数理解析研究所講究録
第 708 巻 1989 年 97-106

An application of Nesterenko's method to Mahler functions

奈良女子大理　西岡久美子（Kumiko Nishioka）

1. Mahler functions.

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ とおく。Mahler は 1929 年に、代数的数 α （$0<|\alpha|<1$） に対して、$f(\alpha)$ が 超越数になることを証明した。この証明は関数方程式

$$f(z^2)=f(z)-z$$

に基づいている。Mahler は更に一般的に次の定理を証明している。以下で K は有限次代数体を表わすとする。

定理 1.（Mahler [6]）　$f(z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的な K 係数巾級数環 $K[[z]]$ の元で 自然数 $d \geqq 2$ に対し関数方程式

$$f(z^d)=\frac{\sum_{i=0}^{d-1} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{i=0}^{d-1} b_i(z) f(z)^i}, \quad (a_i(z),\ b_i(z) \in K[z])$$

をみたすとする。$\Delta(z)$ は $\sum_{i=0}^{d-1} a_i(z) X^i$ と $\sum_{i=0}^{d-1} b_i(z) X^i$ との X に関する終結式とする。このとき代数的数 α

$(0<|\alpha|<1)$ で $f(z)$ が収束し, $\Delta(\alpha^{d^k})\neq 0$ $(k\geqq 0)$ ならば $f(\alpha)$ は超越数である。

いくつかの代数的独立な巾級数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)\in K[[z]]$ の代数的数 α での値 $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ の代数的独立性については, Mahler, Loxton - van der Poorten, Kubota 等によって研究されている。

定理 2 (Kubota [3]). $f_1(z),\cdots,f_m(z)\in K[[z]]$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立で, 自然数 $d\geqq 2$ に対し, 関数方程式

$$f_i(z^d)=a_i(z)f_i(z)+b_i(z),\quad (a_i(z),\ b_i(z)\in K(z))$$

をみたすとする。このとき, 代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ で $f_i(z)$ $(i=1,\cdots,m)$ が収束し, α^{d^k} $(k\geqq 0)$ が $a_i(z)$, $b_i(z)$ の pole でないならば, $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ は代数的独立である.

例 (Loxton - van der Poorten [5]). 自然数 $d\geqq 2$ に対し,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{d^n}$$

とおく。$f(z^i)=f(z^{di})+z^i$ が成り立つが, $f(z)$, $f(z^2),\cdots,f(z^{d-1})$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であることが証

明される。定理2を適用して，代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ に対して，$f(\alpha), f(\alpha^2), \cdots, f(\alpha^{d-1})$ が代数的独立であることがわかる。

2. Measure of Algebraic independence.

有理整数係数の多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m]$ に対して，$H(P)$ は P の係数の絶対値の最大値を，$d(P)$ は P の total degree を表わすとする。$\beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{C}$ は代数的独立な数とする。$H(P) \leqq H$, $d(P) \leqq \Delta$ なる $P \neq 0$ に対し，

$$|P(\beta_1, \cdots, \beta_m)| \geqq \varphi(H, \Delta)$$

をみたす H，Δ の関数 φ を見つけることを考える。Nesterenko は可換環を使って次の定理を得た。

定理3 (Nesterenko [8]). $H \geqq 1$, $\Delta \geqq 1$ とする。定理2の仮定の下に，

$$0 \neq P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m], \quad H(P) \leqq H, \quad d(P) \leqq \Delta$$

なら

$$|P(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha))| \geqq \gamma_2(\Delta) H^{-\gamma_1 \Delta^m}$$

ここで γ_1 は H にも Δ にもよらない正定数で $\gamma_2(\Delta)$ は H にはよらないが Δ による正定数である。

この定理においては、$\gamma_2(\lambda)$ が λ についてどのような関数なのかは全く解からない。これを知るために私は次の定理を証明した。

定理4. 巾級数 $f_1(z), \cdots, f_m(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ は自然数 $d \geqq 2$ に対し関数方程式

$$f_i(z^d) = \frac{A_i(z, f_1(z), \cdots, f_m(z))}{A_0(z, f_1(z), \cdots, f_m(z))} \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

をみたすとする。ここで $A_i(z, X_1, \cdots, X_m) \in \mathbb{C}[z, X_1, \cdots X_m]$ $(0 \leqq i \leqq m)$ で $\mathrm{tot.deg}_{\underline{X}} A_i \leqq t < d^{1/m}$ とする。このとき多項式 $Q(z, X_1, \cdots, X_m) \in \mathbb{C}[z, X_1, \cdots, X_m]$ が

$$\deg_z Q \leqq M, \quad \mathrm{tot.deg}_{\underline{X}} Q \leqq N \quad (M \geqq N \geqq 1)$$
$$Q(z, f_1(z), \cdots, f_m(z)) \neq 0$$

をみたせば、

(1) $$\mathrm{ord}_{z=0}\, Q(z, f_1(z), \cdots, f_m(z)) \leqq c M N^m N^{(m^2 \log t)/(\log d - m \log t)}$$

である。ここで c は M, N によらない正定数である。

この定理において、$t=1$ のとき (1) 式の右辺は cMN^m となり best possible な評価となる。これと、Nesterenko

の方法を使って. Becker が定理3において. $\gamma_2(s) = \exp(-\gamma s^{3m+2})$ とできることを証明した。

定理5 (Becker [1]). $f_1(z), \cdots, f_m(z) \in K[[z]]$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立で. $F(z) = {}^t(f_1(z), \cdots, f_m(z))$ とおく時. 自然数 $d \geqq 2$ に対して関数方程式

$$F(z^d) = A(z)F(z) + B(z), \quad \begin{pmatrix} A(z) \in M_m(K(z)) \\ B(z) \in (K(z))^m \end{pmatrix}$$

をみたすとする。代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ で $f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)$ が収束し. α^{d^k} $(k \geqq 0)$ は $A(z)$, $B(z)$ の pole でないとする。0でない多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m]$ が $H(P) \leqq H$, $d(P) \leqq s$ $(H \geqq 1, s \geqq 1)$ をみたせば

$$|P(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha))| \geqq \exp(-\gamma s^m(\log H + s^{2m+2}))$$

である。ここで γ は H にも s にもよらない正定数である。

3. Type of transcendental extension.

0でない多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m]$ に対して.

$$t(P) = \log H(P) + d(P)$$

と定義する。$x_1, \cdots, x_m$ を代数的独立な数として. $F = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_m) \subset \mathbb{C}$ とおく。$\mathbb{R} \ni \tau \geqq 1$ とする。

定義. Fの trans. type $\leqq \tau$

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]$, $\alpha \neq 0$ に対し

$$\log|\alpha| \geqq -\gamma(t(\alpha))^{\tau}$$

が成り立つ定数 $\gamma > 0$ が存在する。

Fに対し, このような τ を見つけるのは難しい問題である。(Waldschmidt [11]) $F = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_m)$ で Fの trans. type $\leqq \tau$ なら, $\tau \geqq m+1$ でなければならないことが知られている. 次の例が知られている。

- $\mathbb{Q}(\pi)$ の trans. type $\leqq 2+\varepsilon$. (ここで εは任意の正の数)

- Choudnovsky [2, Ch. 8]. lattice $\Omega = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$ に関する $\wp$ 関数の g_2, g_3 が代数的数なら, $\eta(\omega) = 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)$ とおくとき,

$$\mathbb{Q}\left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\eta(\omega)}{\omega}\right) \text{ の trans. type} \leqq 3+\varepsilon.$$

(ここで εは任意の正の数)

定理5 より,

$$\text{trans. type of } \mathbb{Q}(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)) \leqq 3m+2$$

がわかる. これは trans. degree 3 以上で有限な trans. type を持つような体の最初の例を与える。

4. Example.

gは3以上の自然数とし．$0 \leqq t \leqq g-1$, $i \geqq 0$とする。自然数nは

$$n = n_0 + n_1 g + \cdots + n_r g^r, \quad n_r \neq 0$$
$$0 \leqq n_0, \ldots, n_r \leqq g-1$$

と一意に表わせるが．このとき，$n = (n_r, \ldots, n_1, n_0)$と表わし．$0 = (0)$としておく．

$$S(t, i) = \{ n = (n_r, \ldots, n_0) \mid n_r, \ldots, n_0 \text{の中に} t \text{が高々} i \text{回表われる} \}$$

と定義する．

$$f_{ti}(z) = \sum_{n \in S(t,i)} z^n$$

とおくとき，$\{ f_{ti} \}_{0 \leqq t \leqq g-1,\ i \geqq 0}$は次の関数方程式をみたす。

$$P_t(z) = \frac{1-z^g}{1-z} - z^t.$$

$$f_{t0}(z) = \begin{cases} P_0(z)(1 + f_{00}(z^g)) & (t=0) \\ P_t(z) f_{t0}(z^g) & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$f_{t1}(z) = \begin{cases} P_0(z) f_{01}(z^g) + f_{00}(z^g) + 1 & (t=0) \\ P_t(z) f_{t1}(z^g) + z^t f_{t0}(z^g) & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$f_{ti}(z) = P_t(z) f_{ti}(z^g) + z^t f_{t, i-1}(z^g)$$
$$(0 \leqq t \leqq g-1, \quad i \geqq 2).$$

Mahler [7]は$f_{t0}(z)$が$\mathbb{C}(z)$上超越的であることを

証明した。我々は次の定理を証明した。

定理 6 (with Keiji Nishioka).
$\{f_{ti}\}_{0 \leqq t \leqq g-1,\, i \geqq 0}$ は $\mathbb{C}(x)$ 上代数的独立である。

従ってこれら f_{ti} に定理 5 を適用することができる。

References

[1] Becker, P.-G.: Effective measures for algebraic independence of the values of Mahler type functions, preprint.

[2] Chudnovsky, G.V.: Contributions to the theory of transcendental numbers, A.M.S., Surveys and monographs (19) 1984.

[3] Kubota, K.K.: On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values, Math. ann. 227(1977), 9-50.

[4] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: Transcendence and Algebraic independence by a Method of Mahler, Transcendence Theory: Advances and Applications, ed. by A. Baker (Academic Press, 1977).

[5] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: A class of hypertranscendental functions, Aequationes Mathematicae 16 (1977), 93-106.

[6] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen. Math. Ann. 101 (1929), 342-366.

[7] Mahler, K.: On the generating function of the integers with a missing digit, J. Indian Math. Soc. 15 (1951), 33-40.

[8] Nesterenko, Yu.V.: On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions, Mat. Sb. 128(170)(1985); English transl. in Math. USSR Sb. 56 (1987), 545-567.

[9] Nishioka, Kumiko: On an estimate for the orders of zeros of Mahler type functions, preprint.

[10] Nishioka, Keiji and Nishioka, Kumiko: Algebraic independence of functions satisfying a certain type of functional equations, preprint.

[11] Waldschmidt, M.: Nombres transcendents, Lecture Notes in Math., No. 402 (Springe, 1974).