

Graded CM modules の分類理論

吉野雄二 (名大・理)  
 (Yuji Yoshino)

以下では、 $R = \sum_{n \geq 0} R_n$  は次数付き CM 整閉整域であるとする。また、 $R_0 = k$  は代数閉体であると仮定する。更に、本質的でない仮定として、 $\{n | R_n \neq 0\}$  の最大公約数は 1 であるとしておく。 $K$  で  $R$  の次数付きの商体とする。上の仮定によって、 $K$  には次数 1 の斉次な元が存在するので、それを  $t$  と書くことにする。 $K_0$  で  $K$  の次数が 0 の部分を表すことにすると、良く知られているように、

$$K = K_0[t, t^{-1}] \quad (\text{Laurent polynomial ring})$$

となる。

$X = \text{Proj}(R)$  と置くと、 $K_0$  は  $X$  の関数体  $k(X)$  に等しいことに注意する。Demazure によると、このときには、 $X$  上に有理数係数の Weil 因子 (ample  $\mathbb{Q}$ -Cartier)  $D$  が存在して、最初に与えた次数付き環  $R$  は次のように書くことが出来る。

補題 1.

$$R = R(X, D) = \sum_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))t^n$$

但し、一般的に因子  $D$  が  $D = \sum_i (q_i/p_i) D_i$  ( $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ ) と書けているときには、 $[D] = \sum [q_i/p_i] D_i$  (但し、 $r \in \mathbb{Q}$  のとき、 $[r] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq r\}$ ) と表し、 $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X([D])$  と定義する。また、以下では、各点の stalk として  $K_0$  をもつ定数層を  $\mathcal{K}$  と書いて、上記の  $\mathcal{O}_X(D)$  はすべて  $\mathcal{K}$  の部分層として見ておく。

本稿の目的は  $R$  上の次数付き CM 加群の圏を  $(X, D)$  を使って記述することにある。以下ではいつでも  $(X, D)$  は上のようにして与えられたものであるとしておく。すなわち、 $X = \text{Proj}(R)$  で、 $D$  は  $X$  上の ample  $\mathbb{Q}$ -Cartier  $\mathbb{Q}$ -Weil 因子である。さらに、この  $D$  を次の様を書くことに約束しておく。

$$(1.1) \quad D = \sum_x (q_x/p_x)[x]$$

但し、 $x$  は  $X$  上の余次元 1 の点をすべて動く。ここで、もちろん殆ど全ての  $x$  に対しては  $q_x = 0$  である。さらに約束として、 $p_x$  は常に正の整数とし、もし  $q_x$  が 0 でないときには、 $p_x$  と  $q_x$  は互いに素であり、 $q_x$  が 0 のときには  $p_x$  は常に 1 であると仮定しておく。また、 $r_x = q_x/p_x$  と書く。

よく知られたことであるが一応次の事に注意しておこう。

補題2.  $x$  を  $X$  の余次元が1の点であるとする。この  $x$  に対応する  $R$  の高さ1の斉次な素イデアルを  $\mathfrak{p}$  と書くことにする。 $R$  の  $\mathfrak{p}$  における斉次局所化  $R_{(\mathfrak{p})}$  は次のように定義される。

$$R_{(\mathfrak{p})} = \{b/a \mid b \in R, a \in R - \mathfrak{p}, a \text{ is homogeneous}\}$$

局所環  $\mathcal{O}_{X,x}$  の極大イデアルを  $\mathfrak{m}_x$  とするとき、次の等式が成立する。

$$R_{(\mathfrak{p})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{m}_x^{-[nr_x]} t^n$$

余次元が1とは限らない点については次の事が成立する。

補題3.  $y$  が  $X$  の既約な点のとき、 $\mathfrak{q}$  を  $\text{Proj}(R)$  の対応する斉次素イデアルとする。 $\Omega(y)$  で  $y$  の generalization となっている  $X$  の余次元1の点の集合を表すことにする。このとき、

$$R_{(\mathfrak{q})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bigcap_{x \in \Omega(y)} \mathfrak{m}_x^{-[nr_x]}) t^n$$

さて、 $\mathcal{K}[t, t^{-1}]$  の部分  $\mathcal{O}_X$ -代数  $A$  を次のように定義する。

定義4.

$$A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD) t^n \subset \mathcal{K}[t, t^{-1}]$$

( $[nD + mD] \geq [nD] + [mD]$  であるからこれは環になる。)

補題3の系として次を得る。

系5. 補題3の記号のもとで、 $\mathcal{A}_y = R_{(\mathfrak{q})}$  である。特に、 $R_{(\mathfrak{q})}$  が非特異ならば、等式  $gl.dim(\mathcal{A}_y) = codim(y, X)$  が成立する。

注意6. 一般に  $R$  上の次数付き加群  $M$  に対応する  $X$  上の quasi-coherent sheaf を  $\widetilde{M}$  と書くことにする。このとき、補題3によって次の事が成立することが分かる。

$$\widetilde{R(n)} = \mathcal{O}_X(nD) t^n$$

定義7.

(7.1)  $R$  上の次数付き加群とそれらの間の次数が0の斉次な準同型からなる圏を  $Gr(R)$  と書く。また、同様に  $Gr(A)$  で  $A$  上の斉次な quasi-coherent modules とそれらの間の次数が0の斉次  $A$  準同型写像からなる圏を表すことにする。

(7.2) 関手  $\Delta: Gr(R) \rightarrow Gr(A)$  を次のように定義する。

$$(*) \quad \Delta(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{M(n)}$$

この  $\Delta$  が well-defined であることなどは容易に確かめられる。

補題 8.

$$(8.1) \quad \Delta(R) = \mathcal{A}$$

(8.2)  $\Delta$  は完全関手である。

定義 9. 関手  $\Gamma : Gr(\mathcal{A}) \rightarrow Gr(R)$  を次のように定義する。  $\mathcal{F} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$  にたいして、

$$(**) \quad \Gamma(\mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{F}_n)$$

次の事に注意しておく。

補題 10.  $\Gamma$  は左完全関手である。

定義 11. 勝手な自然数  $n$  にたいして、  $Gr(R)$  の充満部分圏でその対象が斉次な  $n$ -th syzygy 全体から成るものを  $gr^n(R)$  と書くことにする。但し、  $R$ -加群  $M$  が  $n$ -th syzygy であるとは、  $R(a)$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) のかたちの加群の有限個の直和であるような加群  $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$  とそれらの間の次数が 0 の準同型写像  $\phi_i$  があって、次のような完全列が存在することである。

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

まったく同様にして、  $gr^n(\mathcal{A})$  と書いて、  $Gr(\mathcal{A})$  の充満部分圏でその対象が斉次な  $n$ -th syzygy 全体から成るものを表す事にする。但し、  $\mathcal{A}$ -加群  $\mathcal{F}$  が  $n$ -th syzygy であるとは、  $\mathcal{A}(a)$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) のかたちの加群の有限個の直和であるような加群  $\{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}\}$  とそれらの間の次数が 0 の準同型写像  $\psi_i$  があって、次のような完全列が存在することである。

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \mathcal{G}_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{G}_0$$

次の事は  $\Delta$  の完全性と  $\Gamma$  の左完全性から容易に出る。

補題 12.

(12.1) 任意の自然数  $n$  にたいして、  $\Delta$  はつぎのような関手を導く。

$$\Delta_n : gr^n(R) \longrightarrow gr^n(\mathcal{A})$$

(12.2)  $\Gamma$  は関手  $\Gamma_2 : gr^2(R) \longrightarrow gr^2(\mathcal{A})$  を導く。

重要なことは次の命題が成立することである。

命題 13.  $n$  が 2 以上の整数の時、  $\Delta_n : gr^n(R) \longrightarrow gr^n(\mathcal{A})$  は圏同値を与える。

証明: まず、命題を  $n = 2$  のときに示す。このときには、  $\Delta_2$  と  $\Gamma_2$  が互いに逆になっていることを証明する。最初に、次の事に注意する: 任意の整数  $a$  と  $b$  に対して、

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{Gr(\mathcal{A})}(\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(b)) &= H^0(\mathcal{A}_{b-a}) = H^0(\mathcal{O}_X((b-a)D))t^{b-a} \\ &= R_{b-a} = \text{Hom}_{Gr(R)}(R(a), R(b)) \end{aligned}$$

任意の  $\mathcal{F} \in \text{gr}^2(\mathcal{A})$  は定義によって、次のような表示を持つ。

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \sum_i \mathcal{A}(a_i) \xrightarrow{(f_{ij})} \sum_j \mathcal{A}(b_j)$$

ここで、上で見たことによって  $f_{ij} \in R_{(b_j - a_i)}$  である。この完全列に左完全関手  $\Gamma$  を施して、次の完全列を得る。

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \sum_i R(a_i) \xrightarrow{(f_{ij})} \sum_j R(b_j)$$

これに  $\Delta$  を施し、次もまた完全である。

$$0 \longrightarrow \Delta(\Gamma(\mathcal{F})) \longrightarrow \sum_i \mathcal{A}(a_i) \xrightarrow{(f_{ij})} \sum_j \mathcal{A}(b_j)$$

結局、 $\mathcal{F} \simeq \Delta(\Gamma(\mathcal{F}))$  が得られた。まったく同様にして、 $M \in \text{gr}^2(R)$  に対して、 $M \simeq \Gamma(\Delta(M))$  も得られる。これによって、 $\Delta_2$  は対象の同型類の集合において全単射を与えることが分かる。あと  $\Delta_2$  が fully faithfull であることを証明すればよい。すなわち、 $M, N \in \text{gr}^2(R)$  に対して、 $\Delta_2$  から導かれる次の写像：

$$\text{Hom}_{\text{gr}^2(R)}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{gr}^2(\mathcal{A})}(\Delta(M), \Delta(N))$$

が全単射であることを証明すればよい。しかし、これは上記とまったく同じ議論で証明できるのでここでは省略する。実際、 $\Gamma_2$  から導かれる写像が逆写像になっている。従って、 $\Gamma_2 \cdot \Delta_2 \simeq 1_{\text{gr}^2(R)}$ 、 $\Delta_2 \cdot \Gamma_2 \simeq 1_{\text{gr}^2(\mathcal{A})}$  である。

さて、 $n > 2$  の場合を考える。 $\Gamma_2$  は上で見たように完全関手なので、 $\Gamma_2$  の  $\text{gr}^n(\mathcal{A})$  への制限もまた完全関手であることに注意する。従って、 $\Gamma_2$  は  $\Gamma_n : \text{gr}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \text{gr}^n(R)$  を導くことが分かる。 $\Gamma_2$  と  $\Delta_2$  は互いに逆であったから、 $\Gamma_n$  と  $\Delta_n$  についてもそうである。■

注意.  $n \leq 1$  のときには、必ずしも  $\Delta_n : \text{gr}^n(R) \rightarrow \text{gr}^n(\mathcal{A})$  は圏同値ではない。

記号14. 以下では、 $l (\geq 1)$  を  $lD$  が integral Cartier divisor になるように取って固定しておく。更に、 $E = lD$  と書いておく。

注意15.  $\mathcal{A}$  の中には  $\mathcal{O}_X(-E)t^{-l}$  と  $\mathcal{O}_X(E)t^l$  が現れることに注意する。特に、 $\text{gr}^1(\mathcal{A})$  の対象  $\mathcal{F} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$  に対して、

$$\mathcal{F}_{n+l} \simeq \mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(E)$$

となることに気を付けよう。

定義16.

(16.1)  $\mathcal{K}$  上の  $l$  次行列環  $M_l(\mathcal{K})$  における  $\mathcal{O}_X$ -order  $\Lambda$  を次のように定義する。

$$\Lambda = (\mathcal{O}_X((j-i)D))_{1 \leq i, j \leq n} \subset M_l(\mathcal{K})$$

更に、 $\text{mod}(\Lambda)$  で coherent 右  $\Lambda$ -加群と  $\Lambda$ -準同型写像からなる圏を表すことにする。

(16.2) 関手  $\Phi : \text{gr}^1(\mathcal{A}) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  を、 $\mathcal{F} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$  に対して、

$$\Phi(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{l-1}) \subset \mathcal{K}^l$$

と定義する。 $\mathcal{F}$  が次数付き  $\mathcal{A}$ -加群であることから、これが関手として well-defined であることは容易に分かる。

(16.3) 関手  $\Psi: \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Gr}(\mathcal{A})$  を次のように定義する。任意の  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  と  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $\mathcal{O}_X$ -加群  $\mathcal{F}_n$  を

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{O}_X(aE) \otimes_{\mathcal{O}_X} M e_b$$

(但し、 $n = al + b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq b < l$  で、 $e_b$  は  $b+1$  行  $b+1$  列成分のみが1で他は全部0というべき等行列を表す) と置き、

$$\Psi(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n t^n$$

と定義する。この時、各整数  $m$  について、自然な写像:

$$\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mD) \rightarrow \mathcal{F}_{n+m}$$

があって、 $\Psi(M)$  は次数付き  $\mathcal{A}$ -加群になることが分かる。

(16.4) 1以上の整数  $n$  について、右  $\Lambda$ -加群  $M$  が  $n$ -th syzygy であるとは、次のような  $\Lambda$ -加群の完全列が存在するときをいうことにする。

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0$$

但し、各  $P_i$  は  $\mathcal{O}_X(-aE) \otimes_{\mathcal{O}_X} e_b \Lambda$  ( $0 \leq b < l$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ) という形の加群の有限個の直和である。更に、 $\text{mod}^n(\Lambda)$  で、 $n$ -th syzygies のすべてからなる  $\text{mod}(\Lambda)$  の充満部分圏を表す。

次の事は上記の定義により殆ど明かである。

補題17.

(17.1)  $\Phi$  は完全関手で、 $\Phi(\mathcal{A}(-n)) = \mathcal{O}_X(-aE) \otimes_{\mathcal{O}_X} e_b \Lambda$  が成立する。但し、 $n = al + b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq b < l$  である。

(17.1)  $\Psi$  は完全関手で、

$$\Psi(\mathcal{O}_X(-aE) \otimes_{\mathcal{O}_X} e_b \Lambda) = \mathcal{A}(-(al + b)) \quad (a \in \mathbb{Z}, 0 \leq b < l)$$

が成立する。

系18. 1以上の整数  $n$  について、 $\Phi$  と  $\Psi$  はそれぞれ次のような関手を導く:

$$\begin{aligned} gr^n(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{mod}^n(\Lambda) \\ \text{mod}^n(\Lambda) &\rightarrow gr^n(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

実際はこれらの関手は圏の同値を与えることが分かる。

命題19. 1以上の整数  $n$  に対して、 $\Phi, \Psi$  は圏の同値:

$$gr^n(\mathcal{A}) \simeq mod^n(\Lambda)$$

を与える。

証明:  $n = 1$  のときに証明すればよいことは明かである。  $M \in mod^1(\Lambda)$  に対して、

$$\Phi\Psi(M) = (Me_0, Me_1, \dots, Me_{l-1}) = M$$

$\mathcal{F} \in gr^1(\mathcal{A})$  に対して、

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(\mathcal{F}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n=al+b} (\mathcal{O}_X(aE) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_b)t^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n=al+b} \mathcal{F}_{al+b}t^n = \mathcal{F} \end{aligned}$$

となるから、対象同士の対応はよい。射についても同様に確かめることが出来る。■

命題13と19を併せて次のような定理を得る。

定理20.  $n$  が2以上の整数の時、 $gr^n(R)$  と  $mod^n(\Lambda)$  は圏同値である。

注意21.  $y \in X$  を  $X$  の点、 $\mathfrak{q}$  を  $y$  に対応する  $R$  の斉次素イデアルとする。補題3の記号の元で、

$$I_n = \bigcap_{x \in \Omega(y)} \mathfrak{m}_x^{-[nr_x]} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくとき、 $\Lambda$  の  $y$  における stalk は、

$$\Lambda_y = (I_{j-i})_{0 \leq i, j < l}$$

であり、また、

$$A_y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n t^n$$

となる。ここで、 $I_{-l} = \mathcal{O}_X(-E)_y = \mathcal{O}_X(E)_y^{-1} = I_l^{-1}$  であるから、 $A_y$  は  $I_l t^l, I_{-l} t^{-l}$  を含むことに注意する。そこで、関手:

$$\Phi_y : gr^1(A_y) \rightarrow mod^1(\Lambda); \quad \sum_i M_i t^i \mapsto (M_0, M_1, \dots, M_{l-1})$$

と定義することによって、命題19の証明と全く同じようにして、 $\Phi_y$  は圏同値を与えることが分かる。この事実と系5によって、次の事が証明できる。

補題22. 上の記号の元で、もし  $R_{(\mathfrak{q})}$  が非特異ならば、次の等式が成立する。

$$gl.dim(\Lambda_y) = codim(y, X)$$

特に、 $x \in X$  が  $X$  の余次元1の点であるときには、 $\Lambda_x$  はいつでも hereditary である。

記号. 以下では、 $d = \dim(X) (\geq 1)$  と書くことにする。 $\dim(R) = d + 1$  であることに注意しておく。

また、 $\text{mod}(\Lambda)$  の充満部分圏で、 $\mathcal{O}_X$ -加群としては局所自由であるような右  $\Lambda$ -加群全体を対象として持つような圏を  $\text{bdl}(\Lambda)$  と書くことにする。すなわち、 $\text{bdl}(\Lambda)$  の対象は右  $\Lambda$ -加群としての構造を持つ  $X$  上の vector bundle である。

次の事は定義より直ちに出る。

補題 23.

(23.1) もし  $R$  が孤立特異点を持つならば、 $\text{mod}^d(\Lambda) \subset \text{bdl}(\Lambda)$  である。

(23.2) 一般的には、 $\text{bdl}(\Lambda) \subset \text{mod}^2(\Lambda)$  である。

特に、次の事が分かる。

系 24.

$d = 1$ 、または、 $d = 2$  で  $R$  が孤立特異点を持つならば、

$$\text{bdl}(\Lambda) = \text{mod}^2(\Lambda) \simeq \text{gr}^2(R)$$

記号.  $R$  上の CM 加群全部からなる  $\text{Gr}(R)$  の充満部分圏を  $\text{gr}\mathcal{C}(R)$  で表す。

次の事はよく知られている。

補題 25.  $R$  が孤立特異点を持つ CM 環である場合、次の等式がある。

$$\text{gr}\mathcal{C}(R) = \text{gr}^{d+1}(R)$$

系 24 とこれをあわせて、

系 26. 補題 25 の仮定のもとで、

(26.1) もし  $d = 1$  ならば、 $\text{gr}\mathcal{C}(R) \simeq \text{bdl}(\Lambda)$  となる。

(26.1)  $d = 2$  の場合には、 $\text{gr}\mathcal{C}(R) \subset \text{bdl}(\Lambda)$  となる。

これによって、 $X$  が 1 次元の時には、 $R$  上の次数付き CM 加群の分類は  $\text{bdl}(\Lambda)$  における分類論に帰着する。

補題 22 で、 $\Lambda$  は余次元 1 の点においては hereditary であることを見たが、その分岐指数を求めることもできるので、それを注意しておこう。

命題 27.  $x \in X$  が余次元 1 の点であるとき、 $\Lambda_x$  の  $\mathcal{O}_{X,x}$ -order としての分岐指数は、 $p_x$  に等しい。(  $p_x$  については (1.1) を見よ。)

証明: 簡単のために  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \subset A = \mathcal{O}_{X,x}$ 、 $p = p_x$ 、 $q = q_x$  と書くことにする。このとき、 $\Lambda_x = \Lambda_x^0 \otimes \Lambda_x^1$  と表すことができる。但し、

$$\Lambda_x^0 = \begin{pmatrix} A & \mathfrak{m}^{-[q/p]} & \dots & \mathfrak{m}^{-[(p-1)q/p]} \\ \mathfrak{m}^{[q/p]} & A & \dots & \mathfrak{m}^{-[(p-2)q/p]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{m}^{-[(p-1)q/p]} & \dots & \dots & A \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_x^1 = \begin{pmatrix} A & m^{-q} & \cdots & m^{-lq/p} \\ m^q & A & \cdots & m^{-(l-p)q/p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^{lq/p} & \cdots & \cdots & A \end{pmatrix}$$

$\Lambda_x^1$  は行列環  $M_{l/p}(A)$  と同型であるから、 $\Lambda_x$  の分岐指数は  $\Lambda_x^0$  のそれに等しい。 $\Lambda_x^0$  もまた hereditary であるから、それは直既約な projective  $\Lambda_x^0$ -加群の同型類の個数に等しい。そこで  $\Lambda_x^0$  の orthogonal idempotents  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  を取ったときに、もし  $i \neq j$  ならば、 $e_i \Lambda_x^0$  は  $e_j \Lambda_x^0$  に同型でないことを証明すればよい。もし、 $i < j$  について、 $e_i \Lambda_x^0 \simeq e_j \Lambda_x^0$  と仮定すると、整数  $r$  ( $0 < r < q$ ) があって、 $m^r e_i \Lambda_x^0 = e_j \Lambda_x^0$  とならなくてはならない。しかし、これはつぎの補題に矛盾することが容易に確かめられる。

補題28. 既約分数  $q/p$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ) について、関数  $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  を次のように定義する。

$$\rho(n) = \#\{\nu \in \mathbb{N} \mid [\nu r] = n\}$$

このとき、 $\rho$  の (絶対値が最小の) 周期は  $q$  に等しい。

証明: 演習問題。■

さて、以下では常に  $X$  は1次元 (従って、 $R$  は2次元の整閉整域) であると仮定する。このときに、圏  $bdl(\Lambda)$  を解析したい。この場合には、 $\Lambda$  は各点で hereditary であることに注意しておこう (補題22)。

いま  $\Lambda$  を含む  $M_l(\mathcal{K})$  の maximal order  $\Gamma$  を一つ固定しておく。このとき、 $\Gamma$  の Brauer class は自明なので、 $\Gamma$  は  $\mathcal{O}_X$  と森田同値である。すなわち、次の圏同値がある。

$$bdl(\Gamma) \simeq bdl(\mathcal{O}_X)$$

この同値で  $X$  上の vector bundle  $\mathcal{F} \in bdl(\mathcal{O}_X)$  に対応する  $bdl(\Gamma)$  の対象を  $\mathcal{F}'$  と書くことにする。

定義29. 関手  $\phi_\Gamma: bdl(\Lambda) \rightarrow bdl(\mathcal{O}_X)$  を次のように定義する。 $bdl(\Lambda)$  の対象  $\mathcal{G}$  に対して、

$$\phi_\Gamma(\mathcal{G})' = \mathcal{G} \otimes_\Lambda \Gamma$$

$\Gamma$  は  $\Lambda$ -加群として locally projective なので、 $\mathcal{G} \otimes_\Lambda \Gamma \in bdl(\Gamma)$ 、従って、この  $\phi_\Gamma$  は well-defined であることがわかる。また、同様の理由で  $\phi_\Gamma$  は完全関手である。

$\mathcal{F} \in bdl(\mathcal{O}_X)$  に対して、 $\phi_\Gamma^{-1}(\mathcal{F})$  で、 $\phi_\Gamma(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{F}$  となる  $\mathcal{G}$  からなる  $bdl(\Lambda)$  の充満部分圏を表すことにする。

各点  $x \in X$  において、 $\Lambda_x$  が hereditary order であることから、

$$m_x \Gamma_x \subset \Lambda_x \subset \Gamma_x$$

となることが分かる。また、補題27によって、 $p_x = 1$  のときには、 $\Lambda_x = \Gamma_x$  である。(  $q_x = 0$  のときには  $p_x = 1$  と約束したことを思いだそう。) そこで、ideal sheaf  $\mathcal{J} = \mathcal{O}_X(-\sum_{p_x \neq 1} [x])$  を考えると、( $M_l(\mathcal{K})$  の中で) 次の包含関係があることが分かる。

$$\mathcal{J}\Gamma \subset \Lambda \subset \Gamma$$



今、 $\phi_\Gamma^{-1}(\mathcal{F})$  の対象  $\mathcal{G}$  をとる。定義と上の事によって、次の包含関係と等式が成立しなくてはならない。

$$(29.1) \quad \mathcal{J}\mathcal{F}' \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G} \otimes_\Lambda \Gamma = \mathcal{F}'$$

逆に (29.1) の条件を満たす  $\mathcal{G}$  はすべて  $\phi_\Gamma^{-1}(\mathcal{F})$  に属する。 $\bar{\Lambda} = \Lambda/\mathcal{J}\Gamma$  として、さらに  $\text{mod}(\bar{\Lambda}, \mathcal{F})$  で、

$$\{\bar{\Lambda} - \text{module } \bar{\mathcal{G}} \mid \bar{\mathcal{G}} \otimes_{\bar{\Lambda}} \Gamma/\mathcal{J}\Gamma \simeq \mathcal{F}'/\mathcal{J}\mathcal{F}'\}$$

を対象として持ち、射としては vector bundle  $\mathcal{F}$  の自己準同型から導かれるものの全体を取ったような圏とする。結局、次の圏同値が存在することが分かった。

$$(29.2) \quad \phi_\Gamma^{-1}(\mathcal{F}) \simeq \text{mod}(\bar{\Lambda}, \mathcal{F})$$

$\bar{\Lambda}$  は本質的に有限次元多元環であるから、次の定理が得られる。

定理 30.  $X$  上の vector bundle  $\mathcal{F}$  と (1.1) のようにして与えられた  $X$  上の因子  $D$  に対して、次の様な圏  $\text{rep}(\mathcal{F}, D)$  を考える。

$\text{rep}(\mathcal{F}, D)$  の対象は次のような vector spaces の組である。

$\{\{V_{x,i}\} \mid x \in X, 0 \leq i < p_x, \text{ 各 } V_{x,i} \text{ は } \kappa(x) \text{ 上の vector space で}$

$$V_{x,i} \subset V_{x,i-1} \ (0 < i \leq p_x), \text{ 更に } \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \kappa(x) = V_{x,0}\}$$

二つの対象  $\{V_{x,i}\}$  と  $\{V'_{x,i}\}$  についてそれらの間の射は、次の条件を満足する  $\mathcal{F}$  の自己準同型  $\varphi$  であると定義する。

$$(\varphi \otimes \kappa(x))(V_{x,i}) \subset V'_{x,i} \quad (x \in X, 0 \leq i < p_x)$$

( $\text{rep}(\mathcal{F}, D)$  は因子  $D$  の係数の分母  $p_x$  と  $\mathcal{F}$  のみによって決まり、その分子  $q_x$  にはよらないことに注意せよ。) 上記のように定義すると次のような圏同値が存在する。

$$\phi_\Gamma^{-1}(\mathcal{F}) \simeq \text{rep}(\mathcal{F}, D)$$

証明: Hereditary order の一般論と命題 27 によって、各点  $x \in X$  において、 $\bar{\Lambda}_x$  は  $\kappa(x)$  上  $p_x$  次の上半三角行列環と森田同値である。このことと、上で注意した事によって定理は明かである。■

最後に、この定理を使うと次のようなことも証明できるので注意しておく。

系 31.  $d = 1$  のとき、 $\text{gt}\mathcal{C}(R)$  が (次数のずれを除いて) 有限表現型であるための必要十分条件は、 $X = \mathbb{P}^1$  かつ  $P = \{x \mid p_x \neq 1\}$  は高々 3 点で、もし丁度 3 点ならば次の不等式が成立することである。

$$\sum_{x \in P} \frac{1}{p_x} > 1$$