数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 1-17

de Rham complex の分解について.
(Deligne - Illusie の結果の紹介)

京大 理　横川 光司

(Koji YOKOKAWA)

§1. Deligne - Illusie の分解定理

p を素数、S を標数 p の scheme (すなわち $p\mathcal{O}_S=0$) とする。S の absolute Frobenius 射 $F_S : S \longrightarrow S$ は topological には、identity map で、$F_S^*(a)=a^p$ ($\forall a \in \mathcal{O}_S$) によって定義される射とする。$X$ を S-scheme とすると次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "F_X"] \arrow[dr, "F_{X/S}"] \arrow[ddr, "\pi"'] & & \\
& X' := X \times_S S \arrow[r, "W"] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\pi"] \\
& S \arrow[r, "F_S"'] & S
\end{tikzcd}$$

図の $F_{X/S}$ を X の S 上の relative Frobenius 射といい、以後 F によって表す。X/S の de Rham complex を $\Omega^{\bullet}_{X/S}$ とする。$F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}$ は $\mathcal{O}_{X'}$ module の complex となり、また、$\bigoplus_{i\geq 0}\Omega^i_{X'/S}$, $\bigoplus_{i\geq 0}\mathcal{H}^i(F_*\Omega^{\bullet}_{X/S})$ は、自然な graded $\mathcal{O}_{X'}$ algebra の構造をもつ。Cartier operator の定義から始める。

<u>定理</u> (Cartier)　X を smooth S-scheme とする。この時 graded $\mathcal{O}_{X'}$ algebra の<u>同型</u>

$$C^{-1} : \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^i_{X'/S} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}^i(F_* \Omega^{\cdot}_{X/S})$$

で、$C^{-1}(W^*(df)) = [f^{p-1} df]$ $({}^\forall f \in \mathcal{O}_X)$ を満たすものが、ただ一つ存在する。(証明は、[2] 又は、[3] を参照。)

Cartier operator は次の写像として定義されるが、

$$Z_i := \mathrm{Ker}(F_* \Omega^i_{X/S} \xrightarrow{F_* d} F_* \Omega^{i+1}_{X/S}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}^i(F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}) \xrightarrow{(C^{-1})^{-1}} \Omega^i_{X'/S}$$

以下では、C^{-1} しか使わない。

$\mathcal{O}_X$-module の derived category を $D(X)$ で表す。complex $L^{\cdot}$ に対して $\tau_{\leq m} L^{\cdot}$ を $L^{\cdot}$ の subcomplex $K^{\cdot}$ で、$K^i = 0$ $(i > m)$; $K^m = \mathrm{Ker}(L^m \xrightarrow{d} L^{m+1})$; $K^i = L^i$ $(i < m)$ を満たすものとし、$L^{\cdot}[n]$ は complex $K^{\cdot}$ で $K^i = L^{i+n}$ $({}^\forall i)$, $d_K = (-1)^n d_L$ を満たすものとする。また、$\mathcal{O}_X$ module M は 0 番目が M、他が 0 であるような complex とみられ、従って、$M[n]$ は、$-n$ 番目が M で他が 0 であるような complex である。$\tau_{<m} L^{\cdot}$ は $\tau_{\leq m+1} L^{\cdot}$ のこととする。

k を標数 $p > 0$ の完全体、$S = \mathrm{Spec}\, k$、$\tilde{S} = \mathrm{Spec}\, W_2(k)$ とする。但し $W_2(k)$ は長さ 2 の Witt vector の環である。S は同型 $W_2(k)/pW_2(k) \cong k$ により $\tilde{S}$ の closed subscheme とみ

られる。S-scheme X が flat $\tilde{S}$-scheme $\tilde{X}$ の S への制限である時、X は $\tilde{S}$（又は $W_2(k)$）へ liftable といい、$\tilde{X}$ を X の（$\tilde{S}$ への）lifting という。k の Frobenius 写像の $W_2(k)$ への拡張 $\sigma: W_2(k) \longrightarrow W_2(k)$、$\sigma(a_0, a_1) = (a_0^p, a_1^p)$ は $W_2(k)$ の自己同型である。

定理（Deligne-Illusie） smooth S-scheme X の lifting $\tilde{X}$ は、$D(X')$ における同型

$$\varphi_{\tilde{X}} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\ \sim\ } \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$$

で、$\mathcal{H}^i(\varphi_{\tilde{X}}) = C^{-1}$ となるものを定める。

注意）定理は、$D(X')$ において $\tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ が"分解"すること（すなわち、$D(X')$ において微分が 0 であるような complex に同型であること）を意味している。S が標数 p の scheme で、$\tilde{S}$ が $\mathbb{Z}/p^2$ 上 flat な scheme で $\tilde{S} \otimes \mathbb{Z}/p \cong S$ を満たすものとする。Deligne-Illusie [1] では、X' が $\tilde{S}$ へ liftable であることと、$\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ が分解することとが同値であること、また、この時も上の定理が成り立つことを示している。しかし、ここでは上の定理を証明するにとどめる。詳しくは [1] をみられたい。

定理の証明） 各 $i<p$ に対して、$D(X')$ における写像、

$$\varphi^i_{\tilde{X}} : \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\cdot_{X/S}$$

を $\mathcal{H}^i(\varphi^i_{\tilde{X}}) = C^{-1}$ となるように作ればよい。$\varphi^0_{\tilde{X}}$ は、

$$\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{C^{-1}} \mathcal{H}^0 F_*\Omega^\cdot_{X/S} \hookrightarrow F_*\Omega^\cdot_{X/S}$$

と定義すればよい。$\varphi^1_{\tilde{X}}$ が構成できたとする。$i<p$ に対して、canonical map $(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i} \longrightarrow \Omega^i_{X'/S}$ は、自然な、section $a(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_i) = \frac{1}{i!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(i)} sgn(\sigma)\,\omega_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\omega_{\sigma(n)}$

をもつ。これを使って $\varphi^i_{\tilde{X}}$ を次の図式が可換になるように定義する。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^i_{X'/S}[-i] & \xrightarrow{\varphi^i_{\tilde{X}}} & F_*\Omega^\cdot_{X/S} \\
\downarrow{\scriptstyle a[-i]} & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle product} \\
(\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\otimes i} & \xrightarrow{(\varphi^1_{\tilde{X}})^{\otimes i}} & (F_*\Omega^\cdot_{X/S})^{\otimes i}
\end{array}$$

C^{-1} が graded $\mathcal{O}_{X'}$ algebra の同型であることから $\mathcal{H}^i(\varphi^i_{\tilde{X}}) = C^{-1}$。

よって $\varphi^1_{\tilde{X}}$ を構成すればよい。$X\longrightarrow S$ の lifting $\tilde{X}\longrightarrow\tilde{S}$ と $\tilde{S}$ の automorphism σ との fiber product $\tilde{X}\times_{\tilde{S}}\tilde{S}$ を $\tilde{X}'$ とする。$\tilde{X}'\times_{\tilde{S}} S \cong X'$ である。$F: X\longrightarrow X'$ が $\tilde{S}$ へ liftable かどうかで分けて考える。

Case 1.) F が lifting $\tilde{F}:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{X}'$ を持つ時。

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{F}^* : \Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}} & \longrightarrow & \tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}} \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
F^* = \tilde{F}^*\otimes\mathbb{Z}/p : \Omega^1_{X'/S} & \xrightarrow{0} & F_*\Omega^1_{X/S}
\end{array}$$

よって、 $\tilde{F}^*(\Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}}) \subseteq p\hat{\tilde{F}}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ 。

$W_2(k)$ module の同型 $k = W_2(k)/pW_2(k) \xrightarrow{\times p} pW_2(k)$ を

$\mathbb{P}$ とかく。 $\tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ は $W_2(k)$ 上 flat であることに注意して、次の同型を得る。

$$F_*\Omega^1_{X/S} \cong \tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}} \otimes_{W_2(k)} k \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes\mathbb{P}]{\sim} \tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}} \otimes_{W_2(k)} pW_2(k) \cong p\tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}}$$

これもまた $\mathbb{P}$ とかく。同様に、次の同型も得られる。

$$\mathbb{P} : F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow p\tilde{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}.$$

写像 $\mathbb{P}^{-1}\circ\tilde{F}^* : \Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}} \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/S}$ は $p\Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}}$ を 0 にするから、 $f : \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/S}$ を引き起こす。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^1_{X'/S} & \xrightarrow{\quad f \quad} & F_*\Omega^1_{X/S} \\
\uparrow & \circlearrowright & \wr\downarrow \mathbb{P} \\
\Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}} & \xrightarrow{\quad \tilde{F}^* \quad} & p\tilde{F}_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}}
\end{array}$$

x を $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ の local section とすると、 $x\otimes 1 \in \mathcal{O}_{\tilde{X}'} = \mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}$

$$\tilde{F}^*(x\otimes 1) - x^p \in p\tilde{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \quad (\because \bmod p \text{ で } 0)$$

$$u(x) := \mathbb{P}^{-1}(\tilde{F}^*(x\otimes 1) - x^p) \in F_*\mathcal{O}_X$$

$$\therefore \tilde{F}^*(x\otimes 1) = x^p + \mathbb{P}\cdot u(x).$$

$x_0 := x \bmod p \ (\in \mathcal{O}_X)$ とおく。

$$\begin{aligned}
f(d(x_0\otimes 1)) &= \mathbb{P}^{-1}d(x^p + \mathbb{P}u(x)) \\
&= \mathbb{P}^{-1}(px^{p-1}dx + \mathbb{P}\,du(x)) \\
&= x_0^{p-1}dx_0 + du(x).
\end{aligned}$$

よって $d\circ f = 0$ 。このことは、f が complex の写像

$$f : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$$

を定めることを意味する。$[f(d(x_0\otimes 1))] = [x_0^{p-1}dx_0]$ in $\mathcal{H}^1(F_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ であるから、$\mathcal{H}^1 f = C^{-1}$ がわかる。f が $D(X')$ において、$\hat{F}$ のとり方によらずに決まることを示す。$\hat{F}_1$, $\hat{F}_2$ を F の二つの lifting とし、それぞれに対して上のように決められる (f, u) を、(f_1, u_1)、(f_2, u_2) とする。

$$\hat{F}_i^*(x\otimes 1) = x^p + p\,u_i(x) \qquad (i=1,2)$$

であるから、写像

$$\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^* : \mathcal{O}_{\tilde{X}'} \longrightarrow p\hat{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = pF_*\mathcal{O}_X$$

が決まる。これは、derivation である。実際、$x, y \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ に対して、

$$\begin{aligned}\hat{F}_i^*(xy\otimes 1) &= (x^p + p\,u_i(x))(y^p + p\,u_i(y)) \\ &= (xy)^p + p(x^p u_i(y) + y^p u_i(x))\end{aligned}$$

$$\therefore (\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(xy\otimes 1) = x^p(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(y\otimes 1) + y^p(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(x\otimes 1).$$

($\mathcal{O}_{\tilde{X}'} \ni x\otimes 1$ の $\hat{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ への action は x^p 倍であることに注意)

また、$(\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*)(p\mathcal{O}_{\tilde{X}'}) = 0$ 。よって次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\tilde{X}'} \arrow[r, "\hat{F}_2^* - \hat{F}_1^*"] \arrow[d] & p\tilde{F}_{1*}\mathcal{O}_{\tilde{X}} = p\tilde{F}_{2*}\mathcal{O}_{\tilde{X}} \\
\mathcal{O}_{X'} \arrow[ur] \arrow[d, "d"'] & \\
\Omega^1_{X'/S} \arrow[r, "h_{12}"] & F_*\mathcal{O}_X \arrow[uu, "p", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

h_{12} は $\mathcal{O}_{X'}$-linear であって、

$$h_{12}(d(x_0 \otimes 1)) = u_2(x) - u_1(x)$$

とかける。よって

$$f_2 - f_1 = d \circ h_{12} .$$

これは h_{12} が、二つの (complex の) 写像 f_1 と f_2 の間の、homotopy を与えることを意味する。従って f_1 と f_2 は $D(X')$ において一致する。

さらに、$i=1,2,3$ に対して、F の lifting $\hat{F}_i$ が与えられた時、
$$h_{12} + h_{23} = h_{13}$$
となることに注意しておく。

Case 2.) F が lift できない場合。

F は X の Zariski topology に関して local に liftable である。(実際、U を X の affine open set とすると、$X, X', \hat{X}, \hat{X}'$ は homeo. であるから、それぞれの open set $U, U', \hat{U}, \hat{U}'$ が決まる。$\hat{U}'$ は $\hat{S}$ 上 smooth だから projection $\hat{U} \times_{\hat{S}} \hat{U}' \longrightarrow \hat{U}$ は smooth。U は $\hat{U}$ の中で nilpotent ideal によって定義されるから formal smoothness より U から $\hat{U} \times_{\hat{S}} \hat{U}'$ への F によって決まる $\hat{U}$-morphism は $\hat{U}$ 上へ拡張される。)

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ を X の affine open covering で、各 $i \in I$ について F の lifting $\hat{F}_i : \hat{U}_i \longrightarrow \hat{U}_i'$ が与えられているものとする。この時 case 1 の結果から、

$$f_i = p^{-1}\tilde{F}_i^* \; : \Omega^1_{X'/S}|U'_i \longrightarrow F_*\Omega^1_{U_i/S}$$

$$h_{ij} : \Omega^1_{X'/S}|U'_{ij} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_{U_{ij}} \qquad (U_{ij} = U_i \cap U_j)$$

$$\underset{\text{on } U_i}{d\circ f_i = 0}\;,\quad \underset{\text{on } U_{ij}}{f_j - f_i = d\circ h_{ij}}\;,\quad \underset{\text{on } U_{ijk} = U_i\cap U_j\cap U_k}{h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}}$$

を得る。

$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X/S})$を $\Omega^{\cdot}_{X/S}$ の covering $\mathcal{U}$に関する Čech double complex に associate する simple complex とする。すなわち、 $\Delta_n := \{0, \cdots, n\}$ $\quad s : \Delta_n \longrightarrow I \quad (\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I})$

$U_s := \bigcap_{i\in\Delta_n} U_{s(i)} \qquad j_s : U_s \hookrightarrow X$ とおくと、

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X/S})^n = \bigoplus_{a+b=n} \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S})$$

ここで、$\check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S}) = \prod_{\{s:\Delta_n\to I\}} j_{s*} j_s^* \Omega^a_{X/S}$ で、

$d = d_1 + d_2$

$$d_1 : \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, \Omega^{a+1}_{X/S})$$

$$d_2 = (-1)^a \sum (-1)^i \partial_i : \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^{b+1}(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S}).$$

自然な写像 $\Omega^a_{X/S} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \Omega^a_{X/S})$は quasi-isom.

$$\psi_{\mathcal{U}} : \Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X/S})$$

を与える。F は homeo. であるから、F_*をつけて、

$$F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X/S})$$

も quasi-isomorphism になる。$\Omega^1_{X'/S}[-1]$ から $F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X/S})$ への写像を構成する。

$$\varphi'_{(\mathcal{U},(\tilde{F}_i))}=(\varphi_1,\varphi_2):\Omega^1_{X/S}\longrightarrow F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})^1$$
$$\| $$
$$F_*\check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)\oplus F_*\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\Omega^1_{X/S})$$

を、 $\varphi_1(\omega)=\prod_{i,j} h_{ij}(\omega|_{U_{ij}})\in F_*\check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$

$\varphi_2(\omega)=\prod_{i} f_i(\omega|_{U_i})\in F_*\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U},\Omega^1_{X/S})\quad(\omega\in\Omega^1_{X/S})$

によって定義する。$d\circ\varphi'_{(\mathcal{U},(\tilde{F}_i))}$ を決める三つの写像は、

$d_2\circ\varphi_1=(h_{ij}+h_{jk}-h_{ik})=0$

$d_1\circ\varphi_1-d_2\circ\varphi_2=(d\circ h_{ij}-(f_j-f_i))=0$

$d_1\circ\varphi_2=(d\circ f_i)=0$

であるから、$d\circ\varphi'_{(\mathcal{U},(\tilde{F}_i))}=0$、従って、$\varphi'_{(\mathcal{U},(\tilde{F}_i))}$ は complex の写像 $\Omega^1_{X/S}[-1]\longrightarrow F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})$を与える。$\varphi^1_X$ を $\psi_{\mathcal{U}}^{-1}\circ\varphi'_{(\mathcal{U},(\tilde{F}_i))}\in D(X')$ によって決める。φ^1_X が X の covering $\mathcal{U}$ 及び lifting $(\tilde{F}_i)$ によらないことは容易にわかる。また $\mathcal{H}^1\varphi^1_X=C^{-1}$ であることは、local に確かめればよいが、それは Case I から明らかである。

証明終。

注) case I のように、F が liftable である時は、φ^i_X は $D(X')$ でなくても $K(X')$ (object が complex、射が complex の写像の homotopy class である category)の元として定義できる。しかも、この時、φ^i_X は $i\geq p$ に対しても定義できる。実際、φ^1_X は、

写像 $\Omega^1_{X'/S} \longrightarrow Z_1$ を定める．$(Z_i = \mathrm{Ker}(F_*\Omega^i_{X/S} \to F_*\Omega^{i+1}_{X/S}))$
$\varphi^i_{\tilde{X}}$ を $\Omega^i_{X'/S} \longrightarrow \wedge^i Z_1 \longrightarrow Z_i$ によって定義すればよい。F が liftable かどうかを決める obstruction は、
$H^1(X', \Theta_{X'/S} \otimes F_*\Theta_X)$ の元として定まる。(cf. [1] Remark 2.2(iii))

系1. $\dim X \leqq p$ で、X が $W_2(k)$ へ liftable とすると、
$F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ は $D(X')$ の中で微分が 0 であるような complex に同型である。

略証)(詳しくは [1] p.255 参照) $\mathcal{H}^i(F_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ を $\mathcal{H}^i$ とかく。
triangle $\tau_{<p} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e}$
をみると、仮定から $\tau_{<p} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{H}^i[-i]$。$e=0$ を示せばよい。

$$e : \mathcal{H}^p[-p] \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{H}^i[-i]\right)[1]$$

$e = \sum_{i=0}^{p-1} e_i$，$e_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^p[-p], \mathcal{H}^i[-i+1]) = H^{p-i+1}(X', \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p, \mathcal{H}^i))$
Grothendieck duality によって $\tau_{\geqq 1} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ は $\mathcal{H}^i[-i]$ の直和となる．従って triangle

$$\tau_{\geqq 1}\tau_{<p} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow \tau_{\geqq 1} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e'}$$

で $e'=0$。$e' = \sum_{i=1}^{p-1} e_i$ だから，$e_i = 0$ $(i=1,\cdots,p-1)$。
$e_0 \in H^{p+1}(X', \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p, \mathcal{H}^0))$ で $\dim X \leqq p$ だから $e_0 = 0$.

証明終.

§2. 応用.

X、Sは前節の通りとする。Hodgeのspectral sequence

$$(*)\quad E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/S}) \Rightarrow E_\infty^{i+j} = \mathbb{H}^{i+j}(X, \Omega^{\cdot}_{X/S})$$
$$\parallel$$
$$H^{i+j}_{DR}(X/S)$$

について考える. 標数0の時と違って. 標数 $p>0$ の時は. (*)は一般に E_1 で退化しない。

系2. $\dim X \leqq p$ で、Xは k 上 proper かつ $W_2(k)$ へ liftable とする。この時、(*) は E_1 で退化する.

証明) $\dim_k H^j(\Omega^i_{X/k}) < \infty$ であるから、

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(\Omega^i_{X/k}) = \dim_k H^n_{DR}(X/k)$$

を示せばよい。系1.より $D(X')$ において、

$$\oplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$$

$$\therefore\ \mathbb{H}^n(X', \oplus\Omega^i_{X'/S}[-i]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n(X', F_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$$

左辺 $\cong \oplus H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'/S}) \cong \oplus H^{n-i}(X, \Omega^i_{X'/S}) \otimes_k k$

Fは finite だから、右辺 $\cong \mathbb{H}^n(X, \Omega^{\cdot}_{X/S}) = H^n_{DR}(X/k)$。

証明終。

系3. Xは k 上 proper かつ $W_2(k)$ へ liftable とする。この時、$i+j<p$ に対して. (*)は. $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ を満たす。

証明） $n<p$ に対して、

$$\mathbb{H}^n(X', \tau_{<p}F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}) \simeq \mathbb{H}^n(X', F_*\Omega^{\cdot}_{X/k})$$

であることに注意すれば、系2と同様にして証明される。□

系4. K を標数0の体とし、X は K 上 smooth proper scheme とする。この時、Hodge spectral sequence は E_1 で退化する。

証明） $\mathbb{Z}$ 上有限生成な K の部分環 A で商体が K であるものと、smooth proper morphism $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ で、generic fiber が X であるものが存在する。$h^{ij} = \dim_K H^j(X, \Omega^i_X)$ $h^n = \dim_K H^n_{DR}(X/K)$ とおく。最初から X は connected で次元が d であるとしておいてよい。必要なら A を局所化して、$R^j f_*\Omega^i_{\mathfrak{X}/A}$，$R^n f_*\Omega^{\cdot}_{\mathfrak{X}/A}$ は locally free で rank がそれぞれ h^{ij}，h^n であるとしてよい。（∵ base change と可換.）Spec$(A\otimes\mathbb{Q})$ の1つの closed point の Spec A における scheme theoritic image を T とし、T の closed point s で $k = k(s)$ の標数が p で $p \geq d$ となるようなものをとる。$\mathcal{O}_s$ を T における s の local ring としその極大イデアルを m_s とする。$\mathfrak{X}\otimes_A(\mathcal{O}_s/m_s^2)$ は $\mathfrak{X}_s = \mathfrak{X}\otimes_A k(s)$ の lifting で $\mathcal{O}_s/m_s^2 = W_2(k)$。$\dim_k H^j(\mathfrak{X}_s, \Omega^i) = h^{ij}$ $\dim_k H^n_{DR}(\mathfrak{X}_s/k(s)) = h^n$ で、$d \leq p$ だから系2より

$$\sum_{i+j=n} h^{ij} = h^n$$

証明終。

次に、小平の vanishing theorem を正標数の場合に拡張する。次の系は Raynaud による。

系5. X は k 上 smooth, projective, of pure dimension d とし、$W_2(k)$ へ liftable とする。L は X 上の invertible sheaf で次の (i) (ii) のうちの一つを満たすとする。

(i) L は ample.

(ii) $d=2$ で L は numerically positive (すなわち、$L\cdot L>0$ で、任意の effective divisor D に対して $L\cdot\mathcal{O}(D)\geqq 0$。)。

この時、次が成り立つ。

(5.1) $H^j(X, \Omega^i\otimes L)=0$ for $i+j>\sup(d, 2d-p)$,

(5.2) $H^j(X, \Omega^i\otimes L^{-1})=0$ for $i+j<\inf(d, p)$.

((5.1) と (5.2) は Serre duality により同値。)

系5の証明のために次の補題を示す。

補題. X を smooth k-scheme, M を X 上の invertible sheaf, l を整数とする。$\tau_{<l}F_*\Omega^{\cdot}_X$ は $D(X')$ において微分が0であるような complex と同型で、$i+j<l$ に対して $H^j(X, \Omega^i_X\otimes M^{\otimes p})=0$ と仮定する。この時、$i+j<l$ に対して、$H^j(X, \Omega^i_X\otimes M)=0$ が成り立つ。

補題の証明） $M' = M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$ とおく。$F^*M' \cong F_X^*M \cong M^{\otimes p}$ に注意する。

$$H^j(X, \Omega_X^i \otimes M^{\otimes p}) \cong H^j(X', F_*(\Omega_X^i \otimes M^{\otimes p}))$$
$$\cong H^j(X', F_*\Omega_X^i \otimes M').$$

hypercohomology の spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X', F_*\Omega_X^i \otimes M') \Rightarrow E_\infty^{i+j} = \mathbb{H}^{i+j}(X', F_*\Omega_X^\cdot \otimes M')$$

において、仮定から、E_1^{ij} は $i+j<b$ のとき 0 であるから $n<b$ に対して $E_\infty^n = \mathbb{H}^n(X', M' \otimes F_*\Omega_X^\cdot) = 0$。また $n<b$ の時、

$$\mathbb{H}^n(X', M' \otimes F_*\Omega_X^\cdot) \cong \mathbb{H}^n(X', M' \otimes \tau_{<b} F_*\Omega_X^\cdot)$$
$$\cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(X', M' \otimes \Omega_{X'}^i)$$
$$\cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, M \otimes \Omega_X^i) \otimes_k k.$$

従って、$i+j<b$ に対し、$H^j(X, M \otimes \Omega_X^i) = 0$。

証明終。

系5の証明） $b \leq p$ の時、$\tau_{<b} F_*\Omega_X^\cdot$ は $D(X')$ において微分が0であるような complex に同型である。(i) が成り立つ時 $j<d$ ならば十分大きな N に対して $H^j(X, \Omega_X^i \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0$ である。特に $N = p^n$ とすれば補題より $H^j(X, \Omega_X^i \otimes L^{-1}) = 0$。よって (5.2) が成り立つ。(ii) を仮定した時は、$i+j<2$ に対して N を十分大きくとれば $H^j(X, \Omega_X^i \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0$ となることを示せばよい。$j=i=0$ のときは明らか。$j=1$, $i=0$ の時

は Szpiro の結果から（[6], prop. 2）。$j=0$, $i=1$ の時は、
$H^0(X, \Omega^1 \otimes L^{\otimes(-N)}) \neq 0$ とすると、$H^0(L^{\otimes N}) \subseteq H^0(\Omega^1_X)$。しかし、
$H^2(L^{\otimes N}) \cong H^0(\Omega^2_X \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0$ （$\because \neq 0 \Rightarrow (\Omega^2_X \otimes L^{\otimes(-N)}) \cdot L \geq 0$、
$\therefore \Omega^2_X \cdot L \geq N(L\cdot L)$、$L\cdot L > 0$ だから $N \gg 0$ とすると矛盾。）。
よって、$N \to \infty$ の時 $H^0(L^{\otimes N})$ の次元 $\to \infty$。これは不可能である。　　　　証明終。

標数 0 の場合の vanishing theorem も、系 5 から（系 4 と全く同様にして）証明される。

<u>系 6.</u>（Kodaira-Akizuki-Nakano, Ramanujan）K を標数 0 の体、X を次元 d（pure dim）、smooth projective K-scheme で、L を invertible sheaf とする。L は ample であるか又は、$d=2$ で L は numerically positive とする。この時、

$$H^j(X, \Omega^i \otimes L) = 0 \quad \text{for } i+j > 0$$

$$(\Leftrightarrow \quad H^j(X, \Omega^i \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{for } i+j < d\ ).$$

<u>系 7.</u> 系 5 の仮定のもとで、さらに D X smooth divisor とする。D は ample で $W_2(k)$ へ liftable とする。この時、制限写像 $H^n_{DR}(X/k) \longrightarrow H^n_{DR}(D/k)$ は $n < \inf(p, d) - 1$ に対して同型、$n = \inf(p, d) - 1$ に対して単射である。

証明） $\Omega^{\cdot}_X \longrightarrow \Omega^{\cdot}_D$ の kernel $\Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D)$ に対して次の exact sequence が存在する。（cf. [1] §4）

$$0 \longrightarrow \Omega^{\cdot}_X(-D) \longrightarrow \Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D) \longrightarrow \Omega^{\cdot -1}_D(-D) \longrightarrow 0$$

系5.を $(X, \mathcal{O}_X(D))$、$(D, \mathcal{O}_D(D))$ に適用すれば、$n < \inf(p, d)$ に対して $\mathbb{H}^n(X, \Omega^{\cdot}_X(-D)) = \mathbb{H}^{n-1}(D, \Omega^{\cdot}_D(-D)) = 0$.

$$\therefore \quad \mathbb{H}^n(X, \Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D)) = 0 \quad \text{for} \quad n < \inf(p, d).$$

証明終。

参考文献

[1] P. Deligne and L. Illusie : Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Invent. math. 89, 247-270 (1987).

[2] N. Katz : Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem. Publ. Math. Inst. Hautes. Etud. Sci. 39, 175-232 (1970).

[3] P. Cartier : Une nouvelle opération sur les formes différentielles. C.R. Acad. Sci, Paris, 244, 426-428 (1957).

[4] L. Illusie : Réduction semi-stable et dégénérescence de suites spectrales de Hodge, preprint.

[5] I. Bauer and S. Kosarew : On the Hodge spectral sequence for some classes of non-complete algebraic manifolds, Math. Ann. 284, 577-593 (1989).

[6] R. Ménégaux : Un théorème d'annulation en charactéristique

positive, Astérisque 86, 35-43 (1981).

注) さらに進んだ結果については、[1] §3.4, [4], [5] を参照して下さい。