数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 33-44

有限群スキームのアフィン平面への作用について

大阪大学理学部　宮西正宜
(Masayoshi Miyanishi)

$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ を離散的付値環（DVR），$K = Q(\mathcal{O})$ をその商体，$k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ をその剰余体として，K の標数が 0 で，k の標数が $p > 0$ となる場合を考える．k が代数的閉体で，K が 1 の原始 p 乗根を含むとき，$\mathcal{O}$ を p-good DVR と略称する．$G_{m,\mathcal{O}} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}[t, t^{-1}]$ を乗法群スキーム，$\mu_{p,\mathcal{O}}$ を $G_{m,\mathcal{O}}$ の p 乗準同型の kernel，$\mu_{p,\mathcal{O}} = \mathrm{Ker}(G_{m,\mathcal{O}} \xrightarrow{\times p} G_{m,\mathcal{O}})$，とおけば，$\mathcal{O}$ が p-good DVR のとき，$\mu_{p,K} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$\mu_{p,k} \cong \mu_p = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^p-1))$ となる．したがって，アフィン平面 $\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}$ 上に $\mu_{p,\mathcal{O}}$ の作用 $\sigma : \mu_{p,\mathcal{O}} \times \mathbb{A}^2_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}$ を与えることは，$\mathbb{A}^2_K$ 上への $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の作用 σ_K を与えることとその標数 p への退化 $\sigma_k : \mu_{p,k} \times \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ を与えることに同値である．σ_k は $\mathbb{A}^2_k$ の座標環 $k[x, y]$ 上の乗法的 k-derivation Δ，$\Delta^p = \Delta$，を与えることに同値である．本稿では，このような観点から $\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}$ 上への $\mu_{p,\mathcal{O}}$ の作用を研究することを目的とする．その動機は次の問題である．

Lifting Problem. 多項式環 $k[x,y]$ 上の k-derivation Δ, $\Delta^p=\Delta$, が与えられると, どのような (Δ に関する) 条件のもとで, p-good DVR $(\mathcal{O},\mathfrak{m})$ と $\mu_{p,\mathcal{O}}$ のアフィン平面への作用 $\sigma:\mu_{p,\mathcal{O}}\times \mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}\to\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}$ が存在して, Δ は σ_k に付随した derivation になるか?

Δ が線形化可能という概念を導入して, Δ が線形化可能であることが上記問題が肯定的に解けるための必要十分条件であろうと推測される根拠を与える.

本稿の内容は野村竜也氏との共著論文として発表される予定である[ ]。

§1. $\mu_{p,k}$ の作用について

k を標数 $p>0$ の体, $\mu_{p,k}=\mathrm{Ker}(G_{m,k}\xrightarrow{\times p}G_{m,k})$ とする。$\mu_{p,k}=\mathrm{Spec}\,k[t,t^{-1}]/(t^p-1)=\mathrm{Spec}\,k[\tau]/(\tau^p)$ $(\tau=t-1)$ と表すとき, $\mu_{p,k}$ の積 $m:\mu_{p,k}\times\mu_{p,k}\to\mu_{p,k}$, 逆元の射 $i:\mu_{p,k}\to\mu_{p,k}$ 及び単位元 $e:\mathrm{Spec}\,k\to\mu_{p,k}$ はそれぞれ次の環準同型によって与えられる: $m^*(t)=t\otimes t$, $\iota(t)=t^{-1}$, $\varepsilon(t)=1$. τ を用いて与えると, $m^*(\tau)=\tau\otimes1+1\otimes\tau+\tau\otimes\tau$, $\iota(\tau)=(1+\tau)^{-1}-1$, $\varepsilon(\tau)=0$ となる.

アフィン・スキーム $X=\mathrm{Spec}\,A$ への $\mu_{p,k}$ の作用 $\sigma_k:\mu_{p,k}\times X\to X$ は k 準同型写像 $\delta:=\sigma_k^*:A\longrightarrow A[t,t^{-1}]/(t^p-1)=A[\tau]/(\tau^p)$

で，$\delta=\sum_{i=0}^{p-1}\delta_i t^i=\sum_{i=0}^{p-1}\Delta_i\tau^i$ と k 加群 A の準同型 Δ_i,δ_i の形式和として表すとき，次の性質をもつものと対応している：

(i) $\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{p-1}=1_A$（＝恒等写像），$\delta_i\delta_j=0\ (i\neq j)$，$\delta_i^2=\delta_i$；

(ii) $\Delta:=\Delta_1$ は $\Delta^p=\Delta$ となる A の k-derivation で，Δ_i ($\forall i\geqslant 1$) は $\mathbb{F}_p$ 係数の Δ の多項式として与えられる；

(iii) (Δ_i) と (δ_j) の間の関係は次の行列表示で与えられる：

$$\begin{pmatrix}1_A\\ \Delta\\ \vdots\\ \Delta^{p-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ 0&1&2\ \cdots&p-1\\ 0&1&2^2\ \cdots&(p-1)^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&1^{p-1}&2^{p-1}\cdots&(p-1)^{p-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_0\\ \delta_1\\ \vdots\\ \delta_{p-1}\end{pmatrix}.$$

A が多項式環 $k[x_1,\ldots,x_n]$ であれば，上記の作用 σ は $\mu_{p,k}$ のアフィン空間 $\mathbb{A}_k^n$ 上への作用である．このとき，次のような概念を導入する：

σ：線形 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ σ は $GL(n,k)$ を通して $\mathbb{A}_k^n$ に作用する

$\Longleftrightarrow$ $\Delta(x_i)\in A_1:=kx_1+\cdots+kx_n$ ($\forall i$)

σ：線形化可能 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Aut}_k(\mathbb{A}^n)$ の元 γ が存在して，$\gamma^{-1}\circ\sigma\circ(1_G\times\gamma)$ は $G:=\mu_{p,k}$ の $\mathbb{A}_k^n$ への線形な作用である

$\Longleftrightarrow$ $\varphi=\gamma^*:A\to A$ とおくと，$(\varphi\Delta\varphi^{-1})(x_i)\in A_1$ ($\forall i$)。

σ：アフィン化可能 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Aut}_k(\mathbb{A}^n)$ の元 γ が存在して，$\gamma^{-1}\cdot\sigma\cdot(1_G\times\gamma)$ はアフィン変換群を通る作用である

$\Longleftrightarrow$ $\varphi=\gamma^*$ について，$(\varphi\Delta\varphi^{-1})(x_i)\in A_1$ $(\forall i)$.

ただし，$G=\mu_{p,k}$ に対しては，線形化可能 $\Leftrightarrow$ アフィン化可能となる。

Lemma 1．上記の k-derivation Δ に関して，Δ が線形化可能である必要十分条件は，$A=k[x_1,\ldots,x_n]$ の変数変換 $(x_1,\ldots,x_n)\longmapsto(y_1,\ldots,y_n)$ が存在して $\Delta=\sum_{i=1}^{n}n_iy_i\frac{\partial}{\partial y_i}$ $(n_i\in\mathbb{F}_p)$ と表せることである。

$\mu_{p,k}$ の $\mathbb{A}_k^n$ への作用は必ずしも線形化可能ではない。

例 1．$p\geqq 3$，$A=k[x_1,x_2]$，$\Delta=(x_1+x_1^s)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2+x_2^s)\frac{\partial}{\partial x_2}$ $\left(s=\frac{p+1}{2}\right)$ とすれば，$\Delta^p=\Delta$ であるが，Δ は線形化可能ではない。

標数 0 の体上では，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{A}_k^2$ への作用が必ず線形化されることはよく知られている。しかし，標数 $p>0$ の体上では $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{A}_k^2$ への作用は必ずしも線形化可能ではない。

例 2．$\mathbb{A}_k^2$ の自己同型 φ を，$\varphi(x_1)=x_1$，$\varphi(x_2)=x_2+x_1^n$ $(n\geqq 2)$ で与えると，φ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{A}_k^2$ 上への作用を与えるが，この作用は線形化可能ではない．[∵ $G=\langle\varphi\rangle\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ として

G-固定点の集合$(\mathbb{A}^2)^G$はx_2軸になる。さらに，$\forall P \in (\mathbb{A}^2)^G$に対して$G$の接空間$T_P$への作用は自明である。もしこの$G$作用が線形化可能ならば，$\varphi$は行列$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$に共役であり，$T_P$における$G$作用は自明でないものになる。これは矛盾である。]

§2. $\mu_{p,\mathcal{O}}$の作用について

$(\mathcal{O}, m)$をp-good DVR，$K = Q(\mathcal{O})$，$k = \mathcal{O}/m$とする。$X = \operatorname{Spec} A$を既約かつ被約な$\mathcal{O}$スキームとし，$\sigma : \mu_{p,\mathcal{O}} \times X \to X$を有限群スキームの作用とする。$\mu_{p,k}$の場合と同様に，$\mu_{p,\mathcal{O}} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}[t, t^{-1}]/(t^p - 1)$で，その群スキームの構造は$\mathcal{O}$多元環の準同型$m^*(t) = t \otimes t$，$\iota(t) = t^{-1}$，$\varepsilon(t) = 1$で与えられる。$\delta := \sigma^* = \sum_{i=0}^{p-1} \delta_i t^i$と$\sigma$に対応する$\mathcal{O}$多元環の準同型$\sigma^*$を表せば，$\sigma$が$X$上への作用であることと，条件

$$\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{p-1} = 1_A, \quad \delta_i \delta_j = 0 \ (i \neq j), \quad \delta_i^2 = \delta_i$$

が成立することは同値である。さて，ζを1の原始p乗根$(\in K)$とすれば，$\zeta \in \mathcal{O}$となるが，$\varphi = \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \delta_i$とおく。この$\varphi$は$A$の$\mathcal{O}$加群としての自己準同型であるが，$\mathcal{O}$多元環の自己同型で$\varphi^p = 1_A$をみたすものになっていることが示される。さらに，$\varphi = 1_A \Leftrightarrow \delta_1 = \cdots = \delta_{p-1} = 0 \Leftrightarrow$ 作用σが自明という関係がある。

Lemma 2. 逆に，φ を A の $\mathcal{O}$ 多元環自己同型で，$\varphi \neq 1_A$, $\varphi^p = 1_A$ となっているものとする。このとき次の事柄が成立する。

(1) $\delta_i = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\left(\dfrac{\varphi}{\zeta^i}\right)^j$ $(0 \leqq i < p)$, $\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_{p-1}t^{p-1}$ $(t^p = 1)$ とおくと，δ が作用 $\sigma : \mu_{p,\mathcal{O}} \times X \to X$ を定める必要十分条件は $\delta_i(A) \subset A$ $(0 \leqq {}^\forall i < p)$ となることである。この条件は $\varphi \otimes_{\mathcal{O}} k$ が $A \otimes_{\mathcal{O}} k$ の恒等写像であることに同値である。

(2) $A \otimes_{\mathcal{O}} K$ の K 加群自己準同型 D_i を

$$D_i = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{p-1} j^i \left(\frac{\varphi}{\zeta^j}\right)^l\right), \quad 1 \leqq i < p$$

と定義すると，次の結果が成立する。

(i) $D_i = D^i$ $(1 \leqq i < p)$, $D_1 = \delta_1 + 2\delta_2 + \cdots + (p-1)\delta_{p-1}$.

(ii) $D = D_1$ とおくと，$D(A) \subset A \iff \delta_i(A) \subset A$ $(0 \leqq {}^\forall i < p)$.

(iii) $D(A) \subset A$ と仮定する。このとき，D は $\mathcal{O}$ 加群 A の線形写像として関係式 $\displaystyle\prod_{j=0}^{p-1}(D-j) = 0$ をみたす。この関係式は D の K 上の最小多項式である。

(3) $D(A) \subset A$ と仮定する。(「$D(A) \subset A \iff \delta_i(A) \subset A$ $({}^\forall i)$ $\iff \sigma : \mu_{p,\mathcal{O}} \times X \to X$ が $\delta = \sigma^*$ として定まる」に注意せよ。)
このとき次の事柄が成立する。

(i) $D(ab) - aD(b) - bD(a) \in p\mathbb{Z}_{(p)}[D(a), \ldots, D^{p-1}(a), D(b), \ldots, D^{p-1}(b)]$

ここで，$\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p\mathbb{Z})}$.

(ii) $\bar{D} = D \otimes_{\mathcal{O}} k : \bar{A} \to \bar{A}$ $(\bar{A} := A \otimes_{\mathcal{O}} k)$ とおくと，$\bar{D}$ は

$\bar{A}$ の k-derivation で，$\bar{D}^p = \bar{D}$ をみたす。よって $\bar{D}$ は $\bar{X} := X \underset{\mathcal{O}}{\otimes} k$ 上への $\mu_{p,k}$ の作用を与える。

Lemma 2 の記号で，δ が作用 $\sigma : \mu_{p,\mathcal{O}} \times X \to X$ を与えるとき，D を A の作用 σ に付随した pseudo-derivation という。このような D を，derivation の類似物と理解して，その性質を研究することは興味ある問題である。

例3. $p = 2$，$A = \mathcal{O}[x, y]$，$\varphi(x) = -x$，$\varphi(y) = -y - x^2$ として，多項式環 A の自己同型を与えると，$\varphi^2 = 1_A$ であるが，$\delta_0(x) = \frac{1}{2}(1+\varphi)(x) = 0$，$\delta_0(y) = \frac{1}{2}(1+\varphi)(y) = -\frac{1}{2}x^2 \notin A$ となって，φ は $\mu_{p,\mathcal{O}}$ の Spec A 上への作用を与えない。$\varphi \underset{\mathcal{O}}{\otimes} k$ は確かに $A \underset{\mathcal{O}}{\otimes} k$ の自明でない involution である。

例4. 以下は，$p = 2$ と 3 の場合における pseudo-derivation の具体的表示である。記号は Lemma 2 の通りである。

(i) $p = 2$. $D = \frac{1}{2}(1 - \varphi)$，$D(ab) = aD(b) + D(a)\varphi(b)$

$= bD(a) + D(b)\varphi(a) = aD(b) + bD(a) - 2D(a)D(b)$.

(ii) $p = 3$. $D = \frac{1}{3}\{3 + (\omega - 1)\varphi + (\omega^2 - 1)\varphi^2\}$，$\omega^3 = 1$

$D(ab) = aD(b) + bD(a) + \frac{21}{4}D(a)D(b) - \frac{15}{4}\{D^2(a)D(b) + D^2(b)D(a)\} + \frac{9}{4}D^2(a)D^2(b)$.

Lemma 3。 Lemma 2 と同じ記号を用いる。$D(A) \subset A$ と仮定すると次の事柄が成立する。

(1) $\varphi(a) = a \Leftrightarrow \delta_0(a) = a \Leftrightarrow \delta_1(a) = \cdots = \delta_{p-1}(a) = 0 \Leftrightarrow D(a) = 0$.

(2) $A_0 = \{ a \in A \,;\, D(a) = 0 \}$ とおけば, $A_0 = \delta_0(A)$ で A_0 は A の $\mathcal{O}$ 部分多元環である。また, A は A_0 の整拡大である。A が正規環ならば, A/A_0 は Galois 群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \varphi \rangle$ をもつ環の Galois 拡大である。

(3) $\bar{A} = A \otimes_{\mathcal{O}} k$, $\bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{A}$, $\bar{\sigma} = \sigma \otimes_{\mathcal{O}} k : \mu_{p,k} \times \bar{X} \to \bar{X}$, $\bar{D} = D \otimes_{\mathcal{O}} k$, $(\bar{A})_0 = \{ \bar{a} \in \bar{A} \,;\, \bar{D}(\bar{a}) = 0 \}$ とおく。すると, $\bar{\sigma}$ は $\mu_{p,k}$ の $\bar{X}$ 上への作用である。また, $(\bar{A})_0 = A_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ で, $\bar{A}$ が正規環ならば $(\bar{A})_0$ も正規環である。

$\mu_{p,\mathcal{O}}$ の作用をさらに調べるために, 定義と準備が必要である。

$G = \mu_{p,\mathcal{O}}$ とおき, $\sigma : G \times X \to X$ を既約かつ被約な $\mathcal{O}$ スキーム $X = \operatorname{Spec} A$ への作用とする。Ψ を σ と射影 $p_2 : G \times X \to X$ から定まる射 $(\sigma, p_2) : G \times_{\mathcal{O}} X \to X \times_{\mathcal{O}} X$ とする。$\Delta_X : X \to X \times_{\mathcal{O}} X$ を対角射として, S をファイバー積 $(G \times X, \Psi) \times_{X \times X} (X, \Delta_X)$ によって, $G \times X$ の X 部分群スキームとして定義する。[直観的に言えば, S は集合 $\{ (g, x) \,;\, gx = x \}$ で, X 上の群スキームの構造は $(g, x)(g', x) = (gg', x)$ で与える。] この

S を stabilizer group scheme と称する。Φ は $\mathcal{O}$ 多元環準同型 $\Phi^*: A \otimes_{\mathcal{O}} A \to A[t]$, $\Phi^*(a \otimes b) = \delta(a) b$ に対応しており，S は $G \times X$ の閉部分スキームとして，イデアル $J = \sum_{a \in A} (\delta(a) - a) A[t]$ で定義される．X-群スキームとしての S の単位元を与える射 $e_X: X \to S$ は $\mathcal{O}$ 多元環準同型 $\varepsilon: A[t]/J \to A$, $\varepsilon(t) = 1$ で与えられる。そこで，$L = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ とおき，$F = (\mathrm{Supp}\, L)_{red}$ と定義する．$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 及び $\mu_{p,k}$ はそれぞれ単純群スキームだから，F は作用 σ の固定点集合と考えられる．[F を σ の fixed point locus と呼ぶ.]

Lemma 4. (1) L は F の各点で rank $p-1$ をもつ．また，$\tau = t - 1$ とおけば，$L = \tau A[\tau]/J$ とかける．

(2) a が A の元を動くとき，$\delta(a) - a$ を τ に関する多項式とみたときの係数全部で生成された A のイデアルを J_0 とする．F は X の閉部分スキームとして，$\sqrt{J_0}$ で定義される．また，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, A$ について，$\mathfrak{P} \supset J_0 \Longleftrightarrow \mathfrak{P} \ni D(a)$ $(\forall a \in A)$．よって，$J_1 = \sum_{a \in A} D(a) A$ とするとき，F は $\sqrt{J_1}$ によっても定義される．

(3) $\bar{\sigma} = \sigma \otimes_{\mathcal{O}} k: \mu_{p,k} \times \bar{X} \to \bar{X}$ に関して，この作用 $\bar{\sigma}$ による fixed point locus を $\bar{F}$ と表せば，$\bar{F}$ はイデアル $\sqrt{\sum_{\bar{a} \in \bar{A}} \bar{D}(\bar{a}) \bar{A}}$ で定義されて，$\bar{F} = (F \otimes_{\mathcal{O}} k)_{red}$ となる．

§3. Lifting problem.

kを標数$p>0$の代数的閉体とする。多項式環$B=k[x_1,\dots,x_n]$上のk-derivation Δで$\Delta^p=\Delta$となるものを考える。Δは$\mu_{p,k}$の$\mathbb{A}^n_k$への作用$\bar{\sigma}$を与える（§1）。このとき，Δがliftableということを，「$\exists$ p-good DVR $(\mathcal{O},m)$，$\exists\, \sigma: \mu_{p,\mathcal{O}}\times\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}}\to\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}}$（作用），$\bar{\sigma}=\sigma\otimes_{\mathcal{O}}k$」という条件で定義する。$\Delta$がいつliftableであるかを考えよう．

Lemma 5. (1) $\rho: \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}})\longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathbb{A}^2_k)$を自然なreduction homomorphismとすれば，ρは全射である．

(2) Δを多項式環$k[x_1,x_2]$のk-derivationで$\Delta^p=\Delta$となるものとする。もしΔがliftableならば，$\forall\theta\in\mathrm{Aut}_k(k[x_1,x_2])$について$\theta\cdot\Delta\cdot\theta^{-1}$もliftableである．

(3) Δを多項式環$B=k[x_1,\dots,x_n]$のk-derivationで$\Delta^p=\Delta$となるものとする．もしΔが線形であれば，Δはliftableである。とくに，$n=2$のときは，Δが線形化可能ならば，Δはliftableである．

予想．Δを多項式環$k[x_1,x_2]$上のk-derivationで$\Delta^p=\Delta$となるものとする．このとき，Δがliftableになるための必要十分条件はΔが線形化可能であることである．

以下，2変数多項式環 $B=k[x,y]$ の場合を考察する。Δ を B 上の k-derivation で $\Delta^p=\Delta$ となるものとする。このとき，$\Delta = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ $(f, g\in B)$ と表されて，Δ に付随する $\mu_{p,k}$ の作用 $\bar{\sigma}:\mu_{p,k}\times A_k^2 \to A_k^2$ による fixed point locus $\bar{F}$ は $\{f=g=0\}$ と定義される。もし $\bar{F}\neq\phi$ で $|\bar{F}|<\infty$ ならば，Δ は孤立零点をもつという。$B_0=\{b\in B; \Delta(b)=0\}$, $\bar{Y}=\operatorname{Spec} B_0$, $\bar{X}=\operatorname{Spec} B$ とおき，$\pi:\bar{X}\to\bar{Y}$ を自然な inclusion $B_0\hookrightarrow B$ から定まる全射な有限射とすれば，$\bar{Y}$ は正規スキームであるが，$\bar{Y}$ の特異点は次のように特徴づけられる。$P\in\bar{X}$, $Q=\pi(P)$ について，Q が特異点 $\Longleftrightarrow$ $P\in\bar{F}$。$P\in\bar{F}$ で Δ が孤立零点をもつならば，点 P における $\bar{X}$ の局所座標 ξ,η が存在して，$\Delta=\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$ と表わされる。よって，P の局所環 $(\mathcal{O}_P, m_P)$ に関して，$m_P=(f,g)\mathcal{O}_P$ となることがわかる。すなわち，曲線 $(f=0)$ と $(g=0)$ は点 P で正規交叉している。

Theorem 6. $\mathcal{O}$ を p-good DVR, $\sigma:\mu_{p,\mathcal{O}}\times A_{\mathcal{O}}^2\to A_{\mathcal{O}}^2$ を $\mu_{p,\mathcal{O}}$ の作用とする。$\bar{\sigma}=\sigma\otimes_{\mathcal{O}} k$ に対応する $B=k[x,y]=\Gamma(A_k^2,\mathcal{O})$ の k-derivation を Δ とする。Δ が孤立零点をもてば，$\bar{\sigma}$ の fixed point locus $\bar{F}$ は唯1点から成る。

この定理は Δ が liftable であるかないかを判定するのに役立つ。

例 5. $\Delta = (x+x^p)\frac{\partial}{\partial x} + (y+y^p)\frac{\partial}{\partial y}$ とすると, Δ は $\Delta^p = \Delta$ をみたす $B = k[x,y]$ の k-derivation で, $\bar{F} = \{x+x^p = y+y^p = 0\}$ で与えられる。よって $|\bar{F}| = p^2$ となるので, Δ は liftable でない。

文献

[1] Finite group scheme actions on the affine plane, to appear in J. pure and applied Algebra.