数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 77-85

総実代数体のKronecker極限公式について

江上繁樹（富山大学）
EGAMI Shigeki

§0. [S1], [S2], [S3] において、総実代数体 K の合同ideal類 C に対する partial zeta 関数 $\zeta_K(s,C)$ について、$s=0$ における値および1階導関数の値の新しい表示が得られた。よく知られているように、これらの値はある種の符号条件をみたす Hecke 類指標 χ に対する $L_K(1,\chi)$ の値と結びついている。より一般の χ を扱うためには $\zeta_K(s,C)$ の高階導関数の 0 における値が必要になる。このノートでは $0\leq r\leq[K:\mathbb{Q}]-1$ のとき $\zeta_K^{(r)}(0,C)$ を Barnes zeta 関数の多重積分および、その s に関する導関数の1次結合で表わすことを試みる。$r=0,1$ の場合、[S1]〜[S3] の別証が得られる。証明の方法は [E1] の拡張である。

§1. K を n 次総実代数体 $(n\geq 1)$, C をある modulus に関する狭義 ray class, $\mathfrak{b}$ を整ideal で $\mathfrak{b}^{-1}\in C$ なるものとする。

$$\zeta_K(s,C)=N\mathfrak{b}^{s}\sum_{(\alpha)\subset\mathfrak{b}}N_K(\alpha)^{-s},$$

ただし、和は $(\alpha)\subset\mathfrak{b}$ となる単項ideal (α) 全体にわたるものとする。
[S1] にあるように、右辺の和は

$$\sum_{(\alpha)\subset \mathfrak{a}} N_K(\alpha)^{-s} = \sum_{j\in J}\sum_{x\in R_j} \zeta(s, A_j, x),$$

ただし，Jは添字の有限集合，R_j は $\mathbb{Q}_{>0}^{r_j}$ $(1\leq r_j\leq n)$ の有限集合，

A_j は (n, r_j) 型の成分が正であるような行列である。また $\zeta(s, A, x)$ は次のようなDirichlet級数である： $A=(a_{ij})$ $\begin{smallmatrix} i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,r\end{smallmatrix}$，$a_{ij}>0$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_r\end{pmatrix}$，$x_j>0$ に対して

$$\zeta(s, A, x) = \sum_{(n_1,\cdots,n_r)\in \mathbb{N}^r} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(n_j+x_j)\right)^{-s}$$

この級数は $\mathrm{Re}\, s > \frac{r}{n}$ で広義一様かつ絶対収束し，全s-平面に有理型に解析接続される。([S1]) 特に $n=1$ の場合，Barnes の zeta関数といい，$\Omega=(\omega_1,\cdots,\omega_r)$ に対し，$\zeta_r(s,\Omega,x)$ とかくことにする。以上のことから，$\zeta_K(s, c)$ の $s=0$ での挙動を調べるには $\zeta(s, A, x)$ について調べれば十分である。

$1\leq k\leq n$ となる k に対し，Aの第k行と第n行を入れかえた行列を $A^{(k)}$ であらわす。また $(u_1,\cdots,u_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(\underline{u}) = \varphi(u_1,\cdots,u_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ 1-u_1-\cdots-u_{n-1}\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^n$$

とおく。次の命題は容易に出る

<u>Proposition 1</u>. $\mathrm{Re}\, s > \frac{r}{n}$ のとき

$$\zeta(s, A, x) = \frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)^n} \sum_{k=1}^{n} \int_{D_{n-1}} (u_1 \cdots u_{n-1})^{s-1} (1-u_1-\cdots-u_{n-1})^{s} \times$$

$$\zeta_r(ns, {}^t(A^{(k)}\varphi(\underline{u})), x)\, du_1 \cdots du_{n-1},$$

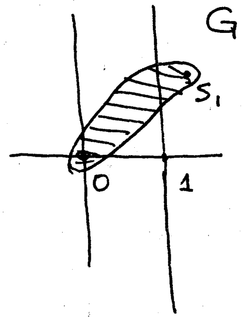
ただし、$D_{n-1} = \{ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mid x_i \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 \}$。

[S1]〜[S3] では、この積分（少し形は違うが）を contour integral に変形して解析接続しているが、ここでは、被積分関数を変形していく。

§2. この節では一般に

$$I(s, g) = \int_{D_m} (u_1 \cdots u_m)^{s-1} (1-u_1-\cdots-u_m)^{s} g(s, \underline{u})\, du_1 \cdots du_m$$

の形の積分の $s=0$ への解析接続を考察する。ただし $g(s, \underline{u})$ は次の条件をみたすものとする：



(★) $\left[\begin{array}{l} {}^{\exists}G:\ 0 \text{ および } s_1\ (\mathrm{Re}\, s_1 > 1) \text{ をふくむ領域}, \\ {}^{\exists}F:\ D_m \text{ をふくむ } \mathbb{C}^m \text{ の領域} \\ \text{があり、} g(s, \underline{u}) \text{ は } G \times F \ni (s, \underline{u}) \text{ で正則} \end{array}\right.$

被積分関数は u_i のいくつかが 0 となるところで $\mathrm{Re}\, s<1$ のとき singularity をもつので、それらを除去することを考える。

$0 \leqq p \leqq m-1$ をみたす p に対し、

$$D^{(0)}=\{(0,\cdots,0)\},$$

$$D^{(p)}=\bigcup_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq m} D(i_1,\cdots,i_p), \quad D(i_1,\cdots,i_p)=\{\overset{\in D^m}{(u_1,\cdots,u_m)} \mid \underset{i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}}{u_i=0 \text{ if }}\}$$

とおく。明らかに $D^{(0)}\subset D^{(1)}\subset\cdots\subset D^{(m-1)}\subset D=D_m$。

H を D_m で正則な m 複素変数の関数のなす線型空間、

$$H^{(p)}=\{f\in H \mid f(\underline{u})=0 \quad \forall \underline{u}\in D^{(p)}\}, \quad H^{(-1)}=H$$

とおくと

$$H=H^{(-1)}\supset H^{(0)}\supset\cdots\supset H^{(m-1)}$$

H 上の線型作用素 $\partial^{(p)}$ を

$$(\partial^{(p)}f)(u_1,\cdots,u_m)=f(u_1,\cdots,u_m)-\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq m} f\circ P_{i_1,\cdots,i_p}(\underline{u}),$$

ただし、$P_{i_1,\cdots,i_p}(\underline{u})=(v_1,\cdots,v_m)$, $v_i=\begin{cases}0 & i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}\\ u_{i_\nu} & (\nu=1,\cdots,p)\end{cases}$

とおく。$\partial^{(p)}H^{(p-1)}\subset H^{(p)}$ は容易にわかる。従って

$$\Delta_p=\partial^{(p)}\circ\partial^{(p-1)}\circ\cdots\circ\partial^{(0)}.$$

とおくと、$\Delta_p H\subset H^{(p)}$.

さらに

Proposition 2. $1 \leqq p \leqq m$, $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m$ とするとき

$$f \in H^{(p-1)} \Longrightarrow \frac{1}{u_{i_1} \cdots u_{i_p}} (f \circ P_{i_1, \cdots, i_p})(\underline{u}) \text{ は } D(i_1, \cdots, i_p) \text{ で}$$

連続.

Corollary. 上の条件の下に.

$$f \in H \Longrightarrow \frac{1}{u_{i_1} \cdots u_{i_p}} ((\Delta_{p-1} f) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})(\underline{u}) \text{ は } D(i_1, \cdots, i_p) \text{ で}$$

連続.

この結果を使って, $I(s, g)$ の解析接続を与える.

まず, 形式的な変形により

$$I(s, g) = I(s, \Delta_m g) + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m} I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})$$

$$+ I(s, g(s, 0, \cdots, 0)) \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

ここで, 和の各項および最後の項は

$$I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})$$

$$= \frac{1}{m-p+1} \frac{\Gamma(s)^{m-p+1}}{\Gamma((m-p+1)s)} \int_{D(i_1, \cdots, i_p)} (u_{i_1} \cdots u_{i_p})^{s-1} (1 - u_{i_1} - \cdots - u_{i_p})^{s} \times$$

$$(\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p}(\underline{u}) \cdot du_{i_1} \cdots du_{i_p}.$$

$$I(s, g(s,0,\cdots,0)) = g(s,0,\cdots,0)\frac{1}{m}\frac{\Gamma(s)^{m+1}}{\Gamma((m+1)s)}$$

$$I(s, \Delta_m g) = \int_{D_m} (u_1\cdots u_m)^{s-1}(1-u_1-\cdots-u_m)^{s}(\Delta_m g)(\underline{u})\, du_1\cdots du_m .$$

Proposition 2により上の積分の各項は条件☆のGの形をした領域で収束し、その範囲でsの正則関数をあらわす。従って $I(s,g)$ は 0の近傍へ解析接続される。

§3. 前§での結果をProposition 1の積分に応用する。$m=n-1$ とおき、簡単のため

$$g_k(s,\underline{u}) = \zeta_r(ns, {}^t(A^{(k)}\varphi(\underline{u})), x)$$

とおく。$g_k(s,\underline{u})$が条件☆をみたすことは容易に示せる（[B], [E2]）従って

<u>Theorem</u>. $s=0$の近傍で

$$\zeta(s,A,x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\Big\{ \zeta_r(ns, A_k, x) + \sum_{p=1}^{n-2}\frac{1}{n-p}\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma((n-p)s)}\cdot\frac{1}{\Gamma(s)^p}\times$$

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n-1}\int_{D(i_1,\cdots,i_p)}(u_{i_1}\cdots u_{i_p})^{s-1}(1-u_{i_1}-\cdots-u_{i_p})^{s}\,(\Delta_{p-1}g_k)\varphi_{i_1,\cdots,i_p}(\underline{u})\,du_{i_1}\cdots du_{i_p}$$

$$+\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)^n}\int_{D_{n-1}}(u_1\cdots u_{n-1})^{s-1}(1-u_1-\cdots-u_{n-1})^{s}(\Delta_{n-1}g_k)(\underline{u})\,du_1\cdots du_{n-1}\Big\}$$

ただし．A_k は A の第 k 行ベクトルをあらわす。

Corollary 1 ([S2], [S3])

$$\zeta(0,A,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\zeta_r(0,A_k,x)$$

$$\frac{d}{ds}\zeta(s,A,x)\Big|_{s=0}=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{d}{ds}\zeta_r(s,A_k,x)\Big|_{s=0}$$

$$+\sum_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ j\neq k}}\int_0^1\frac{1}{u}\left(\zeta_r(0,A_j u+A_k(1-u),x)-\zeta_r(0,A_k,x)\right)du\Big\}.$$

$p\geqq 2$ の場合．ζ_r の多重積分が出てきて．わかりやすい形には

書けないが．

$$\frac{1}{n-p}\,\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma((n-p)s)\,\Gamma(s+1)^p}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n-1}\int_{D(i_1,\cdots,i_p)}(u_{i_1}\cdots u_{i_p})^{s-1}(1-u_{i_1}-\cdots-u_{i_p})^{s}$$

$$\times(\Delta_{p-1}g_k)P_{i_1\cdots i_p}(\underline{u})\,du_{i_1}\cdots du_{i_p}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(p)}(A,x)s^\nu$$

を $s=0$ での展開とすると

Corollary 2.

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^{q} \zeta(s, A, x)\Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{ds}\right)^{q} \zeta_r(ns, A_k, x)\Big|_{s=0}$$

$$+ C_{q-1}^{(1)}(A, x) + C_{q-2}^{(2)}(A, x) + \cdots + C_0^{(q)}(A, x) \quad (0 \leqq q \leqq n-1).$$

<u>Remark</u> 1. $\zeta_r(0, (v_1, \ldots, v_n), (x_1, \ldots, x_n))$ は v_i, x_i 達の有理関数.
また $\frac{d}{ds}\zeta_r(s, (v_1, \ldots, v_n), (x_1, \ldots, x_n))$ は Barnes の r重ガンマ関数によって表わされる ([B], [E2])。

2. $C_0^{(q)}(A, x)$ は a_{ij}, x_j の有理関数の q-重積分 したがって $q \geqq 1$ なら初等関数の $q-1$ 重積分となる。

文献

[S1] Shintani, T., On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976), 393–417

[S2] Shintani, T., On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, ibid. 24 (1977), 167–199

[S3] Shintani, T., On values at s=1 of certain L-functions of totally real algebraic number fields. Algebraic Number Theory (Proc. International Symp. Kyoto), Japan Soc. for Promotion of Science, 201–212, 1977.

[B] Barnes, E.W., On the theory of the multiple gamma function., Trans. Cambridge Philos. Soc. 19, 374–425 (1904).

[E1] Egami, S., A note on Kronecker limit formula for real quadratic fields, Mathematika 33 (1986), 239–243

[E2] Egami, S., Note on multiple gamma functions (preprint).