数理解析研究所講究録
第710巻 1989年 104-106

Hamilton系における積分非存在証明

吉　田　春　夫（国立天文台）
H. Yoshida
National Astronomical Observatory

Abstract.
同次式ポテンシアルをもつ自由度nのHamilton系に於ける付加的な解析的積分非存在のための十分条件を与える。

1 自由度nのHamilton系

$$H = (1/2)\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q}) \tag{1}$$

を考える。ここで $V(\mathbf{q})$ は次数kの同次式ポテンシアルとする。ただし $k \neq 0, \pm 2$。この系は相似変換に対する不変性を持つので[1]に従ってKowalevski指数，($\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$) が計算できる。Kowalevski指数（ＫＥ）は複素t平面上での解の特異点のまわりでの分岐を以下のように特徴づける。

$$\mathbf{q}(t) = t^{-g}\{\mathbf{d} + \mathrm{Taylor}(I_1 t^{\rho_1}, I_2 t^{\rho_2}, \ldots)\} \tag{2}$$

ここで、$g=2/(k-2)$, $\mathbf{d}$ は定数ベクトル，I_j は積分定数、そして Taylor(x,y,...) は収束Taylor級数を表す。(1)に対してＫＥはpairingの性質 $\rho_i + \rho_{n+i} = 2g+1$ $(i=1,2,..,n)$ を持ち、常に $\rho_{2n} = 2g+2$, $\rho_n = -1$ と仮定できる。このpairingの性質により ρ_i および ρ_{n+i} は、その差 $\Delta\rho_i = \rho_{n+i} - \rho_i$ が有理数のときのみ、有理数となる。この時、

定　理

もし、n個のＫＥの差 ($\Delta\rho_1, \Delta\rho_2, \ldots, \Delta\rho_n$) が有理数体上、一次独立ならば Hamilton系(1)は Hamiltonian 自身以外に大局的な解析的積分 $\Phi(q,p)$ = const.を有しない。

2 与えられたn次元の同次式ポテンシアル $V(\mathbf{q})$ に対してＫＥの差、$\Delta\rho_i$ は次のアルゴリズムで計算できる。

Step 1：　連立代数方程式

$$\mathrm{grad}\ V(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \tag{3}$$

の解、$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を求める。この $\mathbf{c}$ は(2)の $\mathbf{d}$ と $\mathbf{d} = [-g(g+1)]^{g/2}\mathbf{c}$ なる関係で結ばれている。

Step 2：$V(\mathbf{q})$ の $\mathbf{q} = \mathbf{c}$ に於けるHessian行列 $D^2V(\mathbf{c})$ の固有値を（$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$）とする。常に $\lambda_n = k-1$ と仮定できる。

Step 3：ＫＥのペアー（ρ_i, ρ_{n+i}）は２次方程式

$$\rho^2 - (2g+1)\rho + g(g+1)(1-\lambda_i) = 0, \tag{4}$$

の２根として求まる。つまり、

$$\Delta\rho_i = \sqrt{1 + 8k\lambda_i/(k-2)^2} \tag{5}$$

3 例題　($n = 3,\ k = 4$)

$$V(\mathbf{q}) = q_1^2q_2^2 + q_2^2q_3^2 + q_3^2q_1^2. \tag{6}$$

(3) の１つの解は $\mathbf{c} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$。この $\mathbf{c}$ にたいしてHessian行列 $D^2V(\mathbf{c})$ の固有値は（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$）= (2, −1, 3) となり、（$\Delta\rho_1, \Delta\rho_2, \Delta\rho_3$）= ($\sqrt{17}, \sqrt{-7}, 5$) これら $\Delta\rho_i$ は有理数体上、一次独立なので (6) をポテンシアルとする Hamilton 系 (1) はHamiltonian 以外に解析的な積分を有しない。

4

主定理の証明は現在の所、Ziglinの定理[6]、特にその同次ポテンシアル版[2]に基ずいている。Ziglinの定理の応用については[3,4]を参照。(1)に対して $\mathbf{q} = \mathbf{c}\phi(t)$ なる形の特殊解が有る。ここで $\mathbf{c}$ は(3)の解で $\phi(t)$ は $\ddot{\phi} + \phi^{k-1} = 0$ の解である。この特殊解は一般に多重周期を持つ。この特殊解のまわりの変分方程式は適当な座標回転によってdecoupleして

$$\ddot{\xi}_i + \lambda_i\phi(t)^{k-2}\xi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

となる。ここで、λ_i はHessian行列 $D^2V(\mathbf{c})$ の固有値である。よって、直交変分方程式（ＮＶＥ）に対するモノドロミー行列は

$$M = \mathrm{diag}[\,M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n-1)}\,] \tag{8}$$

なる形となる。モノドロミー行列(8)はその固有値、($\sigma_1, 1/\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 1/\sigma_{n-1}$) のあいだに m_i を整数とする

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i^{m_i} = 1 \tag{9}$$

なる関係がないとき、ｎｏｎ－ｒｅｓｏｎａｎｔ という。今、M_1, M_2 を$\phi(t)$の２つの独立な周期に対する(8)の形のモノドロミー行列とする。[2]で証明されたように、もし M_1, M_2 が共にnon-resonantであり、$M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$ $(i=1,2,..,n-1)$ のいずれもが交換しなければ(1)はHamiltonian以外に大局的な解析的積分を持たない。M_1, M_2 の選択には自由度があるが、その中で次のようなものがとれる。

(i) $\mathrm{trace}\, M_1^{(i)} = \mathrm{trace}\, M_2^{(i)} = 2\cos\{2\pi(k-2)\Delta\rho_i\}$ (10)

(ii) $M_1^{(i)}$ と $M_2^{(i)}$ は $\mathrm{trace}\, M_{1,2}^{(i)} = +2$ の時のみ可換。

よって、もし $\Delta\rho_i$ $(i=1,2,...,n)$ が有理数体上、一次独立ならば、M_1, M_2 共にnon-resonant であり $M_1^{(i)}$ と $M_2^{(i)}$ は決して交換しない。よって、定理は証明された。より詳しくは[5]を参照せよ。

References

[1] Yoshida,H.: Necessary condition for the existence of algebraic first integrals, Celestial Mech., **31**, 363-379 (1983)

[2] Yoshida,H.: A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential, Physica **29D**, 128-142 (1987)

[3] Yoshida,H.: Ziglin analysis for proving non-integrability of Hamiltonian systems, in Finite Dimensional Nonlinear Dynamical Systems, 74-93 (World scientific, 1988, ed. by P.G.L.Leach and W.H.Steeb)

[4] Yoshida,H.: Non-integrability of the truncated Toda lattice Hamiltonian at any order, Commun. Math. Phys., **116**, 529-538 (1988)

[5] Yoshida,H.: A criterion for the non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with N degrees of freedom, Phys. Lett. A (1989) in press.

[6] Ziglin,S.L.: Branching of solutions and non-existence of first integral in Hamiltonian mechanics, Func. Anal. Appl., **16**, 181-189, **17**, 6-17 (1983)