数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 95-107

F-regular and F-rational graded rings

東海大・理（情報数理）　渡辺敬一
（Kei-ichi Watanabe）

標数 $p>0$ の環の Frobenius 写像によってイデアルの tight closure の概念が Hochster と Huneke によって定義され、この概念を用いて標数0の rational singularity に対応する F-regular, F-rational ring の概念が定義される。
本稿の目的は、

（1） Cohen-Macaulay graded ring に対しては、パラメーターイデアルの tight closure は、grading によってかなり説明がつくこと。特に F-rational ring は [GW] で定義された $a(R)$ によって説明されること。

（2） normal graded ring を $R=R(X,D)$ と $X=\mathrm{Proj}(R)$ と $D\in \mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ で表したときに R が F-regular（又は F-pure）であるための (X,D) の条件。

の二点を中心にして書いて行きたい。

なお、この稿は expository なものである事をお断りしておきたい。

§1. 用語の準備.

Rが標数$p>0$の体を含むとき, Frobenius 写像

$$F: R \to R = {}^F R \quad , \quad F(a) = a^p$$

を考える. 以下に於て, $q = p^e$ は必ずpの巾とする.

$$F^e: R \longrightarrow R = {}^e R \quad (\text{右辺を } {}^e R \text{ と書いて区別する}).$$

Rが reduced のとき F は injective だから, F^e と

$$R \hookrightarrow R^{1/q}$$

を同一視できる。また, $R^0 := R - \bigcup\{\text{min. prime of } R\}$

とおく.

(1.1) イデアル $I \subset R$ に対して, $x \in I^*$ (tight closure of I) $\Leftrightarrow$ $\exists c \in R^0, \forall q \gg 0, \ c \cdot x^q \in I^{[q]}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{〃} \ , \quad \text{〃} \ , \ c^{1/q} . x \in I . R^{1/q}$$

但し, $I = (a_1, \dots, a_n)$ のとき, $I^{[q]} = (a_1^q, \dots, a_n^q)$.

また, R-module M と submodule $N \subset M$ に対して,

$$x \in N^* \Leftrightarrow \exists c \in R^0, \forall q \gg 0 \ (\forall e \gg 0) \ c . F^e(x) \in \mathrm{Im}(N \otimes_R {}^e R)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{〃} \ , \quad \text{〃} \ , \ x \otimes c^{1/q} \in \mathrm{Im}(N \otimes_R R^{1/q})$$

但し, $F^e(x) := x \otimes 1 \in F^e(M) := M \otimes_R {}^e R$. $x^q := F^e(x)$,

$\mathrm{Im}(N \otimes_R {}^e R \longrightarrow M \otimes_R {}^e R) =: N^{[q]}$ とおくと, 上の条件は,

$c \cdot x^q \in N^{[q]}$ となりイデアルの場合と対応する.

$x \in I^* \Leftrightarrow R/I$ に於て, $x \bmod I \in (0)^*$.

$(R, \mathfrak{m})$ が local ring のとき, $M = E := E_R(R/\mathfrak{m})$ の場合と, $M = H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ ($d = \dim R$) の場合が以下に於て特に重要である。

(1.2) 定義. (i) R が weakly$^{(*)}$ F-regular $\Leftrightarrow$ $^\forall I \subset R, I^* = I$.

(2) $(R, \mathfrak{m})$ が F-rational $\Leftrightarrow$ $^\forall$parameter ideal $I = (x_1, \ldots, x_d)$,

$$I = I^*.$$

($^{(*)}$ "weakly" は以下常に省略する事にする.)

[HH] §4, 5 の R が F-regular $\Rightarrow$ R は normal, Cohen-Macaulay の証明は "F-regular" を "F-rational" におきかえて成立する事は容易にわかる。

以下 "R が Cohen-Macaulay" は仮定しよう.

(1.3) $(R, \mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay, $\dim R = d$ のとき, $I = (x_1, \ldots, x_d)$ を R の parameter ideal とすると,

$$H^d_{\mathfrak{m}}(R) = \varinjlim_q R/I^{[q]} = \bigcup_q R/I^{[q]} \quad \text{である.}$$

但し, $q' > q$ に対し,

$$R/I^{[q]} \longrightarrow R/I^{[q']} \quad \text{は} \quad y \bmod I^{[q]} \mapsto (x_1 \cdots x_d)^{q'-q} \cdot y \bmod I^{[q']}$$

で同一視される。このとき,

$$(0)^*_{R/I^{[q]}} = (0)^*_{H^d_{\mathfrak{m}}(R)} \cap R/I^{[q]}$$

は容易にわかる。特に, 上記の $R/I^{[q]} \longrightarrow R/I^{[q']}$ は,

$(0 : \mathfrak{m})_{R/I^{[q]}} \xrightarrow{\sim} (0 : \mathfrak{m})_{R/I^{[q']}}$ をひき起すから,

R が F-rational $\Leftrightarrow$ $(0)^* = (0)$ in $H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ $\Leftrightarrow$ $\exists I = (x_1, \ldots, x_d)$,

$I^* = I$. ([F1], [FW] 参照).

(1.4) $c \in R$ が <u>test element</u> $\Leftrightarrow$ $\forall I \subset R$, $\forall x \in I^*$,

$c.x^q \in I^{[q]}$ $(q \gg 0)$.

つまり，test element とはすべての ideal の tight closure の test を一斉に引き受けるという訳である．([HH, §6]参照)

test element で生成される ideal を <u>test ideal</u> という．

test ideal は次の意味で，"non-F-regular locus を定義するイデアル" と云える．

(1.5) $F: R \to {}^F R$ が <u>finite</u>, R が <u>reduced</u> のとき，

R が <u>strongly F-regular</u> $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \forall c \in R^o,\ \exists q,\ R \to R^{1/q}, \\ 1 \mapsto c^{1/q} \text{ が } R\text{-mod. として split.} \end{array}\right.$

上の状態のとき，$c^{1/q}.I.R^{1/q} \cap R = I$ だから，任意の $c \in R^o$ が test element である．また，R が上記の大前提をみたし Gorenstein のとき，

R が F-rational $\Leftrightarrow$ R が F-regular $\Leftrightarrow$ R が strongly F-regular

が成立する．"strongly F-regular" という性質は open property や localization で保たれるなど，ある意味では F-regular より現在の所扱いやすい性質である，([HH2] 参照).

次の結果は test element に関して重要と思う．

(1.6) [HH2] $c \in R^o$, R_c が strongly F-regular ならば，c のある巾が test element である．

これの系として，(regular $\Rightarrow$ strongly F-regular だから)，

(1.7) $(R, \mathfrak{m})$ が (1.5) の大前提をみたし，$0 \neq {}^\forall x \in R$，$R_x$ が strongly F-regular ならば（特に $\mathrm{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}$ が regular ならば），R の test ideal は $\mathfrak{m}$-primary である．

§2. grading と tight closure.

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が Cohen-Macaulay graded ring とする．また，$R_0 = k$ は体とし，$\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ とおく．

$H^d_\mathfrak{m}(R)$ $(d = \dim R)$ の中で $(0)^*$ を求めたい．(1.3) により，これは homogeneous parameter ideal $I = (x_1, \ldots, x_d)$ に対し，I^* を求める事と対応する．

$x_i \in R_{n_i}$ のとき，$N = \sum_{i=1}^d n_i$ とおくと，graded module としては，

$$H^d_\mathfrak{m}(R) = \varinjlim \left(R/I^{[q]}\right)(q N)$$

であり，Frobenius 写像 $F^e : (R/I^{[q']})(q'N) \to (R/I^{[qq']})(qq'N)$ $(q = p^e)$ は $y \bmod I^{[q']} \longrightarrow y^q \bmod I^{[qq']}$ で与えられる。

$y \in R_n$ のとき，$y \bmod I^{[q']}$ の $H^d_\mathfrak{m}(R)$ での像の degree は $n - q'N$，$y^q \bmod I^{[qq']} \in (H^d_\mathfrak{m}(R))_{q(n-q'N)}$ となる．

$H^d_\mathfrak{m}(R)$ は Artinian R-module だから，$[H^d_\mathfrak{m}(R)]_n = 0$ $(n \gg 0)$ であり，従って，$\eta \in [H^d_\mathfrak{m}(R)]_n$ をとるとき，

$n > 0 \quad \Rightarrow \quad F^e(\eta) = 0 \quad (e \gg 0)$，

$n=0$ のとき, $\forall x \in R_m$, $m > a(R) = \max\{n \mid (H_m^d(R))_n \neq 0\}$.

$$x.\ F^e(\eta) = 0 \qquad (\forall e \geq 0).$$

従って,

$$(0)^*_{H_m^d(R)} \supset \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^d(R)]_n \qquad (2.1)$$

は自明に成立する. 問題は $n<0$ のときである。

定義 ([F1]). (R, m) が F-injective $\Leftrightarrow$ $\forall i \geq 0$, $F: H_m^i(R) \to H_m^i(R)$ が injective.

しばらく Frobenius 写像とつき合うと, 固有の標数 $p>0$ では, この概念が本質的で最も難しいと思えてくるが, R が graded ring のとき, 上記の理由から,

R が F-injective $\Rightarrow$ $a(R) \leq 0$

である. しかし, $(0)^* \subset H_m^d(R)$ を確定するという観点からは, 次の概念が有効と思われる.

定義 (2.2). R が F-injective in negative degree $\Leftrightarrow$ $\forall \eta \neq 0 \in [H_m^d(R)]_n$, $n<0$, $F(\eta) \neq 0$.

この概念を用いると, test ideal が m-primary のとき, $(0)^* \subset H_m^d(R)$ を確定できる.

(2.3) R が F-injective in negative degree, かつ test ideal が m-primary $\Rightarrow$ $(0)^*_{H_m^d(R)} = \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^d(R)]_n$.

(証明) test ideal が m-primary より, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in R_n$ は test element. 一方, $H_m^d(R)$ の socle ($[0:m]_{H_m^d(R)}$)

は有限生成だから，$\exists n_1$, $[0:\mathfrak{m}]_{H^d_\mathfrak{m}(R)} \subset \bigoplus_{n\geq n_1}(H^d_\mathfrak{m}(R))_n$.

任意の $\eta\neq 0\in H^d_\mathfrak{m}(R)$ に対し，$\exists x\in R$, $0\neq x\eta\in[0:\mathfrak{m}]$. さて，

$\eta\neq 0 \in H^d_\mathfrak{m}(R)_n$, $n<0$ とする. $q\gg 0$ を $qn+n_0\ll n_1$

にとると，$\exists\, 0\neq x\in R_m$, $m\geq n_0$, $x\cdot F^e(\eta)\in[0:\mathfrak{m}]$, $x\cdot F^e(\eta)\neq 0$.

一方，x は test element だから，$\eta\notin(0)^*_{H^d_\mathfrak{m}(R)}$.

(2.3) で "test ideal が $\mathfrak{m}$-primary" は本質的な仮定である。

<u>例</u> (2.4). $R=k[X,Y,Z,T]/(X^3+Y^3+Z^3)$ とおく.

($X,Y,Z,T\in R_1$ とする.) このとき，R が F-injective $\Leftrightarrow p\equiv 1$ (mod 3) である. $I=(Y,Z,T)$ とおく，$\eta=X^2 \bmod I$ とおくと，$\eta\in(R/I)(3)$ の degree は -1. $\underbrace{\forall e}_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)\ \text{のとき}}$, $F^e(\eta)\neq 0$ だが，$(X,Y,Z)\cdot F^e(\eta)=0$ $(\forall e\geq 0)$, $\eta\in(0)^*_{H^3_\mathfrak{m}(R)}$. このとき，$R/I^{[q]}\cong k[X,Y,Z,T]/(X^3+Y^3+Z^3, Y^q, Z^q, T^q)$ の socle の生成元は $X^2(YZT)^{q-1}$ だから，$0\neq T^{q-1}F^e(\eta)\in[0:\mathfrak{m}]$.

ある特定の p に対し，R が F-injective in negative degree かどうかを判定するのは結構面倒な作業のようである.

<u>例</u> (2.5).(i) $R=k[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^7)$ $(X\in R_{21}, Y\in R_{14}, Z\in R_6)$.

このとき $a(R)=42-(21+14+6)=1>0$ だから R は F-inj. でない. 一方，R が F-injective in negative degree $\Leftrightarrow p\geq 7$.

(ii) $R=k[\overset{35}{X},\overset{21}{Y},\overset{15}{Z}]/(X^3+Y^5+Z^7)$ のとき，R が F-injective in negative degree $\Leftrightarrow p\geq 23$ 又は $p=11, 17$.

このように，"F-injective in negative degree" はかなり面倒な性質だが，上の例のように「標数0」で定義された「良い」（例えば，isolated singularity）ring に対しては $p \gg 0$ で常に成立する事が予想される。実際に証明されているのは，2次元の場合のみだが。

<u>定理</u>（2.6）（R. Fedder）R が標数0の体上定義された<u>2次元</u> normal graded ring とする。このとき，$p \gg 0$ に対し，R の標数 p への reduction は F-injective in negative degree.

従って，特に R が rational singularity（$a(R) < 0$ と同値）のとき，$p \gg 0$ に対して，R の標数 p への reduction は F-rational.

証明は R の derivation module $\mathrm{Der}_k(R)$ を使って述べる事ができる。実際に，どの位大きな p に対して，F-inj. in neg. deg. かも $\mathrm{Der}_k(R)$ の言葉で与える事ができる。

高次元の場合，更には graded でない一般の場合に対し，"R が rational singularity $\Longleftrightarrow$ $p \gg 0$ に対して，R の標数 p への reduction が F-rational" と期待されるが，2次元ですら一般には open であるように思われる。

R が graded complete intersection の場合は，[F2] に扱われている。

§3. normal graded rings の F-regularity の判定.

R が Gorenstein のとき, F-rational $\Leftrightarrow$ F-regular だが, そうでない時には F-regular と F-rational とは大分様相が異なる.

一方, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が normal graded ring, $R_0 = k$ が体のとき, R は $X = \mathrm{Proj}(R)$ と $\exists D \in \mathrm{Div}(X, \mathbb{Q}) := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を用いて,

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n \quad (\text{右辺を } R(X, D) \text{ と表わす.})$$

と書ける ([D], [W1]). $D = \sum_V \frac{p_V}{q_V} \cdot V$ ($q_V, p_V \in \mathbb{Z}$, q_V と p_V は互いに素, $q_V > 0$) のとき, "D の分数部分" を,

$$D' = \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V$$

で表す. このとき, $d = \dim R$ とおいて,

$$E := E_R(R/m) \cong H^d_m(K_R) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X((K_X + D') + nD)) \cdot T^n$$

である事から, $0 \neq \xi \in H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + D')) = H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \cong k$ をとると,

$$R = R(X, D) \text{ が F-regular} \Leftrightarrow \bigcap_{e > 0} \mathrm{Ann}_R(F^e(\xi)) = (0)$$

$$\Leftrightarrow 0 \neq {}^\forall f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)),\ \exists e,\ f \cdot F^e(\xi) \neq 0.$$

([W2] 参照) がえるが, 更に, 次が成立する.

<u>定理</u> (3.1). $R = R(X, D)$ のとき, R が F-regular か否かは, X (又は K_X) と D の小数部分 D' のみにより, 個々の D によ

らない。

即ち，$D_1, D_2 \in Div(X, \mathbb{Q})$ のとき，（$\exists N$, ND_1, ND_2 が ample Cartier divisor という条件は必要だが）$(D_1)' = (D_2)'$ ならば，$R(X, D_1)$ が F-regular $\Longleftrightarrow$ $R(X, D_2)$ が F-regular.

D' は D に integral divisor を加えても，分母を変えずに分子をとりかえても変らないので（この点は "F-rational" は非常にデリケートである。）F-regular ring の特徴づけに大変有効と思われる。

（証明）$F^e(\xi) \in H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X + D')))$ である。今 $R(X, D_1)$ が F-regular, $(D_1)' = (D_2)'$ として，$R(X, D_2)$ も F-regular を示そう.

1°. $R(X, D_1)$ が F-pure $\Longleftrightarrow$ $R(X, D_2)$ が F-pure

($\Longleftrightarrow$ $F(\xi) \neq 0$), F-regular $\Rightarrow$ F-pure だから，$R(X, D_i)$ $(i=1,2)$ は F-pure として良い．従って，F の $E_R(R/m)$ への作用は injective として良い．($R = R(X, D_i)$, $i=1,2$).

2°. F が injective より，$x \cdot F^e(\xi) \neq 0 \Rightarrow x \cdot F^{e+1}(\xi) \neq 0$ で，$\mathrm{Ann}_R(F^e(\xi)) \supset \mathrm{Ann}_R(F^{e+1}(\xi))$ である。$\bigcap_{e>0} \mathrm{Ann}_R(F^e(\xi)) = (0)$

$\Longleftrightarrow$ ある degree N を fix するとき，$\exists e$,

$$\cdot F^e(\xi) : H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_2)) \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(ND_2 + q(K_X + D')))$$

が <u>injective</u>. ($R = R(X, D_2)$).

3°. ND_1 は ample Cartier div. ($\exists N$) より，ND_2 に対し，

$\exists N'$, $H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 - ND_2)) \neq 0$.

4°. $0 \neq \varphi \in H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 - ND_2))$ をとる。$e \gg 0$ を、

$\cdot F^e(\xi) : H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1)) \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 + q(K_X + D')))$

が injective になるようにとると、次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_2)) & \xrightarrow[\text{(injective)}]{\cdot\varphi} & H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1)) \\ \downarrow \cdot F^e(\xi) & & \downarrow \cdot F^e(\xi) \\ H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(ND_2 + q(K_X + D'))) & \xrightarrow{\cdot\varphi} & H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 + q(K_X + D'))) \end{array}$$

より左のタテの写像が injective である事がわかる。ゆえに、$R(X, D_2)$ も F-regular である事がわかった。

§4. いくつかのコメント.

・ F-rational と F-regular とは R が Gorenstein のとき同値で、$\dim R = 2$ のとき、R が F-rational なら divisor class group の中で、R の canonical class $cl(K_R)$ が有限位数をもつので、R は有限な canonical cover をもつ。えいかえると、$R \overset{\exists}{\hookrightarrow} S$, S は Gorenstein, R は S の (R-module としての) 直和因子となる。このとき、"R が F-regular" は R の性質というよりむしろ S の性質と思われる。($cl(K_R)$ の位数が p と互いに素なとき、R が F-regular $\Leftrightarrow$ S が F-regular. [W2] 参照)

$\dim R \geqq 3$ のときは，R が F-regular であっても $cl(K_R)$ は無限位数を持ち得るのだが，このときも "canonical cover" がとれないだろうか？ 候補としては，$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K_R^{(i)}$ が考えられるが，この環は Noether 環になるだろうか？ こういう問題は代数幾何の極小モデルの理論と関って来そうである。(代数幾何の局所理論は可換環論というのは全く当り前の事だが。)

・ $R = \bigoplus_{n \geqq 0} R_n$ が normal (Noetherian) graded ring， $\dim R = d$， $R_0 = k$ は標数0の体のとき，もし $\mathrm{Spec}(R) - \{m\}$ が rational singularity なら，$[H_m^i(R)]_n = 0$ $(i < d,\ n < 0)$ が成立する (但し，Grauert-Riemenschneider van. Thm. を使う.)． 標数 $p > 0$ で小平 vanishing Thm. の反例がある以上，標数 $p > 0$ で一般には不成立だが，どういう条件をつければ成立するだろうか？ (上記の命題は小平 van. Thm. の環論的 statement と云えるのだが).

REFERENCES

[D] M. Demazure, Anneaux gradues normaux, Introduction a la theorie des singularites, vol.II, 35-86 (ed. Le Dung Trang), Hermann, Paris, 1988.

[F1] R. Fedder, F-purity and rational singularities, Trans. A.M.S. 278 (1983), 461-480.

[F2] R. Fedder, F-purity and rational singularity in graded complete intersection rings, Trans. A.M.S. 301 (1987), 47-62.

[FW] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity interms of F-putity, "Commutative Algebra", Proc. Microprogram Berkeley, 1987, 227-245, Springer, 1989.

[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[HH] M. Hochster and C. Huneke, Tight Closure, Invariant Theory, and the Briancon-Skoda Theorem, I, to appear in J. Amer. Math. Soc.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, to appear in Mem. Soc. Math. France.

[W1] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.

[W2] 渡辺敬一, Frobenius 写像の作用について（第10回可換環論 symposium，報告集).