K^{(r_1+1)}, \cdots, K^{(r_1+r_2)}$，$K^{(r_1+r_2+1)} = \overline{K^{(r_1+1)}}, \cdots, K^{(r_1+2r_2)} = \overline{K^{(r_1+r_2)}}$ を複素共役の組とする。したがって $n = r_1 + 2r_2$ である。K の整数環を $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_K$，その共役を $\mathfrak{O}^{(1)}, \cdots, \mathfrak{O}^{(n)}$ で表わす。K に含まれる最大の総実代数体を K_0 とし，K_0 の整数環を $\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}_{K_0}$，その共役を $\mathfrak{O}_0^{(1)}, \cdots, \mathfrak{O}_0^{(n)}$ とする。

K の行列 $M^{(1)} = (\mu_{ik})_{i,k}$ を次のような要素による行列とする：

$$(1) \quad \begin{cases} \mu_{ii} \in \mathfrak{O}_0 & (i = 1, \cdots, m), \\ \mu_{ik} \in \mathfrak{O} & (1 \leqq i < k \leqq m), \\ \mu_{ki} = \begin{cases} \mu_{ik} & (K \text{ が実のとき}), \\ \overline{\mu_{ik}} & (K \text{ が実でないとき}) \end{cases} \end{cases}$$

$$(1 \leqq i < k \leqq m)$$

この $M^{(1)}$ の共役 $M^{(q)}$ を次のように定義する：

$$M^{(q)} = (\mu_{ik}^{(q)})_{i,k} \qquad (q = 1, \cdots, r_1),$$

$$M^{(p)} = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(p)} & \mu_{12}^{(p)} & \cdots & \mu_{1m}^{(p)} \\ \overline{\mu_{12}^{(p)}} & \mu_{22}^{(p)} & \cdots & \mu_{2m}^{(p)} \\ & \cdots & & \\ \overline{\mu_{1m}^{(p)}} & \overline{\mu_{2m}^{(p)}} & \cdots & \mu_{mm}^{(p)} \end{pmatrix} \qquad (p = r_1+1, \cdots, r_1+r_2).$$

したがって

$$M^{(p+r_2)} = \overline{M^{(p)}} \qquad (p = r_1+1, \cdots, r_1+r_2)$$

となっている。これらの $M^{(j)}$ の組を

$$M = (M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(r_1+r_2)})$$

と書くことにして，集合

$$\mathfrak{M} = \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{ll} M^{(q)} \in \mathcal{P} & (q = 1, \cdots, r_1), \\ M^{(p)} \in \mathcal{P}_H & (p = r_1+1, \cdots, r_1+r_2) \end{array} \right\}$$

を定義する。分割問題の対象となるものはこの $\mathfrak{M}$ の元である。なお、先の $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ 等の積空間

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{r_1} \times \mathcal{H}^{r_2}, \qquad \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{r_1} \times \mathcal{P}_H{}^{r_2}$$

を考えれば、$M \in \tilde{\mathcal{P}}$ である。$\tilde{\mathcal{S}}$ は

$$\tilde{\mathcal{S}} \cong (\mathbb{R}^{m(m+1)/2})^{r_1} \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^{m(m-1)/2})^{r_2}$$

であり，その次元は

$$\dim \tilde{\mathcal{S}} = r_1 m(m+1)/2 + r_2 m^2 .$$

この右辺の値を R で表わすことにする。

もう少し一般に

$$M(m, \mathbb{R})^{r_1} \times M(m, \mathbb{C})^{r_2}$$

の元 $A=(A_1,\cdots,A_{r_1+r_2})$ に対して

$$\tilde{\sigma}(A)=\sum_{\nu=1}^{r_1+r_2}\sigma(A_\nu)$$

とする。右辺の $\sigma(A_\nu)$ は A_ν の trace である。また、

$$\bar{\varkappa}=\bar{\varkappa}(A)=\max_\nu\{A_\nu \text{の固有値}\},$$

$$\underline{\varkappa}=\underline{\varkappa}(A)=\min_\nu\{A_\nu \text{の固有値}\}$$

と記す。ここで

<u>lemma 1</u>　N を自然数とするとき

$$\tilde{\sigma}(M)=N,\quad M\in\mathfrak{M}$$

となるような M の個数は $O(N^{R-1})$ である。」

<u>lemma 2</u>　$X, Y\in\tilde{\mathfrak{P}}$ に対し

$$\bar{\varkappa}(X)\tilde{\sigma}(Y)\geqq\tilde{\sigma}(XY)\geqq\underline{\varkappa}(X)\tilde{\sigma}(Y).$$ 」

この lemma により級数

$$\sum_{M\in\mathfrak{M}}e^{-\tilde{\sigma}(XM)}\qquad(X\in\tilde{\mathfrak{P}})$$

が収束することがわかる。したがって無限積

$$f(X)=\prod_{M\in\mathfrak{M}}\left(1-e^{-\tilde{\sigma}(XM)}\right)^{-1}\qquad(X\in\tilde{\mathfrak{P}})$$

も収束する。$f(X)$ は

(2)
$$f(X)=1+\sum_{M\in\mathfrak{M}}P(M)\,e^{-\tilde{\sigma}(XM)}$$

の形に展開される。この係数 $P(M)$ は

$$M = M_1 + \cdots + M_s, \quad M_j \in \mathfrak{M} \quad (j=1, \cdots, s)$$

となるような M の表わし方の個数であり，M の分割関数といわれる。f(X) がその生成関数である。

§2 格子と積分表示

(1) にしたがって得られるすべての M の集合

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{ M \mid M = (M^{(1)}, \cdots, M^{(r_1+r_2)}) \}$$

は、$\tilde{\mathcal{S}}$ の中で格子を作る。その基本格子を求めよう。

$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_0$ の基底を

$$\mathfrak{o} = \langle \omega_1, \cdots, \omega_n \rangle, \quad \mathfrak{o}_0 = \langle \omega_1^0, \cdots, \omega_{r_1+r_2}^0 \rangle$$

とし，行列要素 E_{ik} (i-k 要素が 1 で他は 0 である行列) によって

$$T_{i,j} = (\omega_j^{0\,(1)} E_{ii}, \cdots, \omega_j^{0\,(r_1+r_2)} E_{ii})$$
$$(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, r_1+r_2),$$

$$T_{ik,j} = (\omega_j^{(1)} E_{ik}, \cdots, \omega_j^{(r_1)} E_{ik}, \omega_j^{(r_1+1)} E_{ik}, \cdots, \overline{\omega_j^{(r_1+r_2)}} E_{ik})$$
$$+ (\omega_j^{(1)} E_{ki}, \cdots, \omega_j^{(r_1)} E_{ki}, \overline{\omega_j^{(r_1+1)}} E_{ki}, \cdots, \omega_j^{(r_1+r_2)} E_{ki})$$
$$(1 \leqq i < k \leqq m;\ j=1, \cdots, n)$$

を定義すると $T_{i,j}, T_{ik,j}$ はすべて $\tilde{\mathfrak{M}}$ の元であり，これらの個数は $m(r_1+r_2) + nm(m-1)/2 = R$。さらに，$\tilde{\mathfrak{M}}$ の元は $\{T_{i,j}, T_{ik,j}\}$ の $\mathbb{Z}$ 係数の 1 次結合として表わされる。したがって $\{T_{i,j}, T_{ik,j}\}$ が $\tilde{\mathfrak{M}}$ の格子としての基底を与えることになる。

しかし、さらに$\mathfrak{M}$を考えるために、この基底自身を$\mathfrak{M}$の中からとる。そのような基底が存在することは、$\mathfrak{M}$を含む$\tilde{\mathfrak{P}}$が、$\mathfrak{S}$の中でいわゆる cone になっていることと$\tilde{\mathfrak{P}}$が$\mathfrak{S}$と同じ次元をもつことからわかる。

以後は、$\mathfrak{M}$の中からとった$\tilde{\mathfrak{M}}$の基底を$\{T_\nu ; \nu=1,\dots,R\}$と記すことにする。$Y\in\mathfrak{S}$は

$$(3)\qquad Y=\sum_{\nu=1}^{R} u_\nu T_\nu$$

と一意的に表わされ，特に$M\in\tilde{\mathfrak{M}}$は

$$M=\sum_{\nu=1}^{R} m_\nu T_\nu \qquad (m_\nu\in\mathbb{Z};\ \nu=1,\dots,R)$$

となる。

次に積分を考察する。$X\in\tilde{\mathfrak{P}}$とし、$\tilde{\mathfrak{P}}$上の積分

$$\int_{\tilde{\mathfrak{P}}} e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\,dY$$

を考える．ここで$Y=(Y_1,\dots,Y_{r_1+r_2})$，$Y_j=(y_{ik}^{(j)})_{i,k}$ ($j=1,\dots,r_1+r_2$) として $dY=dY_1\cdots dY_{r_1+r_2}$ であり

$$dY_q=\prod_{1\leqq i\leqq k\leqq m} dy_{ik}^{(q)} \qquad (q=1,\dots,r_1),$$

$$dY_p=\prod_{i=1}^{m} dy_{ii}^{(p)} \prod_{i<k} dy_{ik}'^{(p)} \prod_{i<k} dy_{ik}''^{(p)} \qquad (p=r_1+1,\dots,r_1+r_2)$$

(y'_{ik}, y''_{ik} は y_{ik} の実数部、虚数部である。) これは Siegel の積分の一般化であって、その値は

$$(4)\quad \int_{\tilde{\mathfrak{p}}} e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\,dY = \left\{\pi^{m(m-1)/4}\,\Gamma\left(\tfrac{m+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{2}{2}\right)\right\}^{r_1}$$

$$\times\left\{\pi^{m(m-1)/2}\,\Gamma(m)\cdots\Gamma(1)\right\}^{r_2}\prod_{q=1}^{r_1}|X_q|^{-\frac{m+1}{2}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}|X_p|^{-m}.$$

その右辺の定数と X に関係する部分を

$$B_0 = \left\{\pi^{m(m-1)/4}\,\Gamma\left(\tfrac{m+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{2}{2}\right)\right\}^{r_1}\left\{\pi^{m(m-1)/2}\,\Gamma(m)\cdots\Gamma(1)\right\}^{r_2},$$

$$N^*(X) = \prod_{q=1}^{r_1}|X_q|^{\frac{m+1}{2}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}|X_p|^{m}$$

と記す。

もう1つ、$f(X)$ などを評価するための手段となる積分を考える：$\tilde{\mathfrak{M}} \ni T$ に対し集合

$$D(T) = \left\{ Y \;\middle|\; Y = T + \sum_{\nu=1}^{R} u_\nu T_\nu,\quad 0 \leqq u_\nu < 1\quad (\forall \nu)\right\}$$

は，$\tilde{\mathfrak{M}}$ の基本格子に合同で、T に付随する $\mathbb{R}^R$ の中の平行面体である。(4) などの積分の変数を (3) によって $\{u_\nu\}_\nu$ に変換すれば，その Jacobian は

$$2^{-r_2 m(m-1)/2}\,|\det(\omega_i^{0(j)})_{i,j}|^{m}\,|\det(\omega_i^{(j)})_{i,j}|^{m(m-1)/2},$$

あるいは、K_0, K の判別式を D_0, D とするとき

$$2^{-\frac{1}{2}m(m-1)/2}\,|D_0|^{m/2}\,|D|^{m(m-1)/4}$$

に等しい。この値を $\tilde{D}$ と記せば、$D(T)$ 上の次のような積分

$$(5)\qquad \int_{D(T)} e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\,dY \qquad (X\in\tilde{\mathfrak{P}})$$

は直ちに計算できて、

$$\tilde{D}\,e^{-\tilde{\sigma}(XT)}\int_0^1\cdots\int_0^1 \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{R}u_\nu\tilde{\sigma}(XT_\nu)\right\}du_1\cdots du_R$$

$$=\tilde{D}\,e^{-\tilde{\sigma}(XT)}\prod_{\nu=1}^{R}\frac{1-e^{-\tilde{\sigma}(XT_\nu)}}{\tilde{\sigma}(XT_\nu)}\,.$$

ここで $T_\nu\in\tilde{\mathfrak{P}}$ だから $\tilde{\sigma}(XT_\nu)>0$ $(\nu=1,\cdots,R)$ であることに注意する。最後の積と $\tilde{D}$ をまとめて

$$i(X)=\prod_{\nu=1}^{R}\frac{1-e^{-\tilde{\sigma}(XT_\nu)}}{\tilde{\sigma}(XT_\nu)}\cdot\tilde{D}$$

と記して、次の lemma が証明される：

<u>lemma 3</u>　級数

$$g(X)=\sum_{M\in\mathfrak{M}}a(M)e^{-\tilde{\sigma}(XM)}\qquad (X\in\tilde{\mathfrak{P}})$$

が収束するとき

$$a(Y)=\begin{cases}a(T) & Y\in D(T),\ T\in\mathfrak{M}\ \text{のとき},\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

とおくと

$$g(X) = i(X)^{-1} \int_{\tilde{\mathfrak{p}}} a(Y)\, e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\, dY$$

$\lrcorner$

その応用として、まず

$$G(X) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} e^{-\tilde{\sigma}(XM)} \qquad (X \in \tilde{\mathfrak{p}})$$

に対し

$$G(X) = i(X)^{-1} \int_{\tilde{\mathfrak{p}}} a_0(Y)\, e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\, dY.$$

ここで

$$a_0(Y) = \begin{cases} 1 & Y \in D(T),\ T \in \mathfrak{M} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

さらに

$$F(X) = i(X)\,(\,f(X) - 1\,)$$

に対して

(6) $$F(X) = \int_{\tilde{\mathfrak{p}}} P(Y)\, e^{-\tilde{\sigma}(XY)}\, dY$$

を得る。ここで

$$P(Y) = \begin{cases} P(T) & Y \in D(T),\ T \in \mathfrak{M} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とする。

一方で

$$\log f(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} G(kX)$$

の関係が成り立つ。これと (4), (5) などから

lemma 4

$$B_0 N^*(X)^{-1} \geqq i(X) G(X) \geqq B_0 N^*(X) e^{-\tilde{\sigma}(XT_0)}$$

$(T_0 = \sum_{v=1}^{R} T_v)$. ┘

lemma 5 $\underline{\varkappa}(X)$, $\overline{\varkappa}(X)$ は十分小さくかつ同じ order $\varkappa$ をもつとすると

$$\log f(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} (1 + O(\varkappa^{1/2}))$$

($\zeta(s)$ は Riemann の ζ 関数)。同じ条件の下で

$$\log F(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} (1 + O(\varkappa^{1/2})).$$ ┘

この $\log F(X)$ の漸近式と $F(X)$ の積分表示(6)から $\log P(Z)$ を求めるのであるが、そのために次の仮定をおく；

Z の固有値 ($Z = (Z_1, \cdots, Z_{r_1+r_2})$ の各 Z_i の固有値) はすべて同じ order t をもち、t は十分大きい。

このとき X を Z に対して適当にとって X が lemma 5 の条件をみたすようにし、一方で (6) の積分を

$$(7) \qquad \int_{\tilde{\mathfrak{P}}} = \int_{Z\text{の近傍}\,\mathfrak{U}} + \int_{\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{U}}$$

とわけて、それぞれを評価するのである。

§3 Xの決定

一般に $X \in \tilde{\mathfrak{p}}$ に対して

$$(8) \quad \varphi(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} = \tilde{D}^{-1} \zeta(1+R) \int_{\tilde{\mathfrak{p}}} e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY$$

とおく。

$$d_{ik}^{(j)} = \begin{cases} 1 & j=1,\cdots,r_1;\ 1 \leqq i \neq k \leqq m \quad \text{のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とし、$X_j = (\xi_{ik}^{(j)})$ の元を変数として $\varphi(X)$ の微分

$$(9) \quad \begin{cases} z_{ik}^{(q)} = -\dfrac{1}{d_{ik}^{(q)}} \dfrac{\partial \varphi(X)}{\partial \xi_{ik}^{(q)}} & (1 \leqq i,k \leqq m;\ q=1,\cdots,r_1), \\ z_{ik}^{(p)} = -\dfrac{1}{d_{ik}^{(p)}} \dfrac{\partial \varphi(X)}{\partial \xi_{ki}^{(p)}} & (1 \leqq i,k \leqq m;\ p=r_1+1,\cdots,r_1+r_2) \end{cases}$$

による行列

$$Z_j = (z_{ik}^{(j)})_{i,k} \qquad (j=1,\cdots,r_1+r_2)$$

を作ると、X が逆に Z で表わされて

$$X_q = C_0^{\frac{1}{1+R}} \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{1+r_2 m^2}{1+R}} m^{-\frac{r_2 m^2}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}} Z_q^{-1} \qquad (q=1,\cdots,r_1),$$

$$X_p = C_0^{\frac{1}{1+R}} \left(\frac{m+1}{2}\right)^{-\frac{r_1 \nu}{1+R}} m^{\frac{1+\nu r_1}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}} Z_p^{-1} \qquad (p=r_1+1,\cdots,r_1+r_2)$$

($\nu = m(m+1)/2$, $C_0 = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R)$)。この X を $X = \psi(Z)$

と記す。Zの固有値のorderがすべてtに等しいとき$\psi(Z)$の固有値のorderはすべて$t^{-\frac{1}{1+R}}$となって、Xはlemma 5の条件をみたす。

§4 $\log P(Z)$の漸近式

(2)から直ちに

(10) $$P(M) \leqq \exp\{\tilde{\sigma}(XM) + \log f(X)\}$$

が任意の$X \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $M \in \mathfrak{M}$に対して成り立つから、特に$M = Z$, $X = \psi(Z)$として、lemma 5と(8)を考慮して

$$P(Z) \leqq \exp\{\tilde{\sigma}(Z\psi(Z)) + \varphi(\psi(Z))(1+\varepsilon)\}$$

($\varepsilon > 0$は十分小さい数としてよい。)

$P(Z)$の下からの評価のためには(7)を利用する。この$\mathfrak{U}$として、$\delta_0 > 0$を小さくとり

$$\mathfrak{U} = \{Y \mid \|Y - Z\| < \delta_0 t\}$$

とする。ここで$\| \ \|$は、$\hat{\mathcal{S}}$の元をR^Rの元とみての距離$d(Y, Z)$である。さらに$\mathfrak{U}$を含む

$$\mathfrak{V} = \{Y \mid bt E > Y > \delta_1 t E\}$$

を定義する(ここで$A > B$は$A - B$の成分が正値定符号であることを意味する)。δ_1を小さく、bを大きくとれば$\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$となっている。これらにより積分(7)をさらに

$$\int_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \int_{\mathfrak{U}} + \int_{\mathfrak{V}-\mathfrak{U}} + \int_{\tilde{\mathfrak{p}}-\mathfrak{V}}$$

とわけるとき、右辺の第1，第3の積分は比較的容易に評価できる。問題は第2の積分である。(10)から，(6)の被積分関数に対し

$$P(Y)e^{-\tilde{\sigma}(XY)} \leqq \exp\{\tilde{\sigma}(Y\psi(Y)) + \log f(\psi(Y)) - \tilde{\sigma}(XY)\}$$

であるが、$Y \in \mathfrak{V}-\mathfrak{U}$ ならば Y の固有値の order も同じ t であるから

$$P(Y)e^{-\tilde{\sigma}(XY)} \leqq \exp\{\tilde{\sigma}((\psi(Y)-X)Y) + \varphi(\psi(Y))(1+\varepsilon)\}.$$

この右辺の中の

$$h(Y) = \varphi(\psi(Y)) + \tilde{\sigma}((\psi(Y)-X)Y)$$

をとり出し、$Y=Z$ を中心とした $h(Y)$ を考える。まず

(11) $$h(Z) = \varphi(\psi(Z)) = \varphi(X)$$

である。次に

$$\tilde{X} = \psi(Y) = (\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_{r_1+r_2}), \quad \tilde{X}_j = (\tilde{x}_{ik}^{(j)})_{i,k}$$

$$(j=1,\cdots,r_1+r_2)$$

とおいて

$$h(Y) = \varphi(\tilde{X}) + \sum_{q=1}^{r_1}\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq m} d_{ij}^{(q)}(\tilde{x}_{ij}^{(q)} - x_{ij}^{(q)})y_{ij}^{(q)}$$

$$+ \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\sum_{1\leqq i,j\leqq m}(\tilde{x}_{ij}^{(p)} - x_{ij}^{(p)})y_{ji}^{(p)}.$$

これから(9)を考慮して、すべてのk, l, sに対し

$$\frac{\partial h}{\partial y_{kl}^{(s)}} = d_{kl}^{(s)} (\tilde{x}_{lk}^{(s)} - x_{lk}^{(s)})$$

が得られ、したがって

(12) $$\frac{\partial h}{\partial y_{kl}^{(s)}}(Z) = 0.$$

さらに

(13) $$\frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} = d_{kl}^{(t)} \frac{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)}}{\partial y_{ij}^{(s)}}$$

がすべての(i, j, s), (k, l, t)に対して成り立つから、R次の行列

$$\mathcal{Z}(Y) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} \right)_{(i,j,s),(k,l,t)}$$

を定義すると(11), (12)により$h(Y)$の$Y = Z$における Taylor 展開が次の形で得られる：

(14) $$h(Y) = \varphi(X) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(Z^*)[Y - Z].$$

ここで $Z^* = Z + \theta(Y - Z)$ $(0 < \theta < 1)$ であり、(14)の右辺の第2項はYなどをR次元のベクトルとみての2次形式である。

ここで$\mathcal{Z}(Y)$が実は負値定符号であることが次のようにし

てわかる：(13) を利用して

$$(15)\quad \sum_{k,l,t} \frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} \frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}}$$

$$= \sum_{k,l,t} d_{kl}^{(t)} \frac{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)}}{\partial y_{ij}^{(s)}} \frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}}$$

$$= \frac{1}{d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}}$$

$$= -\frac{\partial y_{\mu\nu}^{(\lambda)}}{\partial y_{ij}^{(s)}} = \begin{cases} -1 & (i,j,s) = (\mu,\nu,\lambda) \text{ のとき}, \\ 0 & (i,j,s) \neq (\mu,\nu,\lambda) \text{ のとき}. \end{cases}$$

したがって次のような行列

$$\mathcal{H}(\tilde{X}) = \left(\frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \right)_{(k,l,t),(\mu,\nu,\lambda)}$$

を定義すれば (15) は

$$\mathcal{H}(\psi(Y)) = -\mathfrak{Z}(Y)^{-1}$$

を意味し、(14) は

$$h(Y) = \varphi(X) - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{-1}(\psi(Z^*)) [Y - Z]$$

となるが、ここで

<u>lemma 6</u> $\mathcal{H}$ は正値定符号で、その固有値はすべて order が $t^{\frac{2+R}{1+R}}$ である ⊣

これは、$\varphi(X)$ の積分表示 (8) を考えれば容易にわかる。
ゆえに、$Y \in \mathcal{V} - \mathcal{U}$ に対して

$$h(Y) \leqq \varphi(X) - c\, t^{-\frac{2+R}{1+R}} \sum_{i,j,s} \left(y_{ij}^{(s)} - z_{ij}^{(s)}\right)^2$$
$$\leqq \varphi(X) - c\delta_1^2\, t^{\frac{R}{1+R}}.$$

これから

$$\int_{\mathcal{V}-\mathcal{U}} \leqq \exp\left\{ \varphi(X)(1-\varepsilon_1) \right\}$$

が導かれる。

以上をまとめて結局

$$\log P(Z) \sim \varphi(\psi(Z)) + \tilde{\sigma}(Z\psi(Z))$$

となり、この右辺は $\psi(Z)$ の形から具体的に求められて

$$\varphi(\psi(Z)) + \tilde{\sigma}(Z\psi(Z))$$
$$= (1+R)\left\{ \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\nu r_1} m^{-r_2 m^2} C_0 \right\}^{\frac{1}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}}.$$

これで目的の漸近式が得られた。

参考文献

三井：行列の加法的理論 ─ Waring 型の問題と分割問題 ─，1983年度講義録（学習院大学理学部）．　（現在品切）