数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 113-119

超越数を2つの超越数の和で表現する

学習院大・理 豊田雅孝(MASANORI TOYODA)

§1. Introduction

実数の部分集合 $E, F \subset \mathbf{R}$ に対して

$$E+F := \{x+y \mid x \in E,\ y \in F\}$$

とおく。この記法を用いて表現できる有名な定理をいくつか思いつくままにあげてみれば、

Lagrangeの定理(1772):

$$\mathbf{N} = \mathbf{Z}^2+\mathbf{Z}^2+\mathbf{Z}^2+\mathbf{Z}^2.$$

Goldbach予想(1742):

$$(2\mathbf{N})^{\geq 6} = P+P.$$

Vinogradovの3素数定理(1937):

$$\#\{(2\mathbf{N}+1)\setminus(P+P+P)\} < \infty.$$

Erdösの定理(1962):

$$\mathbb{R} = L + L.$$

以上において、Pは奇素数全体の集合を、LはLiouville数全体の集合を表わす。さらにまた、Mahlerによる実数の分類

$$\mathbb{R} = A \cup S \cup T \cup U \quad (\text{disjoint union})$$

に関して、

$$(S+T) \cap L \neq \phi$$

が成り立つ([T])。この結果を拡張して、超越数の世界の様子をもっとくわしく知りたい。これが私の希望(の1つ)である。

<u>MAIN THEOREM.</u> $S \cup T \subset T + L.$

すなわち、U数でない超越数は1つのT数と1つのLiouville数との和で表わせる。

したがってたとえば e^{α} $(\alpha \in A, \neq 0)$ や π はT数とLiouville数との和に分解できる($e^{\alpha} \in S$, $\pi \in S \cup T$ であるから)。[T]の結果は

$$S \cap (T+L) \neq \phi$$

と表現することもできる($\tau\in T \Rightarrow -\tau\in T$ であるから)。それゆえ今回の主定理は[T]の結果の拡張になっている。

§2. 主定理の証明(アウトライン)

その最大のポイントは、次の命題を示すことにある。

PROPOSITION. U数でない任意の超越数 θ に対して、以下の性質(a),(b)をみたす1つの実数 ξ が存在する:

(a) $\forall n\in\mathbf{N}\ \exists\left\{\frac{a_{nt}}{b_{nt}}\right\}_{t=1}^{\infty}$: 異なる有理数から成る列;

$$\left|(\xi-\theta)-\frac{a_{1t}}{b_{1t}}\right| < e^{-b_{1t}} \quad (t=1,2,\cdots),$$

$n\geqq 2$ のとき $\left|\xi-\gamma_{nt}\right| \asymp H(\gamma_{nt})^{-x_n} \quad (t=1,2,\cdots).$

ただしここで

$$\gamma_{nt} := 2^{\frac{1}{n-1}} + \frac{a_{nt}}{b_{nt}},$$

$$x_n := (n^2+n+1)\cdot K(n) + n + 2,$$

$$K(n) := \max\{k_n(\theta),\ n+1\}.$$

(b) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists \lambda_n > 0\ \forall \beta \in A_n \setminus \{\gamma_{it}\}_{i \geqq 2,\, t \geqq 1}$;

$$|\xi - \beta| \geqq \lambda_n \cdot H(\beta)^{-\chi_n}. \qquad \text{——}$$

この命題の証明は長い。が、[T]のProp. 1 のそれと同じようにしてできる。

Main Theorem は、この命題から容易に出る: (a)の第1の不等式から $(\xi - \theta) \in L$, したがって

$$(\theta - \xi) \in L.$$

(a)の第2の評価式と(b)とを組み合せると

$$\chi_n(\xi) = \chi_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

χ_{n+1} は n について単調増加ゆえ $\kappa_n(\xi) = \chi_n(\xi) = \chi_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. それゆえ

$$\xi \in T$$

である!! (ここでT数の存在が示されることに注意。) ゆえに

$$\theta = \xi + (\theta - \xi) \in T + L.$$

<u>Remark.</u> [T]の結果"$(S+T) \cap L \neq \phi$"は形の上では W. M. Schmidt によるT数の存在定理"$T \neq \phi$"を含んでいるが、その証明においてT数の存在を

本質的に使っている。しかし、今回の主定理では上で見たようにその証明の中で"$T \neq \phi$"も示されており、それは本当の意味でT数の存在定理を含んでいるといえる。

§3. $\mathbb{R} = E + F$ であるための条件

$E, F \subset \mathbb{R}$ とする。次の補題は、任意の実数がEに属する数とFに属する数との和に分解できるための必要十分条件を与える。

実数$t \in \mathbb{R}$に対して

$$F_t := \{ t - y \mid y \in F \}$$

とおけば、

<u>LEMMA.</u>

$$\mathbb{R} = E + F \iff \forall t \in \mathbb{R};\ E \cap F_t \neq \phi.$$

この補題はほとんど自明であるが、しかし大変有用である。この条件をみたすE, Fの組の例をいくつか示そう：

(1) E …… $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ が可算となる集合,

F …… 非可算集合.

(2) E ……… E^c が零集合となる集合,
F ……… 正の測度をもつ集合, または
非可測集合.

(3) E, F ……… ともに残留集合 (residual set),
すなわち、第1類集合の補集合.

(2)の E (したがって F) の具体的なおもしろい例としては、 $E = \{$ タイプ1の S数 $\}$,
$E = \{$ 非有理度2の実数 $\}$
などがあげられる (注. 無理数 ξ の非有理度 $= \chi_1(\xi) = \kappa_1(\xi)$)。

(3)の具体的な例としては、
$$E = F = L$$
があげられる。これが Erdös の定理である。

(1), (2), (3) の E, F の組は、それぞれ集合論的, 測度論的, 位相的な意味で「大きい」集合の組である。「大きい」から $E + F = \mathbf{R}$ となるのであろう。

Mahler の定理 "異なるクラスに属する2つの超越数は代数的独立である" によって
$$T + L \subset \mathbf{R} \setminus A$$

であるが、ここで等号が成立するかどうか？ すなわち主定理の条件「U数でない」を除けるかどうか？今のところ技術的な困難があってこの条件を除くことはできないけれども、おそらく“$T+L=\mathbb{R}\setminus A$”であろうと思われる。さらにまた、$S+T$, $S+L$ はどのような集合なのか？ 位相的に「小さい」S, T からつくられる $S+T$ が位相的に「大きい」L を含むことができるかどうか？ これらの問題は今後の研究課題である。

<u>Remark.</u> 主定理から特に“$S\subset T+L$”が成り立つ。すなわち、測度論的に「小さい」T, L からつくられる $T+L$ が測度論的に「大きい」S を含むという現象が起きている。

REFERENCE

[T] M. Toyoda, Mahler の S数, T数, U数の代数的独立性について, 数理研講究録 657 (1988), 85–91.