数理解析研究所講究録
第711巻 1989年 8-13

関数空間のisomorphical classificationについて

作新学院大　酒井政美（Masami Sakai）

関数空間のisomorphical classificationについて，BaarsとGroot によって得られた結果の紹介をする。

ここで考える空間はすべてseparable metric spaceとする。空間X上の連続関数全体$C(X)$に，各点収束位相をいれた空間を$C_p(X)$，またcompact-open位相をいれた空間を$C_0(X)$とする。$C_0(X) \simeq C_0(Y)$ および $C_p(X) \simeq C_p(Y)$ は，線形位相空間として同型であることを示すとする。

0-dimensional compact spaces の族における$C_0(X)$の同型分類は，Bessaga と Pelczyński によって次の結果が示されている。

Theorem [3]　X と Y が 0-dimensional compact spaceのとき，

$C_0(X) \simeq C_0(Y) \iff$ 次の i), ii), iii)のうちどれかひとつが成立する。

i) X と Y は有限で，同じ濃度をもつ，

ii) countable infinite ordinals α, β が存在して，

$X \approx [1, \alpha]$, $Y = [1, \beta]$ かつ $\max(\alpha, \beta) < [\min(\alpha, \beta)]^{\omega}$,

iii) X と Y は非可算濃度の空間。

各点収束位相をいれた空間 $C_p(X)$ の分類については，最近 Baars と Groot が $C_0(X)$ の場合と同様の分類ができることを示した。実際，Baars と Groot は次の結果を証明している。

Theorem [2] X と Y が 0-dimensional locally compact space のとき，$C_p(X) \simeq C_p(Y) \Longleftrightarrow C_0(X) \simeq C_0(Y)$.

上の定理の 0-dimensional の条件は本質的である。Cantor discontinuum C と unit interval I に対して，Miljutin の結果 [4] より $C_0(C) \simeq C_0(I)$ であるが，Pestov の結果 [5] より $C_p(C) \not\simeq C_p(I)$ である。

X と Y が 0-dimensional compact space の場合について，上の定理の証明の sketch を紹介する。証明には次の Lemma がくりかえし使用される。Lemma の証明には 0-dimensional metric space の閉集合は retract になっていることを利用する。

Lemma　Xを0-dimensional compact space，AをXの閉集合としたとき，

$$C_p(X) \simeq C_p(A) \times C_{p0}(X/A)$$

ここでX/AはXにおいてAを1点につぶして得られる商空間，また$C_{p0}(X/A) = \{ f \in C_p(X/A) \mid f(A) = 0 \}$とする。

<u>証明のsketch</u>

$(\Longrightarrow)$　$C_p(X) \simeq C_p(Y)$のとき，Arhangel'skiの結果[1]より，$C_0(X) \simeq C_0(Y)$.

$(\Longleftarrow)$　$C_0(X) \simeq C_0(Y)$とするとBessagaとPelczyńskiの結果より，i)，ii)，iii)のどれかが成立している。i)の場合は明らかに$C_p(X) \simeq C_p(Y)$となる。

次にXとYがii)をみたしているとする。$\omega \leq \alpha \leq \beta < \alpha^\omega$のとき$C_p([1,\alpha]) \simeq C_p([1,\beta])$を示せばよい。$\alpha'$を$\alpha$以下のprime compomentで最大のものとすると，$\omega \leq \alpha' \leq \beta < (\alpha')^\omega$，かつ$C_p([1,\alpha]) \simeq C_p([1,\alpha'])$であることに注意すれば$\alpha$は初めからprime compomentであると仮定してよい。故に$\alpha = \omega^\mu$，μはordinal，とする。βに関するinductionで証明をする。

$\beta = \alpha$のときは明らかによい。

$\alpha = \omega^\mu \leq \gamma < \beta < \alpha^\omega$なる任意の$\gamma$に対して$C_p([1,\gamma]) \simeq C_p([1,\alpha])$が成立すると仮定する。$X = [1,\beta]$，$A = X^{(\mu)}$（$X$の$\mu$-th derivative）

とおくと$A \neq \phi$であり，$X/A \approx [1, \omega^{\nu}] = [1, \alpha]$である。$\beta < \alpha^{\omega} = (\omega^{\nu})^{\omega} = \omega^{\nu\cdot\omega}$ より，ある$n \geq 2$があって$\omega^{\nu(n-1)} < \beta \leq \omega^{\nu\cdot n}$となる。$A^{(\nu\cdot(n-1))} = (X^{(\nu)})^{(\nu\cdot(n-1))} = X^{(\nu\cdot n)} = [1, \beta]^{(\nu\cdot n)}$ であり，また$[1, \beta] \subset [1, \omega^{\nu\cdot n}]$ であることより$A^{(\nu\cdot(n-1))}$はϕであるか，また1点からなる集合のどちらかである。Aはcountable compact spaceであるから$A = [1, \gamma]$とおける。$\gamma > \omega^{\nu(n-1)}$とすると$A = [1, \gamma] \supset [1, \omega^{\nu(n-1)}]$より$A^{\nu(n-1)}$は2点以上をもつことになり矛盾。故に$\gamma \leq \omega^{\nu\cdot(n-1)}$となる。

$$\begin{aligned} C_p([1,\beta]) &\simeq C_p([1,\gamma]) \times C_{p_0}(X/A) \\ &\simeq C_p([1,\gamma]) \times C_{p_0}([1,\alpha]) \\ &\simeq C_p([1,\gamma]) \times C_p([1,\alpha]) \end{aligned}$$

に注意する。

Case 1. $\gamma < \omega^{\nu} = \alpha$のとき，$\gamma + \alpha = \alpha$であるから，

$$\begin{aligned} C_p([1,\beta]) &\simeq C_p([1,\gamma]) \times C_p([1,\alpha]) \\ &\simeq C_p([1, \gamma+\alpha]) \\ &\simeq C_p([1,\alpha])\text{。} \end{aligned}$$

Case 2. $\gamma \geq \alpha = \omega^{\nu}$ のとき，$\gamma \leq \omega^{\nu(n-1)} < \beta$ であるから，帰納法の仮定より$C_p([1,\gamma]) \simeq C_p([1,\alpha])$。故に，

$$\begin{aligned} C_p([1,\beta]) &\simeq C_p([1,\gamma]) \times C_p([1,\alpha]) \\ &\simeq C_p([1,\alpha]) \times C_p([1,\alpha]) \\ &\simeq C_p([1, \alpha+\alpha]) = C_p([1, \alpha\cdot 2]) \\ &\simeq C_p([1,\alpha])\text{。} \end{aligned}$$

最後にiii)の場合は，Xが非可算のとき$C_p(X) \simeq C_p(C)$，$C=$ Cantor discontinuumを示せばよい。Xは非可算濃度の0-次元compact spaceであるからCはXへうめこまれる。故に，

$$C_p(X) \simeq C_p(C) \times C_{p_0}(X/C) \text{。}$$

また任意の0-次元compact space ZはCの中にうめこめて，しかも$C/Z \approx C$とできるから$C_p(C) \simeq C_p(Z) \times C_{p_0}(C)$が成立している。特に$Z=C$または$X$とすることにより，

$$C_p(C) \simeq C_p(C) \times C_{p_0}(C),$$

$$C_p(C) \simeq C_p(X) \times C_{p_0}(C) \text{。}$$

以上より，

$$\begin{aligned} C_p(X) &\simeq C_p(C) \times C_{p_0}(X/C) \\ &\simeq C_p(C) \times C_{p_0}(C) \times C_{p_0}(X/C) \\ &\simeq C_p(X) \times C_{p_0}(C) \\ &\simeq C_p(C) \text{。} \end{aligned}$$

文献

[1] A.V. Arhangelski, On linear homeomorphisms of function spaces, Soviet Math. Dokl. 25 (1982), 852-855.

[2] J. Baars and J. de Groot, An isomorphical classification of function spaces of zero-dimensional locally compact

separable metric spaces, Comm. Math. Univ. Carolinae. 29.3 (1988), 577-595.

[3] C. Bessaga and A. Pelczyński, Spaces of continuous functions IV, Studia Math. 19 (1960), 53-62.

[4] Z. Semadeni, Banach spaces of continuous functions, PWN Warszawa 1971.

[5] V. G. Pestov; The coincidence of the dimension dim of l-equivalent topological spaces, Soviet Math. Dokl. 26 (1982), 380-383.