

D. H. Fremlin の定理と周辺

静岡大・教育 大田 春外 (Haruto Ohta)

1. 我々の問題. 位相空間 X は, 任意の zero-sets の和集合の閉包がまた zero-set になるという性質を持つとき, Klebanov 空間とよばれる。例之は, 完全正規空間, 距離空間の任意積 ([7]), compact κ -metric 空間 ([13]) など Klebanov 空間である。この空間に関する我々 (= 玉野研一, 酒井政美, 森下和彦さんと私) の研究の中で, 次の問題が起った。「Klebanov 空間の稠密な部分空間はまた Klebanov 空間か?」この問題は, 1989 夏の π - ϵ 311 で発表された様に, 酒井政美さん [9] によって否定的に解決されたが, 私もまた D. H. Fremlin の論文 [4] の中に, 否定解を見つけた。そこで, その内容と周辺の問題を述べる。

2. Fremlin の定理. 集合 X に対して,

$$\ell^1(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^X : \sum_{t \in X} |x(t)| < +\infty \right\}$$

とする。 $\ell^1(X)$ は $\|x\| = \sum_{t \in X} |x(t)|$ によって Banach

空間である。いま、この Banach 空間 $E (Q'(X), \text{norm})$ を表わし、弱位相 Σ を与えて $Q'(X) \Sigma (Q'(X), \text{weak})$ とおく。また空間 E に対して、 $Bo(E) (Ba(E))$ は、 E の Borel 集合 (Baire 集合) 全体から成る σ -algebra を表わす。他方、 $P(X)$ は X の巾集合を表わし、 $P(X) \otimes P(X)$ は $\{A \times B : A, B \in P(X)\}$ から生成される σ -algebra を表わす。さて、D. H. Fremlin は [4] で次の定理を証明した。

D. H. Fremlin の定理 (F). 無限集合 X に対して、次の 2 つの等式 (a), (b) は互いに同値である。

$$a) P(X \times X) = P(X) \otimes P(X),$$

$$b) Bo(Q'(X), \text{norm}) = Ba(Q'(X), \text{weak}).$$

なぜ、この結果が、我々の問題に否定解を与えるかを述べたためには、次の B. V. Rao [11] の結果が必要である。

B. V. Rao の定理 (R). $|X| = \omega_1$ ならば、 $P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$ が成立する。

定理 (F) と (R) から、 $|X| = \omega_1$ である集合 X に対して、

$$Bo(Q'(X), \text{norm}) = Ba(Q'(X), \text{weak}) \quad (1)$$

が成立する。また $(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ は正規空間ではない。これは H. H. Corson [2] の次の結果から導かれる: もし $(E, \text{weak})^2$ が discrete な非可算閉集合を含むならば, (E, weak) は正規ではない。実際, 各 $t \in X$ に対し

$$\chi_t(t') = \begin{cases} 1 & \text{if } t' = t, \\ 0 & \text{if } t' \neq t. \end{cases}$$

とすれば, $\{\chi_t : t \in X\}$ は $(\mathcal{L}'(X), \text{weak}) \approx (\mathcal{L}'(X), \text{weak})^2$ の discrete な非可算閉集合である。結果として, $(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ は zero-set ではない閉集合 F をもつ。とすると, (1) より $(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ の各点 x は zero-set F から, F は zero-sets の和として表わされる。従って, $(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ は Klebanov 空間ではない。一方, 弱位相の性質から, $(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ は実数空間 \mathbb{R} の直積, 即ち Klebanov 空間, に稠密に埋蔵される。

3. 等式 $B_0(\mathcal{L}'(X), \text{norm}) = B_0(\mathcal{L}'(X), \text{weak})$ の周辺。一般に, Banach 空間 E に対し, 次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} B_0(E, \text{norm}) & \supseteq & B_0(E, \text{weak}) & \supseteq & B_0(E, \text{weak}) \\ & \parallel & (a) & & (b) \\ & & B_0(E, \text{norm}) & & \end{array}$$

(E, norm) が separable の場合, (a) と (b) は等号である。

成り立つ (E, weak) は, このとき cosmic 空間だから, (b) は等号である。更に, その可算 net として (E, norm) の closed balls から成るものを選び, Alaoglu の定理から, 各 closed ball は (E, weak) でも閉集合である。これらのことから, (a) も等号に成る。そもそも, 定理 (F) は E が norm-separable である場合にも, (a)(b) が等号に成り得ることを示すために証明された。norm-separability を弱めて, E は WCG Banach 空間とすると, (a) は等号であるが (b) の等号は保証されない (G. A. Edger [3])。一方, $E = \ell^\infty$ に対しては, (a)(b) は共に等号で成り立つ (M. Talagrand [14])。とこの問題は十分に答えられていない。

問題 1 (D. H. Fremlin)。どの様な場合に, (b) は等号に成るか?

一般の位相空間 X に対しても, 等式

$$B_0(X) = B_a(X) \quad (2)$$

が成り立つための条件は, 殆んど研究されていない。 X が完全正規ならば (2) は成り立つが, 逆に (2) から X の完全正規性が導かれるかどうかは, M. Katětov [5] の古典的

な問題である。今のところ、二の問題に対する反例は、上で述べた $(Q(X), weak)$ だけの様である。そこで、次の問題が起る。

問題 2. 完全正規な位相空間 X で、 $B_0(X) = B_a(X)$ とする他の例を与えよ。

弱位相を持つ Banach 空間について述べたが、点ごと収束の位相を持つ関数空間 $C_p(X)$ の Borel 集合と Baire 集合の間には、どのような関係があるか。 $C_p(X)$ に興味を持つ人は考えてみると面白いかも知れない。例えば、問題 2 の答は $C_p(X)$ を使って与えられるか。

4. 等式 $P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$ の周辺。 B. V. Rao の定理 (R) から、 $|X| = \omega_1$ のときこの等式は成立するが、 $|X| > 2^\omega$ のときは成立しない ([12])。CH を否定したとき、 $\omega_1 < |X| \leq 2^\omega$ である X に対し、いつこの等式が成立するかは集合論の問題である (例えば、A. W. Miller [8] を見よ)。ここでは、 $B_a(X) \otimes B_a(Y) \subseteq \{A \times B : A \in B_a(X), B \in B_a(Y)\}$ から生成される σ -algebra として、等式

$$B_a(X \times Y) = B_a(X) \otimes B_a(Y) \quad (3)$$

が成立するための条件について述べる。(3)が成立するための次の様な十分条件が知られている。

(a) $X \times Y$ は pseudo-compact ([1]),

(b) $X \times Y$ は Lindelöf ([1], [6]),

(c) X は 局所 compact, σ -compact で, Y は separable ([6]),

(d) X は separable 距離空間, 又はより一般に, cosmic 空間 ([1], [6]).

次の問題は未解決である。

問題 3 (H. G. Kellerer [6]). $X \times Y$ が separable ならば, (3) は成立するか?

以上の結果と問題は, いずれも X, Y にある種の可算性を要求している。しかし定理 (R) によれば, $|X| = \omega_1$ である離散空間 X の直積 $X \times X$ に対しても (3) は成り立つ。そこで次の問題が起る。

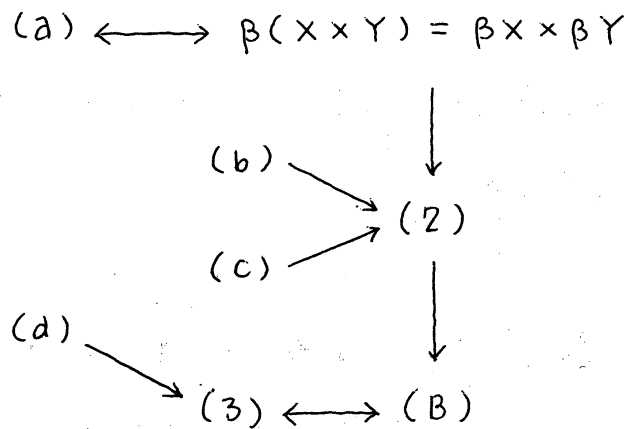
問題 4. 定理 (R) を含むより, (3) に対する十分条件を与えよ。

位相空間 X の部分空間 Y の任意の Baire 集合 (zero-set) B に対し, $A \cap Y = B$ とする X の Baire 集合 (zero-set) A が存在するとき, Y は X で Baire-embedded (z-embedded) であるという。いま, 条件

(Z) $X \times Y$ は $\beta X \times \beta Y$ で z-embedded,

(B) $X \times Y$ は $\beta X \times \beta Y$ で Baire-embedded,

を示す。このとき, 上に挙げた十分条件 (a)-(d) と等式 (3) の間には, 次の様な関係がある:



$|X| = \omega_1$ である離散空間 X は (Z) \rightarrow (B) の逆が成立し得ることを示す。また (Z) をみたさ得る様で, separable 距離空間 X と separable 空間 Y の例を示すことも出来る ([10]). (3) で Baire 集合を Borel 集合に変えた等式については, 殆んど何も知らぬところの様である。

参考文献

1. A. G. Babiker and J. D. Knowles, Functions and measures on product spaces, *Mathematika*, 32 (1985), 60-67.
2. H. H. Corson, The weak topology of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101 (1961), 1-15.
3. G. A. Edger, Measurability in a Banach space I, II, *Indiana Univ. Math. J.*, 26 (1977), 663-677; 28 (1979), 559-579.
4. D. H. Fremlin, Borel sets in non-separable Banach spaces, *Hokkaido Math. J.*, 9 (1980), 179-183.
5. M. Katětov, Measures in fully normal spaces, *Fund. Math.*, 38 (1951), 73-84.
6. H. G. Kellerer, Baire sets in product spaces, *Springer Lecture Notes* 794 (1980), 38-44.
7. B. S. Klebanov, Remarks on subsets of cartesian products of metric spaces, *Comment. Math. Univ. Carolina*, 23:4 (1982), 769-784.
8. A. W. Miller, On the length of Borel hierarchies, *Ann. Math. Logic*, 16 (1979), 233-267.
9. K. Morishita and M. Sakai, 実数空間の Klebanov 性 in preparation.
10. H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, to appear in *Topology Appl.*
11. B. V. Rao, On discrete Borel spaces and projective sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 614-617.
12. _____, On discrete Borel spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 22 (1971), 197-198.
13. E. V. Ščepin, On κ -metrizable spaces, *Math. USSR Izvestija*, 14 (1980), 407-440.
14. M. Talagrand, Comparaison des Boreliens d'un espace de Banach pour les topologies fortes et faibles, *Indiana Univ. Math. J.*, 27 (1978), 1001-1004.