数理解析研究所講究録
第 711 巻 1989 年 68-85

Expansive Homeomorphismsについて

広島大学総合科学部　加藤 久男

考えるspaceはすべてcompact metric spacesとし、continuumとは、compact connected nondegenerate spaceとする。homeomorphism $f: X \to X$が次の性質をもつとき、fはexpansive homeomorphismと呼ばれる：ある正数$c>0$が存在して次を満す：if $x, y \in X$ and $x \neq y$, then $d(f^n(x), f^n(y)) > c$ for some integer $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \cdots\}$.
逆にhomeomorphism $f: X \to X$がexpansiveでないとは、$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x, y \in X$ s.t $x \neq y$, $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$. つまり微小な変化でいつまでも微小であり続けるものがある。これらのhomeomorphismは力学系、およびErgodic Theoryなどにも重要な応用があり研究が続けられている。例えば、「力学系とエントロピー：青木統夫、白岩謙一 共立出版」、「An Introduction to Ergodic Theory, Walters, GTM」など参。ここでは次のような基本的な問題を考えよう。

問題: What kinds of compacta admit expansive homeomorphisms?

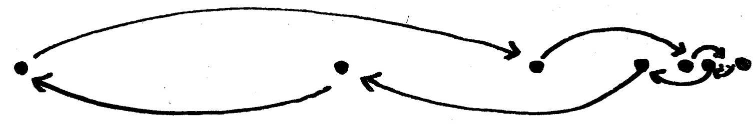
§1. 0次元の場合.

kを任意の自然数($k\in\mathbb{N}$)とする. $S(k)=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$, $\Sigma(k)=\prod_{i=-\infty}^{\infty}S(k)$とする. shift homeomorphism $\sigma:\Sigma(k)\to\Sigma(k)$を$\sigma((x_i)_i)=(x_{i-1})_i$で定義する。今、$\Sigma(k)$の$\sigma$-invariant closed set D (i.e, $\sigma(D)=D$)に対し$\sigma|D:D\to D$はexpansive homeomorphismである。このとき次はよく知られている。

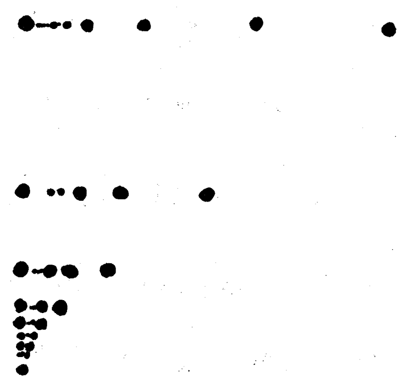
(1.1) $\dim X=0$とする。このときhomeomorphism $f:X\to X$に対し、fがexpansive homeomorphism $\Longleftrightarrow$ $^\exists k\in\mathbb{N}$, $^\exists\sigma$-invariant set $D\subset\Sigma(k)$ and $^\exists\varphi:X\to D$ homeomorphismで次をみたす.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi\downarrow\approx & \circlearrowright & \varphi\downarrow\approx \\ D & \xrightarrow[\sigma|D]{} & D \end{array}$$

一般にすべての0次元compactum上にはexpansive homeomorphismは存在しないが(例えばXがrigid, つまり1_Xが唯一のhomeomorphismとなる無限な個数の0次元compactumなど)、次の図の0次元compactum上にはexpansive homeomorphism が存在する.　　　　$X=\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$.



そこで上の図の次に単純であると思われる次のような図を考えると，筆者にはこの図形上に expansive homeomorphism が存在するかわかりません。



$(X\times X)/X\times\{0\}$

問題：Expansive homeomorphism をもつ 0次元 compactum の topological characterization を与えよ。

§2．一次元 continuum の場合

connected な compactum (= continuum) 上に expansive homeomorphism を認める例としては、R.F. Williams により 2-adic solenoid が発見されたのが始めであると思われる。一般に homeomorphism $f: X\to X$ が与えられた時、これが expansive かどうか決定することは非常にむずかしいのです

が、そこでもしあるとすると、次の場合のような homeomorphism であると比較的決定しやすいと考えられる。つまり、$g: X \to X$ を map (= continuous function) とし、g より作られる inverse system;

$$X \xleftarrow{g} X \xleftarrow{g} X \longleftarrow \cdots\cdots$$

を考える。また、この inverse limit

$$(X, g) = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \;\middle|\; g(x_{i+1}) = x_i \quad \forall i \right\}$$

をとり、shift homeomorphism $\hat{g}: (X, g) \longrightarrow (X, g)$ を $\hat{g}((x_i)_i) = (g(x_i))_i (= (x_{i-1})_i)$ で定義する。ここで g をいろいろ変化させた時 $\hat{g}$ が expansive homeomorphism にならないかを考えよう。 a map $g: X \to X$ が positively expansive map とは、$\exists c > 0$ s.t if $x, y \in X$, $x \neq y$, then $d(g^n(x), g^n(y)) > c$ for some natural number $n \geqq 0$ と定義する。代表的な例として、$S = \{ x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1 \}$: circle とし、$g: S \to S$ を $g(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ とおくと、g は positively expansive map である。この時次が知られている。

(2.1) $g: X \to X$ を positively expansive map とすると、$\hat{g}: (X, g) \to (X, g)$ は expansive homeomorphism.

Williams の問題として、次が知られている。

問題 (Williams): X を tree-like continuum とする。この

時，X上にexpansive homeomorphismは存在するか？ 特に平面内の一次元continuum Xで平面をseparateしないものはexpansive homeomorphismをもつか？ (注) M. Bargeによりexpansive homeomorphismをもつ平面内のcontinuumの存在がごく最近得られた。このcontinuumは一次元indecomposableで平面をseparateするものである。またJ. Kennedyによりarc-like continua上にカオス的homeomorphismsが構成された。

ここでexpansive homeomorphismについて知られている結果をあげると，

(1) (Mañé). If $f: X \to X$ is an expansive homeomorphism, then $\dim X < \infty$ and any minimal set of f is 0-dimensional.

(2) n次元トーラス：$T^n = \overbrace{S \times \cdots \times S}^{n}$ $(n \geqq 2)$, orientable 2-manifolds with positive genus はexpansive homeomorphismをもつ。

(3) arc $= I = [0, 1]$, circle S, および 2-sphere S^2 (平面) 上にはexpansive homeomorphismをみとめない。また，$^\forall g: I \to I$ に対し，$\hat{g}: (I, g) \to (I, g)$ はexpansive homeomorphismでないことが知られている。

次に今回得られた結果をあげてみる。

定理1. There are no expansive homeomorphisms on Suslinian continua. つまり $\dim X > 0$ で X が expansive homeomorphism をもつならば、X は uncountable collection of mutually disjoint, nondegenerate subcontinua of X をもつ。特に X が rational continuum (つまり、$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$ に対し $\exists$ n.b.d U of x in X s.t. $\operatorname{diam} U < \varepsilon$, $|\partial U|^{\#} \leqq \aleph_0$) 上には存在しない。

定理2. There are no expansive homeomorphisms on hereditarily decomposable tree-like (circle-like) continua. (2-adic solenoid は indecomposable)

定理3. X を 1次元 ANR, $f : X \to X$ を null-homotopic な map ($f \simeq 0$) とすると、$\hat{f} : (X, f) \to (X, f)$ は expansive homeomorphism でない。特に tree 上の任意の map f から作られる shift homeomorphism $\hat{f} : (X, f) \to (X, f)$ は expansive でない。但し (X, f) は nondegenerate とする。

定理4. X を Peano continuum と仮定する (= locally connected continuum)。もし X が平面内に含まれるならば、X は expansive homeomorphism をもたない。また、X が 1次元 AR な neighborhood をもつならば、X は expansive homeomorphism を認めない。

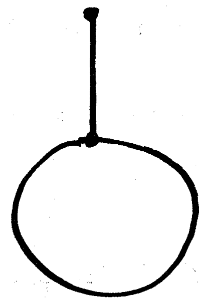
定理3に関係して次のことがわかる。Xを1次元compact ANRとし、$f: X \to X$をmapとする。このとき、もし$\tilde{f}: (X,f) \to (X,f)$がexpansiveであると、(2.1)の逆に近い性質が得られる。つまり、$\exists$ a sequence $\{A_i\}_0^\infty$ of arcs in X s.t

(1) $f|A_0: A_0 \to X$ は positively expansive map and $f^n(A_0)$ contains simple closed curve for $\forall n \geqq 1$,

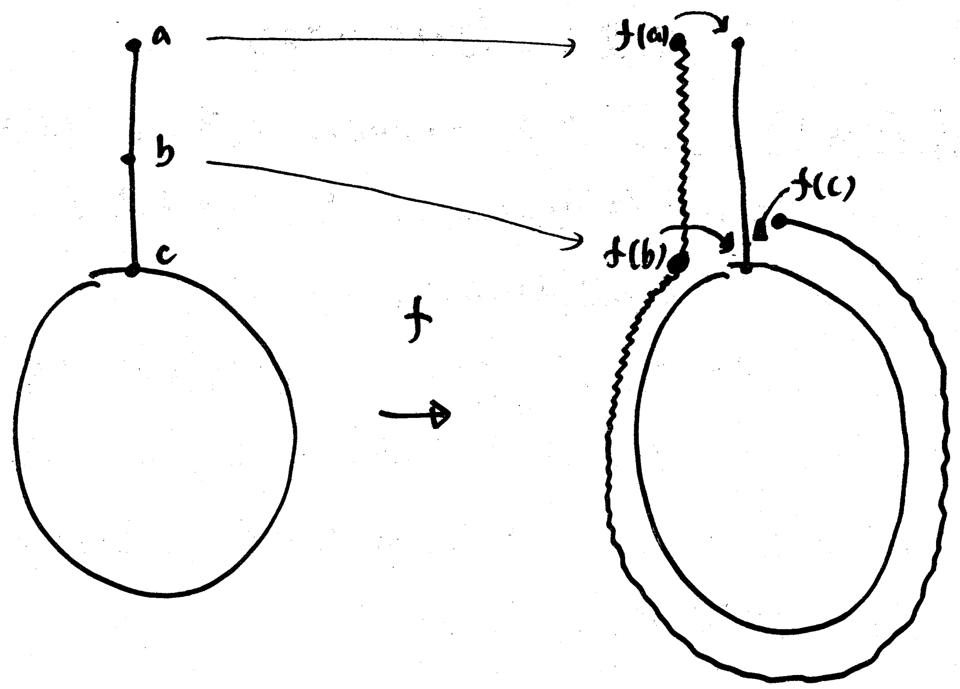
(2) $f(A_{i+1}) = A_i$, $f|A_{i+1}$ $(i \geqq 0)$ is injective

(3) $\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam} A_i = 0$.

Example. Xが1次元ANRの場合でも(2.1)の逆は不成立である。Xを図のようなgraphとする(= circle + arc)



map $f: X \to X$を circle上では2回りで、arc上では次の図のようとする。



この時 $\hat{f}:(X,f)\to(X,f)$ は expansive homeomorphism であるが、f は positively expansive map ではない。つまり、c の十分小さな近傍をとっても f は 1:1 でない。したがって、(2.1) の逆は不成立である。

次の section で定理1と2の証明のアイデアを与えよう。

§3. 定理1と定理2の略証.

定理1について：Xをcontinuumとする。$C(X)=\{A \mid A$はXのsubcontinua$\}$ (= hyperspace of X) を考え、$C(X)$上にmetric d_H (= Hausdorff metric)；

$$d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0 \mid U_\varepsilon(A)\supset B,\ U_\varepsilon(B)\supset A\}$$

を考える、ここで$U_\varepsilon(A)$はAのε-n.b.d. $C(X)$はcompact metric spaceである。$M\subset C(X)$を任意のsubsetとするとき、次の集合M^fを考える。

$M^f=\{A\in C(X) \mid \forall\varepsilon>0,\ \forall k\in\mathbb{N}$に対し、$\exists A_1, A_2, \cdots, A_k\in M\subset C(X)$ s.t. each A_i is nondegenerate, $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$, $d_H(A,A_i)<\varepsilon$ for $\forall i\}$.

すると、M^fはclosed in $C(X)$で $M^f\supset(M^f)^f$であることがわかる。そこで、任意のordinalに対し、

$M_1=M^f$, $M_{\alpha+1}=(M_\alpha)^f$, $M_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}M_\alpha$ (λ: limit)

で定義する。

次にこれからは$M=C(X)$とする。

Claim 1. X: a continuum. このとき

X: suslinian $\Longleftrightarrow$ $M_\alpha=\phi$ for some countable ordinal α.

∵) ⇒のみ示す。今 $M_\alpha\neq\phi$ for any countable ordinal α と

仮定する。このとき

$$\left.\begin{array}{l} M_\alpha : \text{closed in } C(X) \\ C(X) : \text{separable (Linderöff)} \end{array}\right\} \Rightarrow M_\alpha = M_{\alpha+1}$$ となる countable ordinal α がある。

仮定より、$M_\alpha = M_{\alpha+1} (=(M_\alpha)^+) \neq \phi$. 帰納的に次の性質をみたす subcontinua $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ ($i_j = 0$ or 1) of X と n.b.d $U_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ of $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ in X がとれる。

(1) $U_{i_1 i_2 \cdots i_n} \subset U_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}$

(2) $\mathrm{Cl}\, U_{i_1 \cdots i_{n-1} 0} \cap \mathrm{Cl}\, U_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 1} = \phi$

(3) ${}^\exists r > 0$ s.t $\mathrm{diam}\, A_{i_1 i_2 \cdots i_n} > r$

(4) $\mathrm{Cl}\, U_{i_1 i_2 \cdots i_n} \subset U_{1/2^n}(A_{i_1 i_2 \cdots i_n})$.

このとき

$A_{i_1 i_2 \cdots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cl}\, U_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ とおき、collection $\mathcal{A} = \{A_{i_1 i_2 \cdots} \mid i_j = 0 \text{ or } 1\}$ を考えると、これは uncountable, mutually disjoint subcontinua より成る collection であり、X は non Suslinean となる。

Claim 2. $f : X \to X$ を expansive homeomorphism として $\dim X > 0$ とする。このとき、$M_\alpha \neq \phi$ for any ordinal α.

∵) まず次の Lemma を必要とする。

Lemma. ${}^\exists \delta > 0$ s.t if $A \in C(X)$, A is nondegenerate, then $\exists$ a natural number $n_0 = n(A)$ で次のいずれかを満す。

(*) $\operatorname{diam} f^n(A) \geqq \delta$ for $\forall n \geqq n_0$.

(**) $\operatorname{diam} f^{-n}(A) \geqq \delta$ for $\forall n \geqq n_0$.

この Lemma を使って Claim 2 を示そう。

まず $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ で $\lim \varepsilon_i = 0$ となる正数列 $\{\varepsilon_k\}$ をとる。この ε_k に対し、$\exists n_k \geqq k$ で次をみたすものをとる;

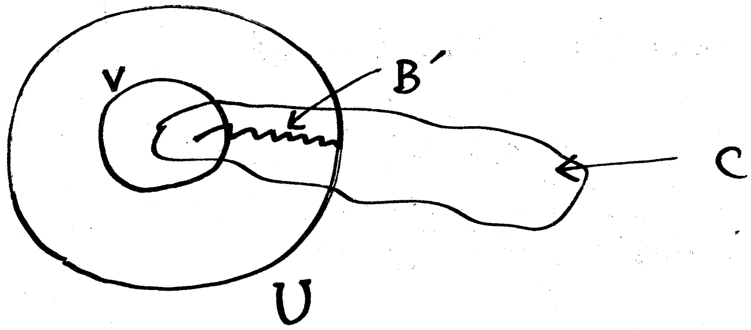
if $B_1, B_2, \cdots B_{n_k} \in C(X)$, then $\exists B \in C(X)$ s.t. $d_H(B, B_{i_j}) < \varepsilon_k$ for some $j = 1, 2, \cdots k$.

A を任意の nondegenerate な subcontinuum とする。ここで $B_1, B_2, \cdots, B_{2n_k} \in C(A)$ で $B_i \cap B_j = \phi$ $(i \neq j)$, B_i は nondegenerate for $\forall i$ なものをとる。Lemma より、

$\operatorname{diam} f^n(B_i) \geqq \delta$ $(i = 1, 2, \cdots, n_k)$ for some integer $n \in \mathbb{Z}$ としてよい。n_k のとり方より、$\exists B^k \in C(X)$ で、$d_H(B^k, f^n(B_{i_j})) < \varepsilon_k$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ となるものがある。ここで $B^k \to B$ としてよい。明らかに、$B \in M_1$ and B is nondegenerate. また M_1 は次の性質 $(\divideontimes_1)$ をみたす。

$(\divideontimes_1)$ If $C \in M_1$ and C is nondegenerate, for any

U, V : open sets s.t $\mathrm{cl}\, V \subset U$, $C \cap V \neq \phi \neq C - \overline{U}$,
$\exists B' \in M_1$ s.t $B' \subset \mathrm{cl}\, U \cap C$,
$B' \cap V \neq \phi \neq B' \cap \partial U$.



この(＊)という性質を利用して、transfinite induction により、任意の ordinal α に対し M_α は nondegenerate element を含み $(*_\alpha)$ をみたすことが示される。特に、$M_\alpha \neq \phi$ for any ordinal α.

Claim 1, 2 を使うと定理1がでてくる。

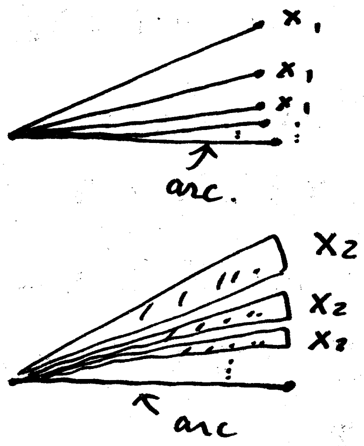
M_α について次の例を与えよう。各 ordinal $\alpha \leqq \omega_1$ に対し X_α を図のように決める。

(1) X_1 : arc

(2) X_2 :

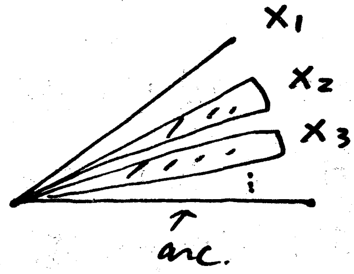
(3) X_3 :

⋮

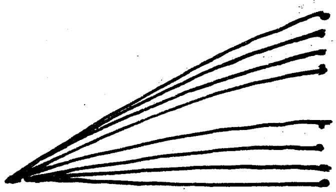


(ω) X_ω :

⋮



(ω_1) X_{ω_1} = the cone of a Cantor set.



このとき、(a) $\alpha < \omega_1 \Rightarrow M_\alpha \neq \phi$, $M_{\alpha+1} = \phi$ $(M = C(X_\alpha))$.

(b) $M_{\omega_1} \neq \phi$ $(M = C(X_{\omega_1}))$

定理2について: X: a continuum とする. Xのsubsetsのfinite sequence $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$がchainであるとは、$A_i \cap A_j \neq \phi \Leftrightarrow |i-j| \leqq 1$ とする。U_1, U_2をXのsubsetsとし、$[V_1, V_2, \cdots, V_m]$をchainとする。このとき$[V_1, \cdots, V_m]$がU_1とU_2に関しcrookedであるとは、$\exists\ 1 \leq i(1) < i(2) < i(3) < i(4) \leqq m$ s.t

$$V_{i(1)}, V_{i(3)} \subset U_1 \text{ and } V_{i(2)}, V_{i(4)} \subset U_2,$$

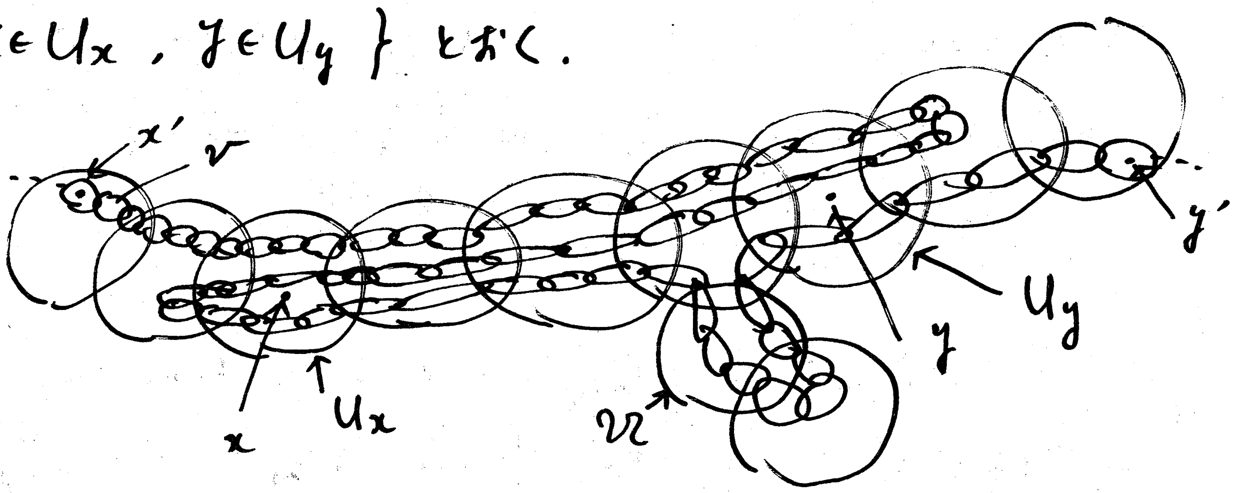
をみたすときとする。この時、次のLemmaが本質的である。

Lemma. $f: X \to X$ を expansive homeomorphism of a continuum X とする。このとき $\exists \delta_1$ s.t if $x, y \in X$, $x \neq y$ and $\mathcal{U}$ is any open cover of X, then

$^{\exists} N \in \mathbb{Z}$ and $^{\exists} \eta > 0$ s.t if $[V_1, V_2, \cdots, V_m]$ is any η-chain from x to y (i.e., diam $V_i < \eta$ and $x \in V_1$, $y \in V_m$), then $[f^N(V_1), f^N(V_2), \cdots, f^N(V_m)]$ is a refinement of $\mathcal{U}$ and crooked between U_s and U_t, where $U_s, U_t \in \mathcal{U}$, $d(U_s, U_t) \geqq \delta_1 - 2\,\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}$.

以下．Xをtree-like continuumと仮定する．Mを$X \times X$の$^{\forall}$setとする。また、このMに対し

$M^f = \{ (x, y) \in X \times X \mid {}^{\forall}\gamma > 0, {}^{\forall}$open cover $\mathcal{U}$ of X s.t the nerve $N(\mathcal{U})$ is a tree, $^{\exists}(x', y') \in M$ s.t $x' \neq y'$ and $^{\exists}$ open cover $\mathcal{V}$ of X with mesh $\mathcal{V} < \gamma$ s.t $\mathcal{V}$ is a refinement of $\mathcal{U}$, $N(\mathcal{V})$ is a tree and a chain $[V_1, V_2, \cdots, V_m]$ from x' to y' is crooked between U_x and U_y, where $U_x, U_y \in \mathcal{U}$ s.t $x \in U_x$, $y \in U_y \}$ とおく.



各 ordinal α に対し．

$M_1 = M^f$, $M_{\alpha+1} = (M_\alpha)^f$, $M_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ (λ : limit) とおく。各 M_α : closed in $X \times X$ で単調に小さくなっていくことがわかる。以下，$M = X \times X$ とする。

Claim 1. If X is a hereditarily decomposable tree-like continuum, then $M_\alpha = \phi$ for some countable ordinal α.

Claim 2. If $f : X \to X$ is a expansive homeomorphism of a tree-like continuum, then $M_\alpha \neq \phi$ $\forall \alpha$.

$\because$) claim 1 について。$M_\alpha = M_{\alpha+1} = (M_\alpha)^f$ となる countable ordinal α をとる。このとき $M_\alpha = \phi$ を示そう。今 $M_\alpha \neq \phi$ と仮定する。帰納的に、$(x_i, y_i) \in M_\alpha = (M_\alpha)^f$ と open cover $\mathcal{U}_i$ of X s.t $N(\mathcal{U}_i)$ is a tree を次の条件をみたすようにとる。

(1) mesh $\mathcal{U}_i \to 0$. $\mathcal{U}_{i+1}$ is a refinement of $\mathcal{U}_i$.

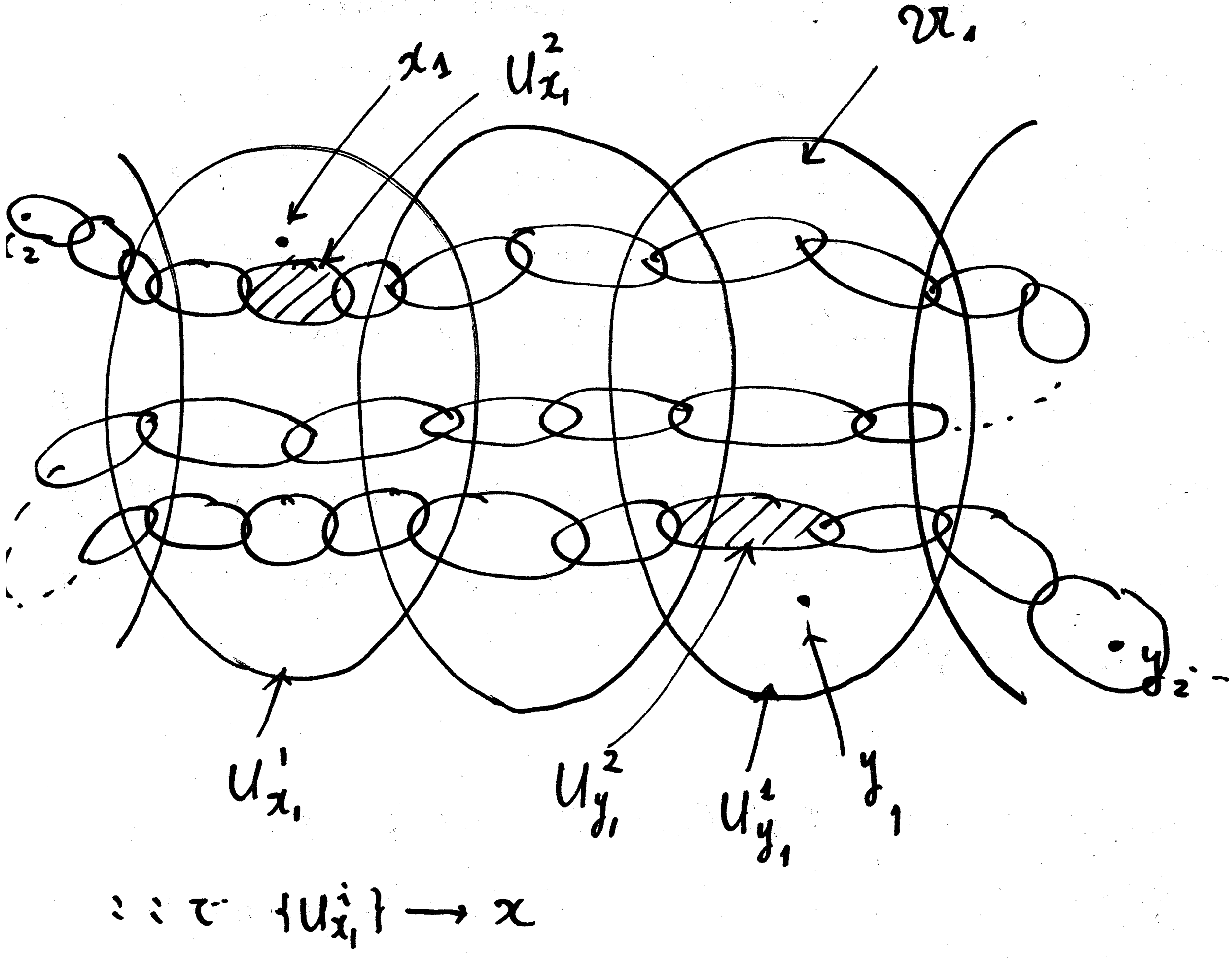
(2) a chain from x_{i+1} to y_{i+1} of $\mathcal{U}_{i+1}$ is crooked between $U^i_{x_i}$ and $U^i_{y_i}$, where $x_i \in U^i_{x_i} \in \mathcal{U}_i$, $y_i \in U^i_{y_i} \in \mathcal{U}_i$.

また $[U^i_1, U^i_2, \cdots, U^i_{m_i}]$ を a chain from x_i to y_i of $\mathcal{U}_i$ とすると，この subchain $[U^i_{x_1}, \cdots\cdots U^i_{y_1}]$

で，$x_1 \in U^1_{x_1} \supset U^2_{x_1} \supset \cdots\cdots$

$y_1 \in U^1_{y_1} \supset U^2_{y_1} \supset \cdots\cdots$ かつ

$[U^{i+1}_{x_1}, \cdots, U^{i+1}_{y_1}]$ is crooked between $U^i_{x_1}$ and $U^i_{y_1}$ となるものをえらぶ。



ここで $\{U^i_{x_1}\} \longrightarrow x$

$\{U^i_{y_1}\} \longrightarrow y$ としてよい。また $x \neq y$ とできる。

H: the irreducible continuum between x and y in X とすると．H は indecomposable，つまり H は proper subcontinua の 2 つの union でかけない。これは矛盾。

ii) Claim 2 について．まず $(x_0, y_0) \in X \times X$ $(x_0 \neq y_0)$ なるものをかってにとる。また $\mathcal{U}_i$: open covers of X s.t $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2 > \cdots$

$N(\mathcal{U}_i)$ is a tree and mesh $\mathcal{U}_i \to 0$

なるものとする。

この時、Lemma を使って、$\exists$ open covers $\mathcal{V}_i$ s.t $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2 > \cdots$, ある $N(i) \in \mathbb{Z}$ に対し $f^{N(i)}(\mathcal{V}_i)$ is a refinement of $\mathcal{U}_i$ and a chain from $f^{N(i)}(x_0)$ to $f^{N(i)}(y_0)$ of $f^{N(i)}(\mathcal{V}_i)$ is crooked between U_1^i and U_2^i, where $d(U_1^i, U_2^i) \geq \delta_1 - 2\,\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}_i$.

ここで、$\{U_1^i\} \to x_1$, $\{U_2^i\} \to y_1$ としてよい。また $d(x_1, y_1) \geq \delta_1$。明らかに $(x_1, y_1) \in M_1$. 帰納的に、$M_\alpha \neq \phi$ for any countable ordinal α を示せる． Claim 1 と 2 を使うと定理2が得られる。

最後に、次のような問題が興味深いと思われる。

(予想). If a continuum X admits an expansive homeomorphism, is it true that X contains an indecomposable subcontinuum which is invariant for the expansive homeomorphism?

また.

(1) Does the (arc-like) pseudo-arc admit expansive homeomorphisms?

(2) Does the Menger's Universal curve admit expansive homeomorphisms?