

初期圧縮型復元力特性を有する断片線形系の動的挙動

茨城大・工 今村 仁 (Hitoshi Imamura)

都立大・工 鈴木 浩平 (Kōhei Suzuki)

1. 緒言 区分線形系は，一般の非線形系の特性を近似するものと考えられ，localには解析解が得られることから，最近では，常微分方程式系に関するカオスや分岐現象の，解析的な解明が期待できる典型的な対象として注目されている<sup>(1,2)</sup>．この様な観点からのカオスの解明への一つのアプローチとして，本研究で考察するのは，不連続なベクトル場を有する区分線形系の分岐問題である．本報では，このタイプの系のモデルとして，従来，研究例が少ないこと<sup>(3)</sup>，最近になって，カオス解の存在が報告されていること<sup>(4,5)</sup>，極めて特異な現象を呈すること等の理由から，図1に示す初期圧縮型復元力特性を有する強制振動系をとり上げる．

2. ボアンカレ写像の定義 振動抑制機構をモデル化した図1の振動系は，非線形振動論では代表的な区分線形系の1つに数えられ，簡単な周期解については，早くから近似解法

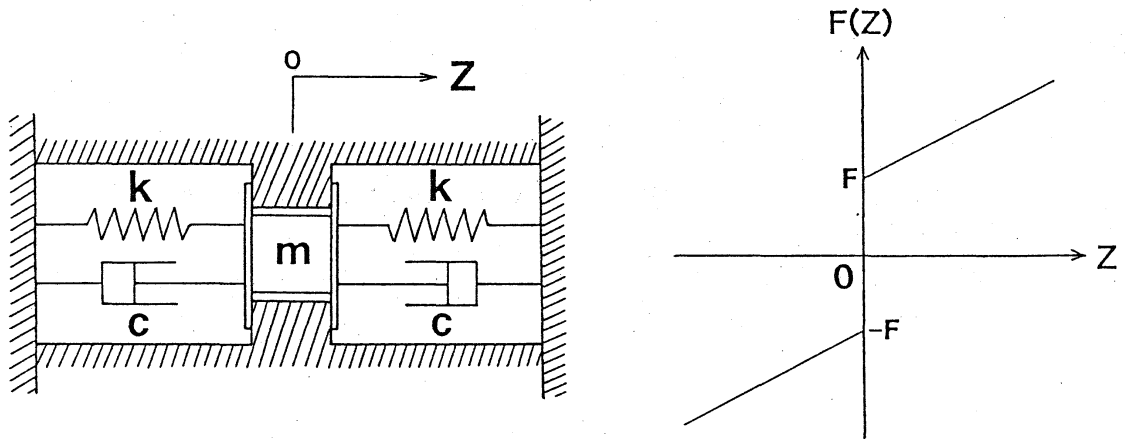


図1 系のモデルと復元力特性

や実験などによって，安定性等が調べられている<sup>(6~10)</sup>．この系の無次元化された運動方程式は，次式で表される．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x) - 2\zeta y + B \cos \omega t, \end{aligned} \quad \text{..... (1)}$$

$$f(x) = x \pm 1; \quad (x \gtrless 0)$$

$x > 0$  ( $x < 0$ ) での flow は，次式で定義する Half return map  $P_+$ ,  $P_-$  によって記述できる．

$$P_+ : \Sigma^+ \longrightarrow \Sigma^-, \quad P_- : \Sigma^- \longrightarrow \Sigma^+$$

ここで，

$$\Sigma^+ (\Sigma^-) \equiv \{(\phi, y, x) \mid x = 0, y > 0 (y < 0)\},$$

$$\phi = t \bmod 2\pi / \omega.$$

$x = 0$  は  $P_+$ ,  $P_-$  の切換え点であり, これを正の速度で通過する系の状態を表す  $\Sigma^+$  を Poincaré Section として, Poincaré map を次式で定義する.

$$P(\cdot) \equiv P_+(P_-(\cdot)), \quad P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+,$$

$$(\phi_{n+2}, y_{n+2}) = P(\phi_n, y_n) \text{ ----- (2)}$$

ここで,  $\phi_n, y_n \in \Sigma^+$

これ以降, この map に関して外力の  $n$  周期間に,  $\Sigma^+$  ( $\Sigma^-$ ) を  $m$  回通過する解を  $m/n$  と表記する.

また, 特に解が  $y = 0$  で切換え点を通過する場合には,

$$\Sigma^0 \equiv \{(\phi, y, x) \mid x = 0, y = 0, \phi \in S^1\}, \dots \text{ (3)}$$

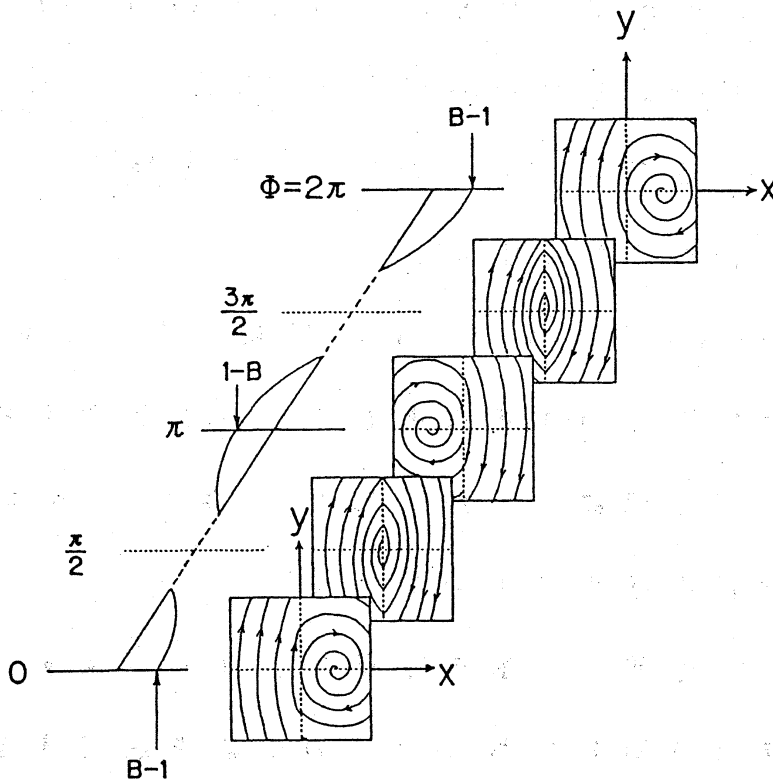


図 2  $\Sigma^0$  近傍におけるベクトル場の模式図

$$\sigma \equiv \{(\phi, y) \in \Sigma^0 \mid |B \cos \phi| < 1\} \dots\dots\dots (4)$$

で定義される集合上では，質点の慣性力が，ばねの初期圧縮力より小さくなるため，式(4)が満たされる間，質点は $\Sigma^0$ で停止する．従って，式(2)は $\Sigma^0$ 上では定義できず，Poincaré mapは退化する． $\Sigma^0$ 近傍のベクトル場の様子を模式的に表現した図を参考のため図2に示す．

我々がPoincaré mapを式(2)のように採ったのは，以下の理由による．

1) Poincaré mapの採り方によらず，解軌道を計算するには次の $x = 0$ へのhalf return timeを知らなければならない．

2) time 1 map  $T$ が得られても，half return mapを求めるには再計算が必要になるが，1度，Poincaré half return mapに関する情報が与えられれば， $T$ を構成することは多くの場合，比較的容易である．

3) 工学的な応用においては，切換え点への解の交差頻度は，系の特性を評価する重要なポイントと考えられ，また理論的にも，交差回数と周期の比 $m/n$ は，winding numberに相当する情報を与えるものである<sup>(11)</sup>．

4) 特に $\Sigma^0$ 近傍での解の挙動は，後で言及する「不連続遷移」と密接に関連しており，この現象を解析するには，half return timeに基礎を置く $P_+$ ， $P_-$ の利用が有効である．

3. 計算機シミュレーション

図3は $\omega$ を刻み幅0.005で

単調減少させた場合の、基本調波振動の分岐の計算例である。

特に $\omega = 0.6$ 近傍(点a)では、非対称1/1の解軌道のループ

が $\Sigma^0$ に接触し、2/1に分岐する現象が見られる。点aにおけ

るこの変化は、同じ系統の1/1が $\omega$ の現象に伴って徐々に変

化したものではなく、このパラメタ領域で共存している別系

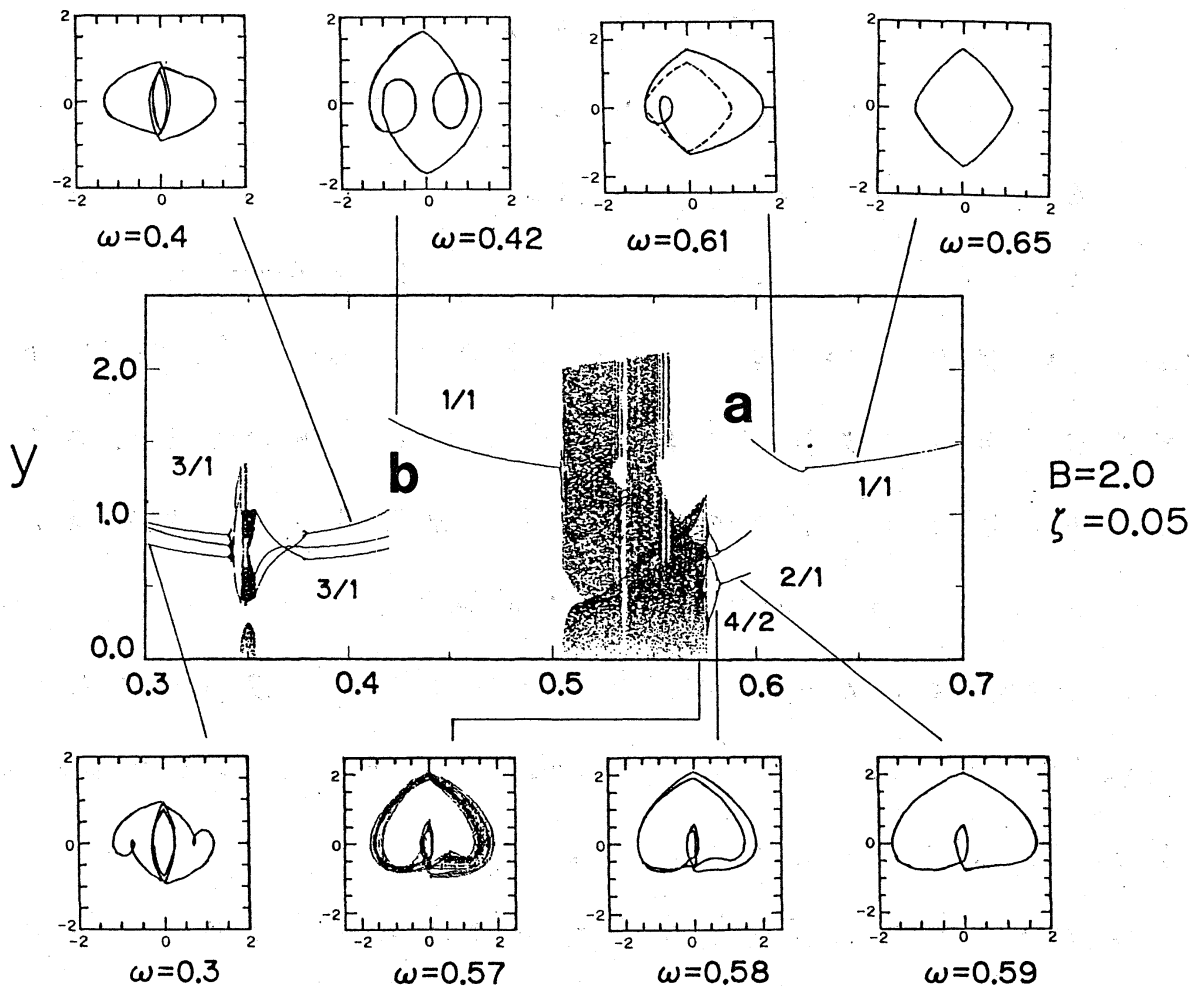


図3 分岐ダイアグラム ( $\omega$  - 単調減少)

統の1/1へ，不連続に変化した結果であることに注意されたい．これは，解の位相的な構造の変化に基づく通常の方岐とは明らかに異なるので，この現象を不連続遷移と呼ぶことにする．同様の現象は， $\omega = 0.41$ 近傍（点b）における，対称1/1から対称3/1への不連続遷移にも認められる．

ここで，不連続遷移の発生過程について調べるため，以下の集合を定義する．

$$\lambda_1 \equiv \{(\phi, y) \in \Sigma^0 \mid B \cos \phi > 1\},$$

$$\lambda_2 \equiv \{(\phi, y) \in \Sigma^0 \mid B \cos \phi < -1\},$$

$$\Delta_+ \equiv P_-(P_+(\lambda_1)) \cup P_-(\lambda_2),$$

$$\Delta_- \equiv P_+^{-1}(\lambda_1) \cup P_+^{-1}(P_-^{-1}(\lambda_2)) \quad \text{----- (4)}$$

$\Delta_+$ ， $\Delta_-$ は $P_+$ ， $P_-$ を $\Sigma^0 \setminus \sigma$ へ拡張した $\text{map } \overrightarrow{P_+}$ ， $\overrightarrow{P_-}$ による写像点の集合であり，これを，便宜的に不連続線と呼ぶことにする．図4は，図3の点aでの不連続遷移の発生前後における，attractorと不連続線との関係を図示したもので（以後，これを単に $\Delta$ ダイアグラムと呼ぶ），不連続遷移はPoincaré section  $\Sigma^+$ 上では，attractorと $\Delta_+$ ， $\Delta_-$ との接触によって表現できることがわかる．

同様に， $B$ を刻み幅0.005で単調減少させた場合の方岐ダイアグラムを図5に示す． $B = 1.43$ 近傍（点a）で，対称3/1から別系統の対称3/1への不連続遷移の発生が（図4と同じ

考察によって)認められる。また,  $B = 1.14$  近傍 (点  $b$ ) では,  $5/1$  から chaotic attractor への分岐が発生しているが,  $\Delta$  ダイアグラム (図 6) によれば, 点  $b$  近傍で  $5/1$  が不連続線に接触し, 消滅していることが確認できる。これは subduction や crisis<sup>(12)</sup> とは異なる chaotic attractor の突然の発生であり, カオスへのルートの 1 つと考えられる。

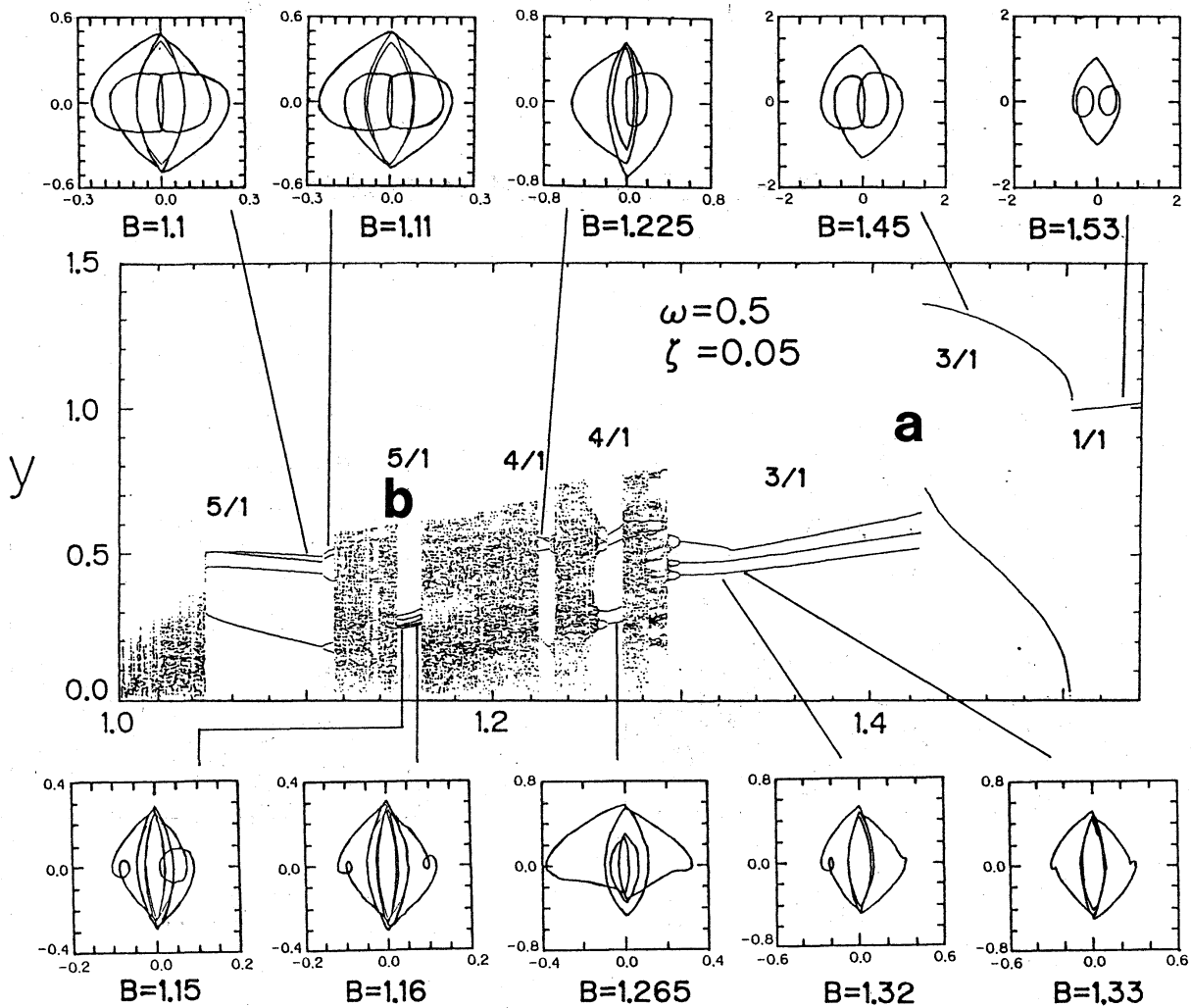


図 5 分岐ダイアグラム ( $B$  - 単調減少)

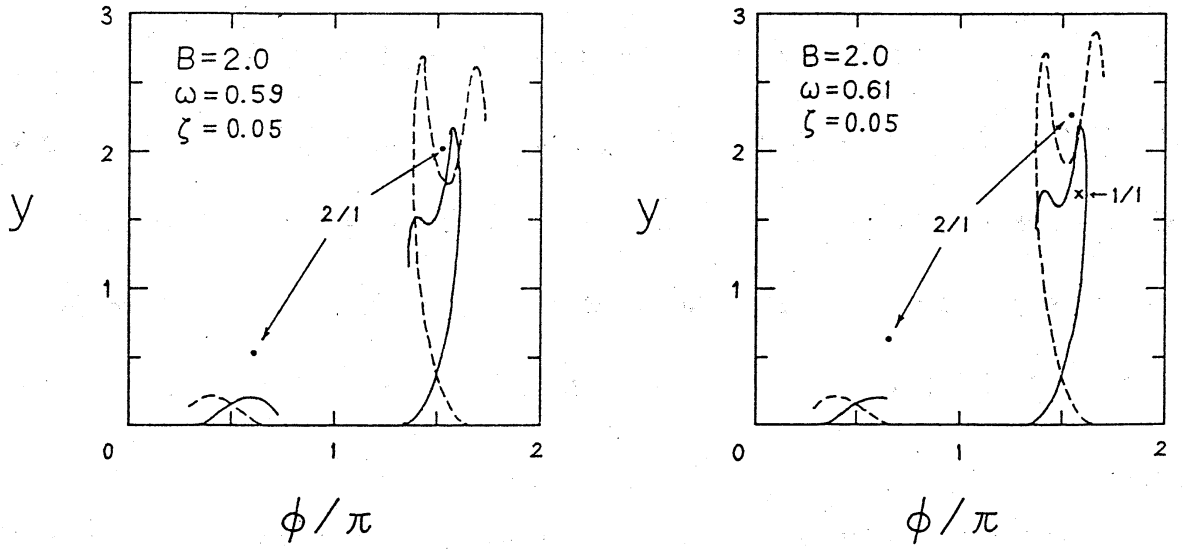


図 4 周期解の不連続遷移

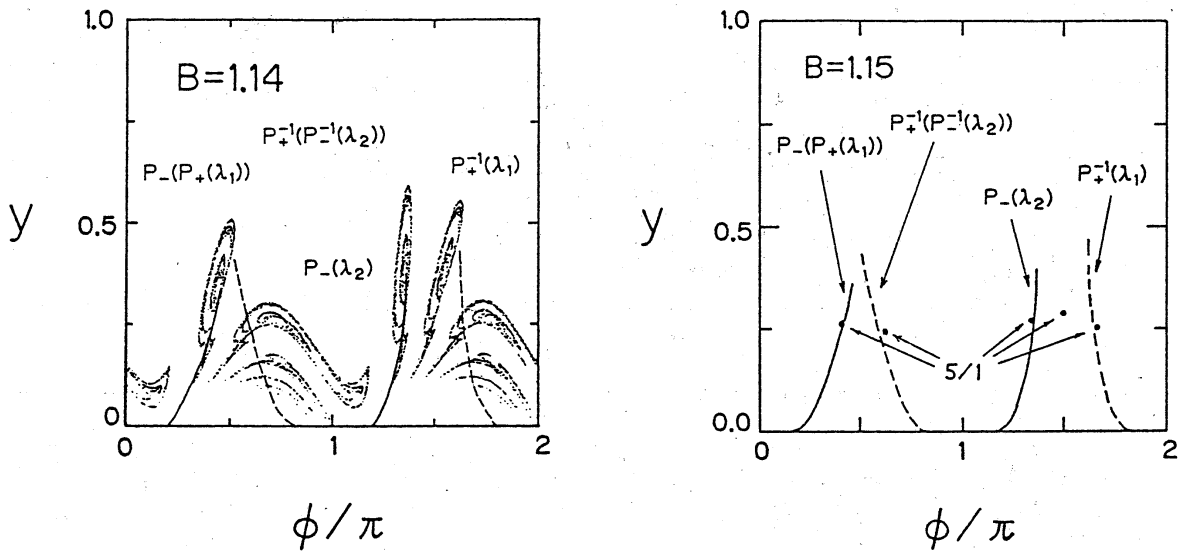


図 6 カオスの不連続遷移



また図7は、カオスが発生している図3の点cのパラメタにおける $\Delta_{+,-}$ と不変多様体の関係を図示したもので、不安定多様体は $\Delta_{+}$ に、安定多様体は $\Delta_{-}$ にそれぞれ接触し、 $\Sigma^0$ 上で分断している。このことから、不連続遷移は attractor とその Basin boundary が、 $\Delta_{+}$ 、 $\Delta_{-}$ に接触することによって発生すると予想できる。

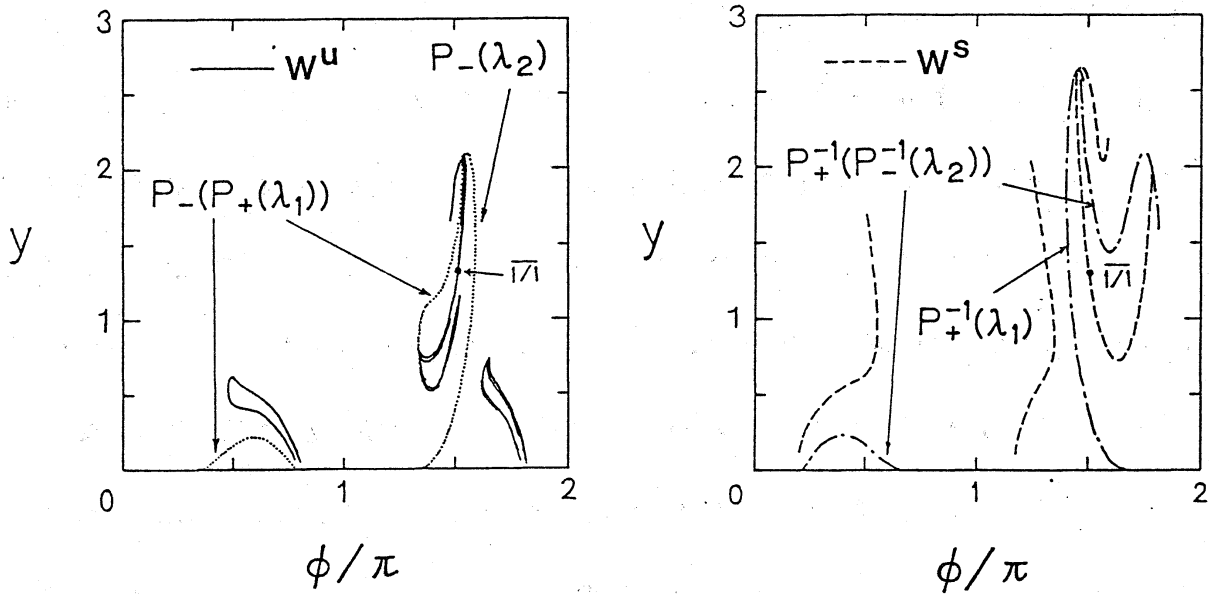


図7 不変多様体と  $\Delta_{+}$ 、 $\Delta_{-}$

#### 4. Poincaré half return mapの高速計算法 一般に区分

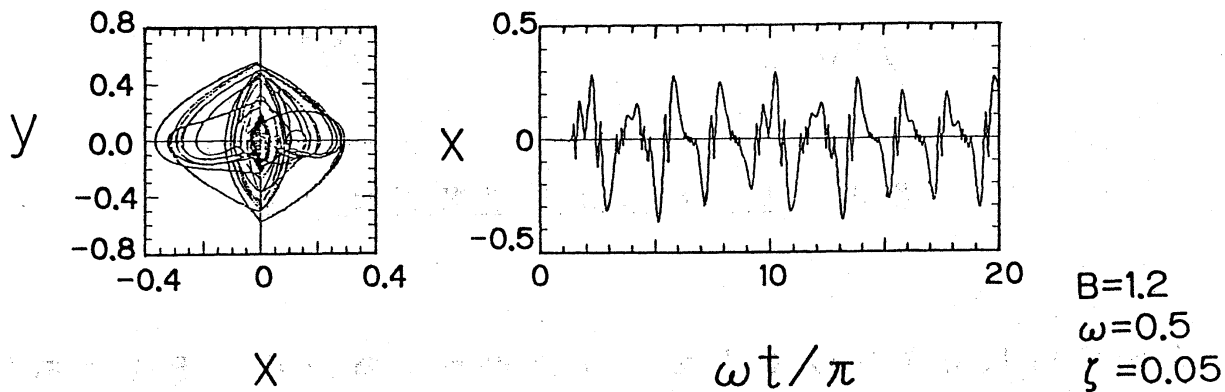
線形システムは，局所解が explicit に求められるため，duffing系などのように，必ずしも Runge-kutta 法等の数値積分法を用いる必要がなく，むしろ，local な解析解を領域の境界で切換えていく接合法を用いることによって，精度と計算時間を大幅に改善できると期待される．しかし，本報で扱っている不連続なベクトル場を有する系の場合には， $\Sigma^0$ 近傍で half return time が著しく減少していく特異な現象を生じることがあり，これはこの種の系の Chaos の発生や性質に密接に関連していると考えられる．

図 8 (a) は図 5 の  $B = 1.2$  におけるカオス波形であり，非常に振幅の小さい振動と相対的に振幅の大きな振動が交互に現れる間欠的カオスになっている．また図 (b) では half return time は限りなく減少していくように見え，このような場合，切換え時刻を正確に知ることは急速に困難になっていく<sup>(5, 13)</sup>．したがって精度を向上させるためには，刻み幅を極端に小さく採ることが必要となり，これは特に大域解析を行なう上で不利になる．

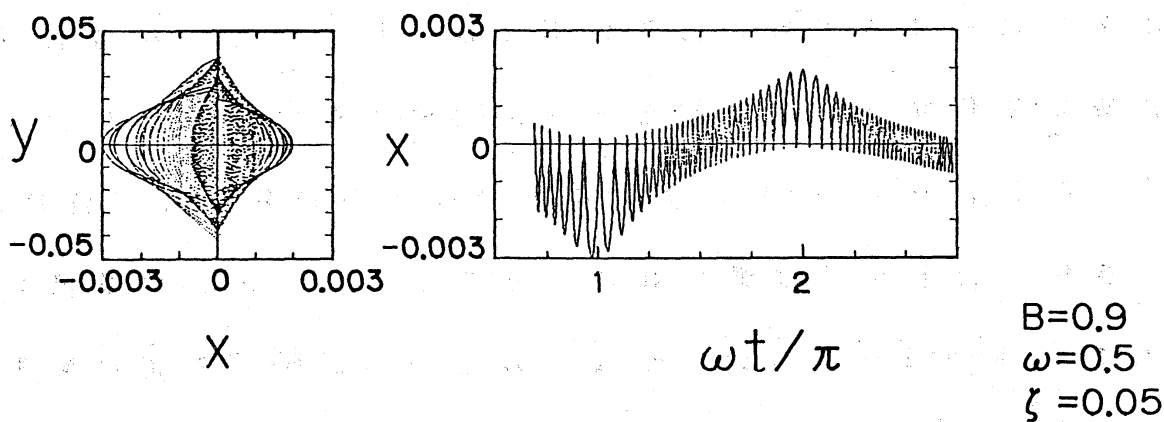
B. H. Tongue は，効率的な大域解析法として，spurious solution の発生や，Strange Attractor の再現が原理的に不可能であるなどの SCM<sup>(14)</sup> の欠点を改善した，Interpola-

ted Cell Mapping method (ICM) を提案した (図9参照)

(<sup>15</sup>). ICMが有効であるためには, 矩形 cellの写像点が凸になる事が前提条件として必要であり, 実用的には Cell sizeを十分に小さく採ることによって, この仮定は成立するとみなせる. そこで, 我々が考察している系に対するICMの



(a) カオス的な波形



(b) transientな波形

図8 half return timeが著しく減少する典型的な波形

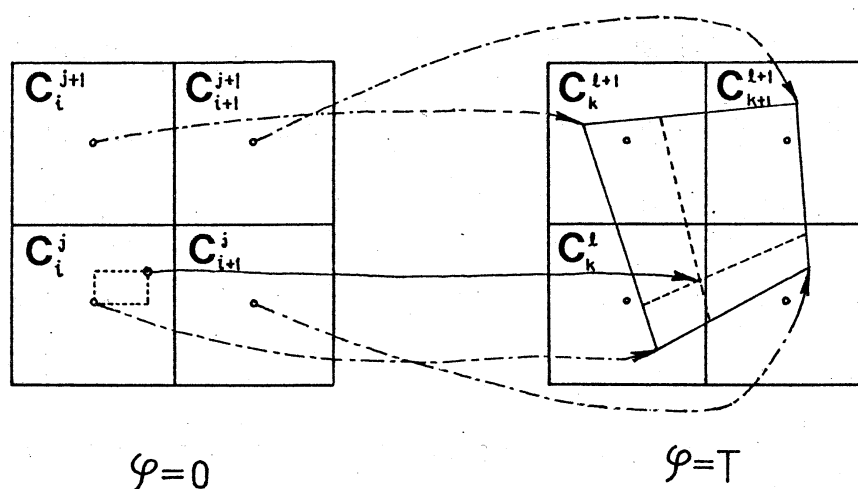


図 9 ICM による補間プロセス

適用可能性を検討するため，原点近傍で格子状に選んだ初期点の集合が，Time 1 mapによってどのように写像されるかを計算した一例を図 10 に示す．図からわかるように，特に原点近傍で，写像点は著しく歪曲している．図 11 は，初期値の微小変化に対する  $T$  の変化率の不連続性によって，写像点の不連続に変化するよう見える原点近傍の拡大図であり， $x \in [-0.01, -0.001]$ ， $y = 0$  上の多数の初期点は，渦状に巻き付いた形状で写像されていることがわかる．興味深いことに，chaotic attractor はこの位相では図 10 で特に変形が著しい不連続線近傍に存在している（図 12）．これは attractor の生成過程が，引き伸ばしや折り畳みによる効果のみで

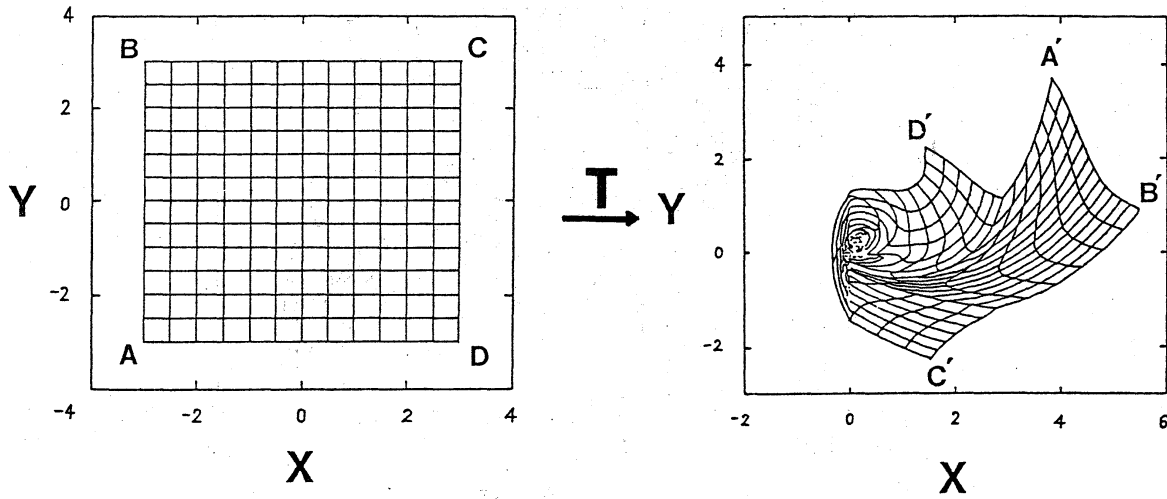


図 1 0 原点近傍における格子状初期点の Time 1 map

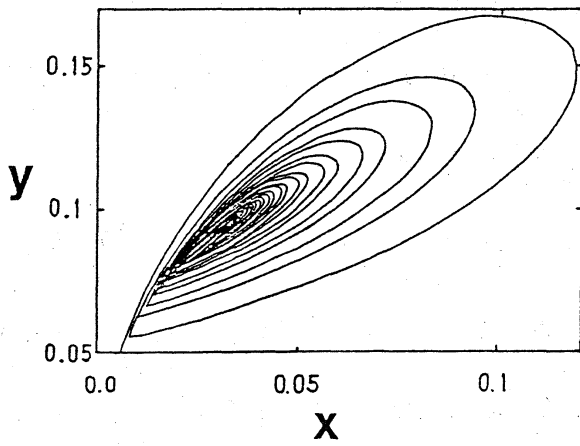


図 1 1 図 1 0 の原点近傍における拡大図

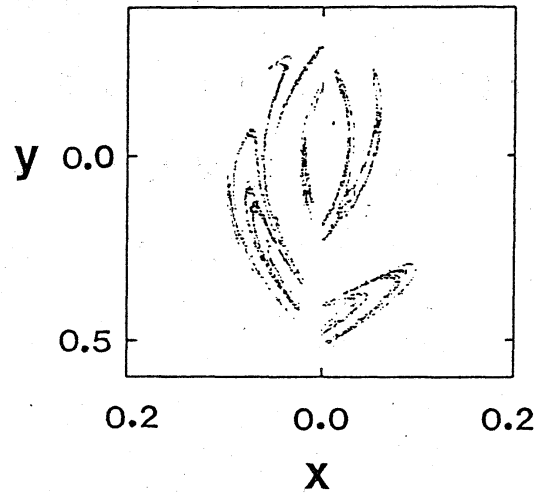


図 1 2 T による典型的な Strange Attractor

なく、ベクトル場の不連続性の影響を直接に反映しているためと予想される。従って、attractor の構造を詳細に研究す

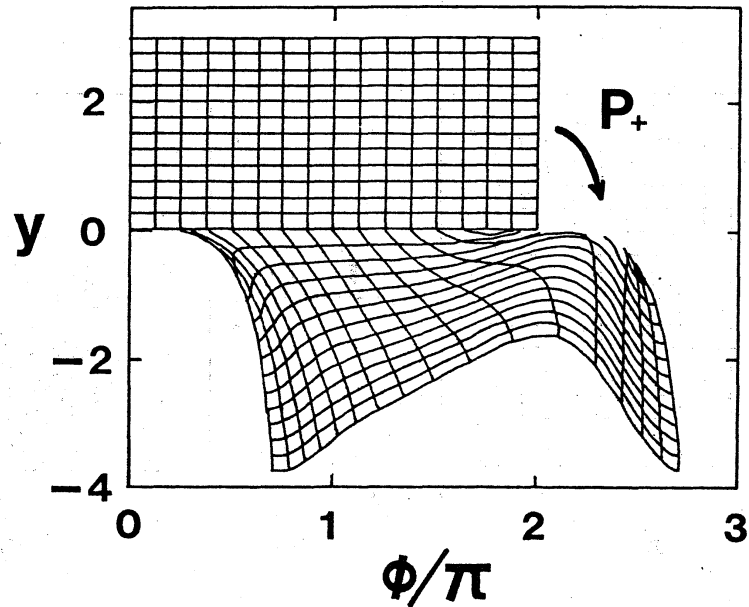


図 1 3 格子状初期点の  $P_+$  による写像

るためには，部分解の接続を精密に計算することが本質的に重要になる．以上の考察から，ICMをTime 1 mapへ直接適用することは，精度的に無理があると判断できる．

これに対し，half return map  $P_+$ による格子状初期点の写像は，図13に示すように，比較的緩やかな変形のみを生じている．またその計算時間も， $T$ を求める手間に比較して小さく，さらに $P_-$ は系の対称性を利用して容易に求めることができる．よって，1度 $P_+$ による格子状写像点のTableを構成しておけば，full return mapはICMによる補間プロセスのみで高速に計算可能になる．以上の考察に基づき，我々は，half return mapにICMを適用し，さらに精度を向上

させるために Newton 法で収束させる，新しい計算法を提案する．この手法により，不連続遷移の解析のような critical な計算の高速化が可能となり，Invariant curve や Basin boundary map などの大域解析に要する計算時間の大幅な短縮が期待できる．また分岐ダイアグラムのように，計算にあたってパラメタの微小なシフトを必要とする場合にも，パラメタ増減の刻み幅を十分に小さくとれば，既存の Table を元にして新たな Table の作成時間が短縮可能である．さらに応用として，一般の非線形系の，区分線形系による近似系を用いた大域解析も可能であろう（当然，近似可能性や近似の精度の問題には別の議論が必要である）．

筆者らは， $P_+$ に関する Table を効率的に構成する方法も考案しているが，これについては，本手法による大域解析の結果と合せて，別の機会に発表したい．

謝辞 最後に，適切かつ有益な助言を下された，川上博先生をはじめとする諸氏に心から感謝の意を表す．

#### 文献

(1) Uehleke, B., Rossler, O. E., Z. Naturforsch., 39a,

(1984), 342.

- (2) Chua, L., O., Komuro, M., and Matsumoto, T., IEEE Trans, CAS, 33, (1986), 1072.
- (3) 清水, 非線形振動論 (1965).
- (4) Shaw, S., W. and Tung, P. C., Trans. ASME, Ser. E, 110, (1988), 278.
- (5) 今村, 鈴木, 日立地方講演会講演論文集 (昭 63), 46.
- (6) 榎木, 機論, 14 (昭 23), 126.
- (7) 榎木, 機論, 17 (昭 26), 50.
- (8) 榎木, 徳丸, 機論, 25 (昭 34), 712.
- (9) 榎木, 徳丸, 安井, 機論, 27 (昭 36), 516.
- (10) Simizu, T., Mathematica Japonicae, 10 (1965), 49.
- (11) Isonaki, H., M., Boehm, J., V., and Raty, R., Physics Letters A, 107, (1985), 343.
- (12) Grebogi, C., Otto, E., Physica, 7D, (1983), 181.
- (13) 今村, 鈴木, 機論, 55, (平 1), 267.
- (14) Hsu, C., S., Guttalu, R., S., Trans. ASME, Ser. E, 47, (1980), 940.
- (15) Tongue, B., H., Gu, K., Trans. ASME, Ser. E, 55, (1988), 461.