数理解析研究所講究録
第 710 巻 1989 年 87-103

Duffing 方程式の周期解曲線の変形

岩手大学 教育学部 中嶋文雄
(Fumio Nakajima)

§1. まえがき、 周期的外力を有する Duffing 方程式

$$(*) \qquad \ddot{u} + k\dot{u} + \omega^2 u + a u^3 = \varepsilon \cos t \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

を考える。ここで $u = u(t) \in (-\infty, \infty)$ で，$k > 0$，$\omega \geqq 0$，$a \geqq 0$ と ε は定数とする。[4. p.400] より，(*) は常に 2π ー周期解を持つことが知られており，それを $u(t)$ とするとき，集合 $C = \{(u(t), \dot{u}(t)) \in R^2;\ 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$ は閉曲線となる。これを $u(t)$ の軌道と呼ぶ。(*) が線型ならば，即ち，$a = 0$ ならば，唯一つの周期解 $u(t)$ として $u(t) = A\cos(t + t_0)$ (A, t_0 : 定数) を持つ。このとき，軌道 C は円となる。しかしながら，(*) が非線型の場合，計算機によって描かれた C の形は必ずしも単一ではなく，様々の興味ある形状を呈することが知られ

ている。例えば，Y. Ueda([5]) は (*) において，$\omega=0$，$a=1$ に固定し，k と ε を様々な値に置くとき，C の形は単一でない閉曲線，カスプを有する閉曲線，更には chaotic curves となることを示した。更に最近になって Byatt-Smith [1] は，(*) において ω^2 を -1 で置き換えた negative stiffness の場合に，ε がある値 ε_0 を通って増加するとき，2π-周期解 $u(t,\varepsilon)$ の軌道 $C(\varepsilon)$ の形が急激に変化すること，即ち，$\varepsilon<\varepsilon_0$ では滑らかな閉曲線で，$\varepsilon=\varepsilon_0$ ではカスプを有する閉曲線で，$\varepsilon>\varepsilon_0$ ではこれらのカスプが extra loop に変形し，閉曲線の形状は一層複雑化することを見出した。このような $C(\varepsilon)$ の変化を，ここでは $C(\varepsilon)$ の $\varepsilon=\varepsilon_0$ における変形と呼ぶ。本稿の目的は，ε の変化に対する軌道 $C(\varepsilon)$ の変形の存在を数学的に，厳密に証明することである。(*) において，$a>0$ のときは，変数変換

$$u \to \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad \varepsilon \to \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$$

とおくことにより，(*) は次の形になる

$$\ddot{u} + k\dot{u} + \omega^2 u + u^3 = \varepsilon\cos t \qquad \cdots (1)$$

以下，(1) について考察する。

§2. 準備

<u>定義1.</u> 関数 $u(t)$, $t\in R$, が odd-harmonic であるとは,

$$u(t+\pi)\equiv -u(t)$$

となることである。

odd-harmonic な $u(t)$ は, 2π-周期的で その軌道 C は原点に関し対称となる。

<u>定義2.</u> $u(t,\gamma)$は, $t\in R$, $|\gamma-\gamma_0|<\delta$ (ここで, γ_0 と $\delta>0$ はある定数とする) で連続とする。$u(t,\gamma)$ が $\gamma=\gamma_0$ で変形するとは, 次の (i), (ii), (iii) が成立することである。

nをある自然数とする。

(i) $\gamma<\gamma_0$ のとき, $u(t,\gamma)$ は $[0,2\pi)$ に丁度 n個の極大値と 丁度 n個の極小値 を持ち, 変曲点を持たない。ここで, nはγに依存しない。

(ii) $\gamma=\gamma_0$ のとき, $u(t,\gamma_0)$ は $[0,2\pi)$ に丁度 n個の極大値と n個の極小値を持ち, 更に変曲点を丁度2個持つ。

(iii) $\gamma>\gamma_0$ のとき, $u(t,\gamma)$ は $[0,2\pi)$ に丁度 $n+2$ 個の極大値と $n+2$ 個の極小値を持ち, 変曲点を持たない。

定義2と同様にして次の事を定める.

<u>定義3.</u> (i) $u(t,\varepsilon,\gamma)$ は $(t,\varepsilon,\gamma)\in R^3$ で連続とする。$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は (ε,γ) を固定すると, t について odd-harmonic とする。$u(t,\varepsilon,\gamma)$ が ε を固定するとき, $\gamma=\gamma_0$ で変形するとは, $u(t,\varepsilon,\gamma)$ が ε を固定するとき, γ_0 の近傍の γ に対し, 定義2の (i), (ii), (iii) が成立することである。ここで, γ_0 は ε に依存しても良い.

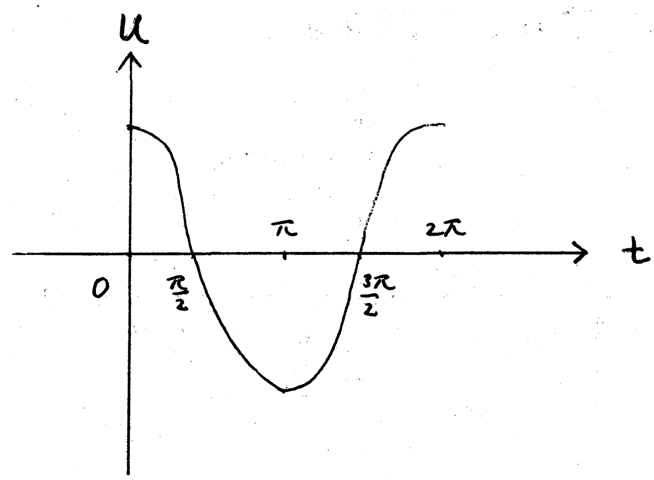
(ii) $u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ は $(t,\varepsilon,\gamma,k)\in R^4$ で連続で, (ε,γ,k) を固定するとき, t について odd-harmonic とする。$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ が (ε,k) を固定するとき, $\gamma=\gamma_0$ で変形するとは, $u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ が (ε,k) を固定するとき, γ_0 の近傍の γ に対し, 定義2の (i), (ii), (iii) が成立することである。ここで γ_0 は (ε,k) に依存して良い。

次に, 定義2の例を示す。

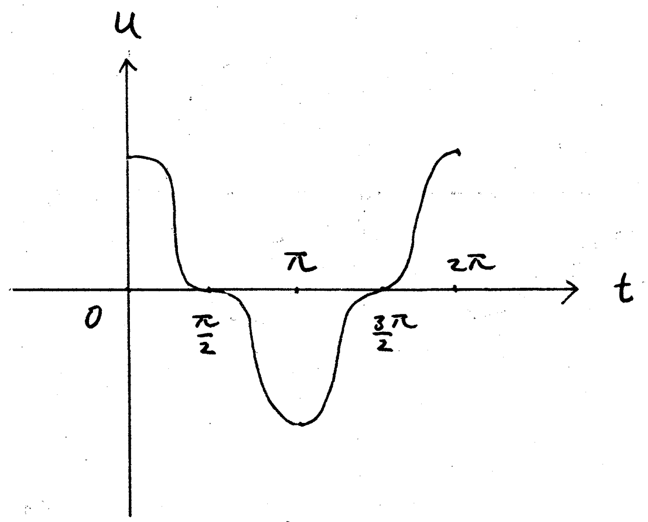
$$u(t,\gamma)=\cos^3 t-\gamma\cos t$$

ここで, $\gamma_0=0$ で $n=1$ である. (i) $\gamma<0$, (ii) $\gamma=0$, (iii) $\gamma>0$ の各々の場合, $u(t,\gamma)$ のグラフは次のように変化する.

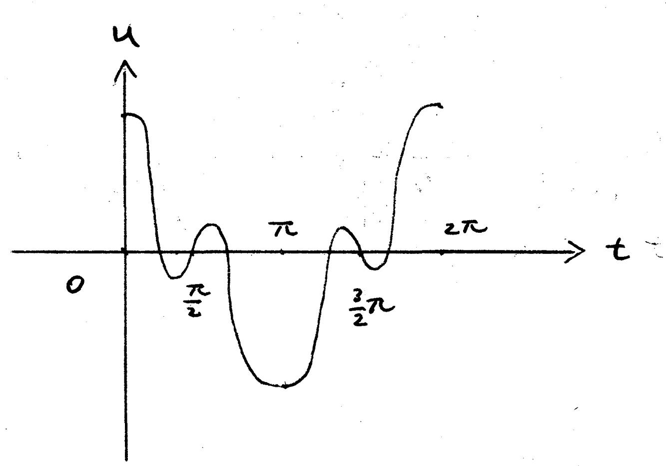
(i)



(ii)

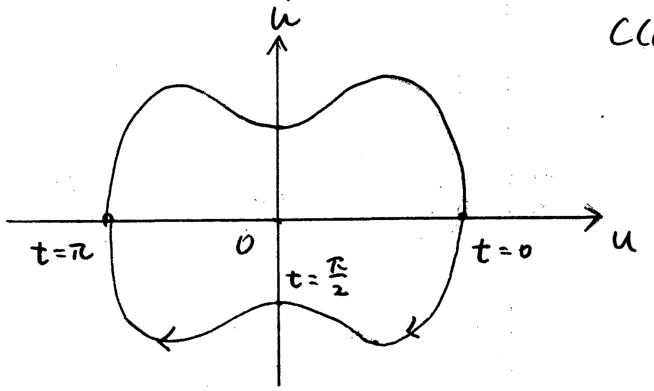


(iii)



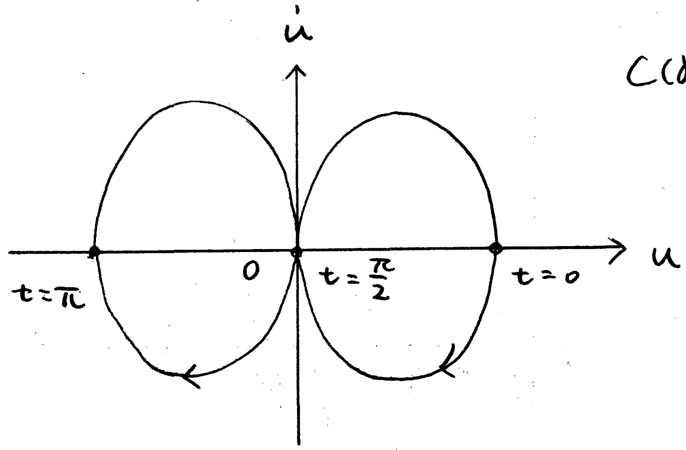
次に，上の $u(t,\gamma)$ に対し，軌道 $C(\gamma)$ を描くと，上述の (i),(ii), (iii) に対応して次のようになる。

(i)



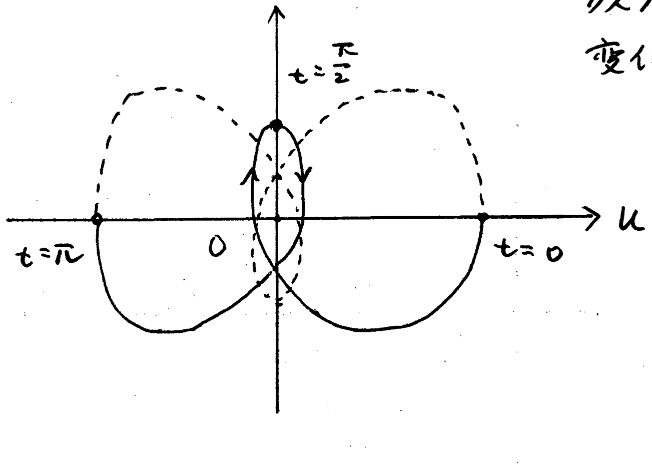
$C(\gamma)$ は smooth.

(ii)



$C(\gamma)$ はカスプを持つ，

(iii)



カスプは extra loop に変化する.

$C(\gamma_0)$ がカスプを持つことは，$u(t,\gamma_0)$ が変曲点を持つことに対応しており，Byatt-Smith の得た $C(\gamma)$ の変形は定義2の $u(t,\gamma)$ の変形に対応していると考えられる。次節では，先づ，変曲点を有する周期解の存在について考える。

定義4. 方程式(1)で，$k=0$ の場合を考える。その解 $u(t)$ が even かつ odd-harmonic ならば，簡単のため $u(t)$ を E-solution と呼ぶ.

〔注〕 E-solution の軌道 C は，u 軸及び $\dot{u}$ 軸に関し対称となる。又，$u(t)$ が E-solution であるための必要かつ十分条件は，$\dot{u}(0)=u(\frac{\pi}{2})=0$ であることが知られている（[4. p.404]）。

定義5 2π-周期解 $u(t)$ が quasi-stable であるとは，その特性乗数を λ_1，λ_2 とするとき，$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$ で，かつ λ_1 と λ_2 が共役な複素数となることである。

§3. 変曲点を有する周期解.

(1) において, $k=0$ の場合を考える

$$\ddot{u} + \omega^2 u + u^3 = \varepsilon \cos t \qquad \cdots (2)$$

<u>定理1</u> 3以上の任意の奇数 $2m+1$ $(m \geqq 1)$ に対し,
$\varepsilon = 0$ の近傍で定義された微分可能な偶関数 $\omega = \omega(\varepsilon; m)$
が存在して, $\omega(0; m) = 2m+1$, $\dfrac{d^2\omega}{d\varepsilon^2}(0; m) < 0$ で,
方程式

$$\ddot{u} + \omega^2(\varepsilon; m) u + u^3 = \varepsilon \cos t$$

は, ε が十分小なるとき, E-solution $u(t, \varepsilon)$ を持ち, これは,
$t = \frac{\pi}{2}$ と $t = \frac{3}{2}\pi$ で変曲点を持ち, 更に

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t - \frac{(-1)^m}{\omega(\omega^2 - 1)} \cos \omega t + O(\varepsilon^2) \right) \qquad \cdots (3)$$

と表される, ここで $\omega = 2m+1$ である。特に $m = 3$
のとき, $u(t, \varepsilon)$ は quasi-stable である。

注.1 $m = 3$ のとき, (3) は3倍角の公式より

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{1}{6} \cos^3 t + O(\varepsilon^2) \right) \cdots\cdots (4)$$

となる.

注釈 (2)の小さな2π-周期解 $u(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ については，W.S. Loud の研究[3]がある。そこでは，(2)において，$\omega\neq$自然数ならば，εが十分小なるとき，(2)は2π-周期解 $u(t,\varepsilon)$：

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{1}{\omega^2-1}\cos\omega t+O(\varepsilon)\right)$$

を持つことが知られている。この解は，上式より，変曲点を持たないことが導かれる。よって，(2)の小さな周期解で，変曲点を持つものを見出そうとすれば，

$$\varepsilon\to 0 \text{ のとき，} \omega\to\text{整数}$$

でなければならない。この意味において，定理1は，W.S. Loudの結果を補うものである。

定理1の証明．(2)の解$u(t)$で，

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dot{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dot{u}(0)=0 \quad \cdots (5)$$

となるものを求めれば，$u(t)$は E-solution で，$t=\frac{\pi}{2}$と$t=\frac{3}{2}\pi$で変曲点を持つことが容易に示される。そこで，先ず，(2)の初期値問題：

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dot{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

の解を $u(t,\omega,\varepsilon)$ とおく。これが (5) を満たすことは、

$$\dot{u}(0,\omega,\varepsilon)=0 \quad \cdots (6)$$

を示すことである。$\dot{u}(0,\omega,\varepsilon)$ を、ω を固定して、$\varepsilon=0$ の周りで、ε について展開すれば、

$$\dot{u}(0,\omega,\varepsilon) = \dot{u}(0,\omega,0)+\frac{\partial \dot{u}}{\partial\varepsilon}(0,\omega,0)\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varepsilon^2}(0,\omega,0)\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3\dot{u}}{\partial\varepsilon^3}(0,\omega,0)\varepsilon^3+O(\varepsilon^4)$$

となる。ε の各係数を順次求めると

$$\dot{u}(0,\omega,\varepsilon)=\varepsilon\left\{\frac{1}{\omega^2-1}\cos\frac{\pi}{2}\omega+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\dot{u}}{\partial\varepsilon^3}(0,\omega,0)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\right\}$$

となる。ここで

$$f(\omega,\varepsilon)=\frac{1}{\omega^2-1}\cos\frac{\pi}{2}\omega+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\dot{u}}{\partial\varepsilon^3}(0,\omega,0)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

とおくと、(6) は

$$f(\omega,\varepsilon)=0$$

と同値になる。そこで、上式を、ε を独立変数、ω をその未知関数と見て、解くことを考える。$\varepsilon=0$, $\omega=2m+1$ の近傍で、陰関数の定理を用いる。証明の概略は終る。

次の結果は[2, p.348]より，容易に導かれる。方程式

$$\ddot{u} + \omega^2(\varepsilon;3)u + u^3 = \varepsilon\cos t \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\ddot{u} + \omega^2(\varepsilon;3)u + u^3 = \gamma\cos t \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\ddot{u} + k\dot{u} + \omega^2(\varepsilon;3)u + u^3 = \gamma\cos t \quad \cdots\cdots (9)$$

を考える。

Corollary 1. 十分小なる ε に対し，$u(t,\varepsilon)$ を (7) の quasi-stable な E-solution とする。このとき，十分小なる定数 $\delta_1(\varepsilon)>0$ と $\delta_2(\varepsilon)>0$ が存在して，次の (i) と (ii) が成立する：

(i) (8) において，$|\gamma-\varepsilon|<\delta_1(\varepsilon)$ ならば，$u(t,\varepsilon)$ の近傍に，唯一つの E-solution $u(t,\varepsilon,\gamma)$ が存在し，これは γ について微分可能で，$u(t,\varepsilon,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)$ となる。

(ii) (9) において，$|\gamma-\varepsilon|<\delta_1(\varepsilon)$ かつ $|k|<\delta_2(\varepsilon)$ ならば，このとき，$u(t,\varepsilon)$ の近傍に唯一つの odd-harmonic solution $u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ が存在して，これは (γ,k) について微分可能で，$u(t,\varepsilon,\varepsilon,0)=u(t,\varepsilon)$ となる。更に，$k>0$ ならば，$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ は漸近安定である。

§4. 周期解曲線の変形

<u>定理2.</u> 方程式(8) を考える。$u(t,\varepsilon,\gamma)$ を Corollary 1 の (i) の E-solution とする。このとき、$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は、ε が十分小なるとき、$\gamma=\varepsilon$ で変形する。

証明のため、次の lemma を準備する。

<u>Lemma 1.</u> $u(t,\varepsilon,\gamma)$ を $(t,\varepsilon,\gamma)\in R^3$ で連続的微分可能で、(ε,γ) を固定するとき、t について解析的とする。ε が十分小なるとき、定数 $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して、$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は、$|\gamma-\varepsilon|<\delta(\varepsilon)$ のとき、odd-harmonic とする。更に、次の事を仮定する：

(i) $\gamma=\varepsilon$ のとき、$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は

$$u(t,\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon(\cos^3 t + p(t,\varepsilon))$$

と表されている。ここで $p(t,\varepsilon)$ は t について 2π-周期的で、

$$p(t,\varepsilon)\to 0,\ \frac{\partial p}{\partial t}(t,\varepsilon)\to 0,\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t,\varepsilon)\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

である。

(ii) $$\dot{u}(\tfrac{\pi}{2},\varepsilon,\varepsilon) = \ddot{u}(\tfrac{\pi}{2},\varepsilon,\varepsilon)=0,$$

$$\dddot{u}(\tfrac{\pi}{2},\varepsilon,\varepsilon) < 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \gamma\right)\Big|_{\gamma=\varepsilon} > 0$$

とする.

このとき, $u(t,\varepsilon,\gamma)$ は, ε が十分小なるとき, $\gamma=\varepsilon$ で変形する。

lemma の証明は次の段階 (I), (II), (III) に従って証明されて, その結論が定義2で $n=1$ と置いた場合として得られる。

lemma の証明　十分小なる ε に対し, $\frac{\pi}{2}$ を含む開区間 $I(\varepsilon) \subset (0, 2\pi)$ が存在して, 次の事が成立する。

(I)　(i) $\gamma<\varepsilon$ のとき, $u(t,\varepsilon,\gamma)$ は $I(\varepsilon)$ 上で単調減少で変曲点を持たない。ここで $I(\varepsilon)$ は γ に依存しない。

(ii) $\gamma=\varepsilon$ のとき, $u(t,\varepsilon,\varepsilon)$ は $I(\varepsilon)$ 上で, 単調減少で, $I(\varepsilon)$ 上に唯一つの変曲点として $t=\frac{\pi}{2}$ を持つ。

(iii) $\gamma>\varepsilon$ のとき, $u(t,\varepsilon,\gamma)$ は $I(\varepsilon)$ 上に, 丁度, 一つづつ極大値と極小値を持ち, 変曲点を持たない。

(II)　$I'(\varepsilon)=\{t+\pi\,;\,t\in I(\varepsilon)\}$ とおく。$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は $I'(\varepsilon)$ 上で (I) と同様の事が成立する。

(III)　$u(t,\varepsilon,\gamma)$ は $[0,2\pi)-I(\varepsilon)\cup I'(\varepsilon)$ で, 丁度1個づつ, 極大値と極小値を持ち, 他に変曲点を持たない。

定理２の証明のためには，Lemma 1 より，

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \gamma\right)\Big|_{\gamma=\varepsilon} > 0$$

を示せば良い。

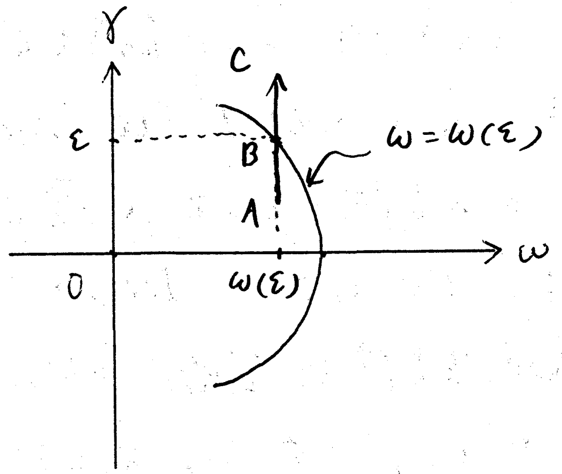
これは計算により，

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \gamma\right)\Big|_{\gamma=\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon^2)$$

より，得られる。

定理２の証明は終る。

定理２の結果を図示する。



線分 A→B→C は，方程式 (8) において，ε を固定し，γ を ε を通って増加させることを示している。A→B では，(6) は simple な周期解軌道を持ち，B→C では non simple な軌道を持つ。分岐状態 B では，軌道はカスプを持つ。

<u>Corollary 2</u>. 方程式(9)を考える。$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$をCorollary 1の(ii)のものとする。十分小なるεに対し，定数$\delta(\varepsilon)>0$が存在して，$|k|<\delta(\varepsilon)$で定義された連続な関数$\gamma(k;\varepsilon)$，$\gamma(0;\varepsilon)=\varepsilon$，が存在して，$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$は$(\varepsilon,k)$を各々，十分小に固定するとき，$\gamma=\gamma(k;\varepsilon)$で変形する。

証明はLemma 1と同様の次のLemmaに従う。

<u>Lemma 2</u>. $u(t,\varepsilon,\gamma,k)$は$(t,\varepsilon,\gamma,k)\in R^4$で連続的微分可能で，$(\varepsilon,\gamma,k)$を固定するとき，$t$について解析的とする。十分小なる$\varepsilon$に対し定数$\delta(\varepsilon)>0$が存在して，$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$は$|\gamma-\varepsilon|<\delta(\varepsilon)$，$|k|<\delta(\varepsilon)$のとき，$t$についてodd-harmonicとする。更に次の事を仮定する；

(i) $u(t,\varepsilon,\gamma,k)$は$\gamma=\varepsilon$，$k=0$のとき，

$$u(t,\varepsilon,\varepsilon,0)=\varepsilon(\cos^3 t+p(t,\varepsilon))$$

と表される。ここで$p(t,\varepsilon)$はLemma 1と同じ条件を満す.

(ii) $|k|<\delta(\varepsilon)$で定義されたkの連続関数$\gamma(k;\varepsilon)$と$t(k;\varepsilon)$が存在して，$\gamma(0;\varepsilon)=\varepsilon$，$t(0;\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$，次の事が成立する；

$$\dot{u}(t(k;\varepsilon),\varepsilon,\gamma(k;\varepsilon),k)=\ddot{u}(t(k;\varepsilon),\varepsilon,\gamma(k;\varepsilon),k)=0$$

$$\dddot{u}(\tfrac{\pi}{2},\varepsilon,\varepsilon,0)<0$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \gamma}(\tfrac{\pi}{2},\varepsilon,\varepsilon,0)>0。$$

このとき，$u(t,\varepsilon,\gamma,k)$ は (ε,k) を各々，十分小に固定するとき，$\gamma=\gamma(k;\varepsilon)$ で変形する。

参考文献

[1]. G. Byatt-Smith, 2π-periodic solutions of Duffing's equation with negative stiffness, SIAM J. Appl. Math., vol. 47, No. 1, 60-91, 1987.

[2] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mcgraw-Hill, 1955.

[3] W. S. Loud, Periodic solutions of $\ddot{x}+c\dot{x}+g(x)=\varepsilon f(t)$, Amer. Math. Soc. Mem. No. 31, 1958

[4] G. Sansone and R. Conti, Non-linear Differential Equations, Pergamon Press, New-York, 1964.

[5] Y. Ueda, Steady motions exhibited by Duffing's equation, In Engineering Foundation Conf. on New approaches to Nonlinear Problems in Dynamics, Monterey, California, 1979.

Basin Boundary Bifurcations and Escape Phenomena in Systems Governed by the Twin-well Duffing's Equation

Y. Ueda*, S. Yoshida*, H.B. Stewart**, J.M.T. Thompson***

* Electrical Engineering, Kyoto University
** Mathematics, Brookhaven National Laboratory
*** Civil Engineering, University College London

The paper has already been submitted to the Proceedings of the Royal Society for a Special Issue edited by Prof. J. M. T. Thompson.

If possible, we hope your proceedings could mention the Royal Society Paper. We would of course be happy to give you the exact reference (volume and page number) as soon as it becomes known to us.