数理解析研究所講究録
第 713 巻 1990 年 143-155

Symbolic Rees algebra について。

日大文理 後藤四郎
(Shiro GOTO)

1. 序

この報告の目的は，Symbolic Rees algebra の Noether 性をイデアルの analytic spread の言葉で判定しようとする P. Schenzel [10, 11, 12] の結果を，伊藤 [5] の手法によって証明することにある。

P を正則局所環所環 A 内の素イデアルとし

$$R_s(P) = \sum_{n \geqq 0} P^{(n)} t^n \quad (t \text{ は } A \text{ 上の不定元})$$

とするとき，$R_s(P)$ の Noether 性を問う問題は，R. Cowsik [1] によって提起された。Cowsik 自身は，もし $R_s(P)$ が Noether であってかつ $\dim A/P = 1$ であれば，P が set-theoretic complete intersection であることを示しているが，全く一般には $R_s(P)$ は Noether ではない (cf. P. Roberts [9])。それにもかかわらず，この問いは，D. Rees [8] の Zariski problem への反例の背景をなすものでもあり，また，P が monomial space curve の定義イデアルの場合でさへ，今もって，Symbolic Rees algebra $R_s(P)$ の Noether 性が保証されてい

ないことからみて，現在でも通用する十分に魅力的な問いであると思う。

この報告は上に述べた様に，$\mathcal{R}_s(P)$ の Noether 性を symbolic power $P^{(k)}$ の analytic spread $\ell(P^{(k)})$ の言葉で判定することを主目的とする。formulation は C. Huneke [4] によって与えられ，その後 D. Katz – L. Ratliff [6] によって改良が加えられ，P. Schenzel [11, 12] によって以下に述べる形になったと考えられるが，ここでは，伊藤の定理 [5] を使って，簡単な証明を工夫したい。

以下 A は可換な Noether 環とし I は A 内のイデアルとする。

2. 一般論からの準備

$F = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が A の filtration であるとは，① F_n は A のイデアルであって，② $F_0 = A$，③ $F_n \supset F_{n+1}$，④ $F_n F_m \subset F_{n+m}$ が成立することをいう。

A の filtration $F = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して，$\mathcal{R}(F) = \sum_{n\geqq 0} F_n t^n$，$\mathcal{R}'(F) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n t^n$（但し t は A 上の不定元）とおき，それぞれ，F の Rees 代数という。とくに $F_n = I^n$ のときは，$\mathcal{R}(F)$，$\mathcal{R}'(F)$ を

$R(I)$, $R'(I)$ と書くことにする。

Lemma (2.1) (西田) 次の条件は同値である。

① $R(F)$ は Noether である。

② $^\exists k>0$; $R(F)^{(k)} := \sum_{n\geqq 0} F_{nk}t^{nk}$ は Noether である。

証明。$R(F)^{(k)}$ は $R(F)$ の直和因子であるので，$R(F)$ が Noether なら $R(F)^{(k)}$ も Noether である。② ⇒ ① を示すため，$S=R(F)^{(k)}$ とし $L_i=\sum_{n\geqq 0} F_{nk+i}t^{nk}$ $(0\leqq i<k)$ とおく。すると L_i は S の ideal であって $R(F)=\sum_{i=0}^{k-1} L_i t^i$ となる。よって，もし S が Noether ならば，$R(F)$ は S 上 module-finite になり，従って必ず Noether である。

次の補題はよく知られている。

Lemma (2.2). F を A の filtration で $F_1\supset I$ なるものとすれば，次の条件は同値である。

① $I^{n-r}F_r=F_n$, $^\forall n\gg 0$.

② $R'(F)$ は $R'(I)$ 上 module-finite である。

③ $R(F)$ は $R(I)$ 上 module-finite である。

④ $I^{n-r}\supset F_n$, $^\forall n\gg 0$.

J を A のイデアルとし $I:\langle J\rangle = \bigcup_{i\geq 1}[I:J^i]$ とおく。filtration $F=\{I^n:\langle J\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して，$\mathcal{R}(F)$，$\mathcal{R}'(F)$ をそれぞれ，$\mathcal{R}_J(I)$，$\mathcal{R}'_J(I)$ と書くことにしよう。すると，イデアル $\mathfrak{a} := J\mathcal{R}'(I)+t^{-1}\mathcal{R}'(I)$ による環 $\mathcal{R}'(I)$ の ideal transform $T(\mathfrak{a},\mathcal{R}'(I))$ は，容易に確められるように，$\mathcal{R}'_J(I)$ と一致する：

Lemma (2.3). $\mathcal{R}'_J(I) = T(\mathfrak{a},\mathcal{R}'(I))$.

一方で，ideal transform の Noether 性については先行する研究があって，なかでも伊藤の結果 [5] が重要である。これを我々の場合に使い易い形で述べておくと，

Theorem (2.4). (伊藤 [5]). $\mathcal{R}'(I)$ の全商環を $Q(\mathcal{R}'(I))$ とするとき，次の条件は同値である。

① $\mathcal{R}'_J(I)$ は $\mathcal{R}'(I)$ 上 module-finite である。

② $\Delta := \mathrm{Ass}_{\mathcal{R}'(I)}\, Q(\mathcal{R}'(I))/\mathcal{R}'(I) \cap V(\mathfrak{a})$ とすると，すべての $P\in\Delta$ に対して，局所環 $\mathcal{R}'(I)_P$ の global transform $(\mathcal{R}'(I)_P)^g$ は $\mathcal{R}'(I)_P$ 上 module-finite である。

この (2.4) を，$(A,\mathfrak{m})$ が局所環で $J=\mathfrak{m}$ のときに適用

することにより，次が得られる。

定理(2.5). (P. Schenzel [11]). 次の条件は同値である。

① $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}(I)$ は $\mathcal{R}(I)$ 上 module-finite である。

② $\ell(I\hat{A}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}) < \dim \hat{A}/\mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,\hat{A}$.

証明. 一般性を失うことなく，$A=\hat{A}$ (complete) と仮定してよい。

①⇒② $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\,A$ に対して $\dim A/\mathfrak{p} \leqq \ell(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ であったとして矛盾を導く。さて，$\dim A/\mathfrak{p} = \ell(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ であるから，$\mathfrak{m}/\mathfrak{p} \in \bar{A}^*(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ (cf. [7]). 従って，$\exists Q \in \bar{A}^*\left(t^{-1}\mathcal{R}'\left(\frac{I+\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right)\right)$ s.t. $Q\cap A/\mathfrak{p} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. 故に $\varphi: \mathcal{R}'(I)\to\mathcal{R}'(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ を自然な射とし $\mathfrak{p}^*=\mathrm{Ker}\,\varphi$, $P=\varphi^{-1}(Q)$ とおくと，$\mathfrak{p}^*\in\mathrm{Ass}\,\mathcal{R}'(I)$ であってかつ $P\in \mathrm{Min}_{\mathcal{R}'(I)}\, \mathcal{R}'(I)/(t^{-1},\mathfrak{p}^*)$ となる。t^{-1} は $\mathcal{R}'(I)/\mathfrak{p}^*$ $(=\mathcal{R}'(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}))$ 上非零因子であるから，$P\in \mathrm{Ass}_{\mathcal{R}'(I)}\, \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I)$ となり，従って $\mathrm{depth}\, \mathcal{R}'(I)_P = 1$ である。よって，$P\in\Delta := \mathrm{Ass}_{\mathcal{R}'(I)}\, Q(\mathcal{R}'(I))/\mathcal{R}'(I) \cap V(\mathfrak{a})$. ゆえに (2.4) により $[\mathcal{R}'(I)_P]^g$ は $\mathcal{R}'(I)_P$ 上 module-finite である。従って

$$\dim \mathcal{R}'(I)_P/\mathfrak{q} \geqq 2, \quad \forall \mathfrak{q}\in \mathrm{Ass}\,\mathcal{R}'(I)_P$$

であって，とくに $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^*\mathcal{R}'(I)_P$ ととると，$\dim \mathcal{R}'(I)_P/\mathfrak{p}^*\mathcal{R}'(I)_P \geqq 2$ のはずであるが，しかしこれは $P\in\mathrm{Min}_{\mathcal{R}'(I)}\, \mathcal{R}'(I)/(t^{-1},\mathfrak{p}^*)$ に

反する。よって $\ell(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}) < \dim A/\mathfrak{p}$ でなければならない。

② ⇒ ① 上の議論を逆にたどることによって証明される。

Corollary (2.6). $R_J(I)$ が $R(I)$ 上 module-finite であるためには，次が成立することが必要かつ十分である：

もし $\mathfrak{p} \in V(I) \cap V(J)$ であれば，いかなる $Q \in \mathrm{Ass}\,\widehat{A_\mathfrak{p}}$ についても $\ell(I\widehat{A_\mathfrak{p}}+Q/Q) < \dim \widehat{A_\mathfrak{p}}/Q$ である。

証明。$R_J(I)$ は $R(I)$ 上 module-finite であると仮定せよ。すると (2.2) より $r \gg 0$ を $I^{n-r} \supset I^n : \langle J \rangle \ (\forall n \geqq r)$ にとれる。ところで，$\mathfrak{p} \in V(I) \cap V(J)$ については，

$$\begin{aligned}(IA_\mathfrak{p})^n : \langle \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \rangle &\subset (IA_\mathfrak{p})^n : \langle JA_\mathfrak{p} \rangle \\ &\subset (IA_\mathfrak{p})^{n-r}\end{aligned}$$

であるから，再び (2.2) によって，$R_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}(IA_\mathfrak{p})$ は $R(IA_\mathfrak{p})$ 上 module-finite になる。よって (2.5) に従う。

逆に (2.6) 内の条件が満たされていたとせよ。$R' = R'(I)$，$\mathfrak{a} = JR' + t^{-1}R'$ とおき $P \in \Delta := \mathrm{Ass}_{R'}\, Q(R')/R' \cap V(\mathfrak{a})$ とし $\mathfrak{p} := P \cap A$ とすると，$\mathfrak{p} \supset I + J$ であるから，(2.5) より $R'_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}(IA_\mathfrak{p})$ は $R'(IA_\mathfrak{p})$ 上 module-finite である。すなわち，ideal transform $T((\mathfrak{p}, t^{-1})R'(IA_\mathfrak{p}), R'(IA_\mathfrak{p}))$ は $R'(IA_\mathfrak{p})$ 上 module-finite である (cf. (2.3)) ので，$P \supset (\mathfrak{p}, t^{-1})R'$ であって

$\mathcal{R}'(IA_g) = \mathcal{R}'_g$ であることに注意すれば，$T(P\mathcal{R}'_g, \mathcal{R}'_g)$ が $\mathcal{R}'_g$ 上 module-finite であることがわかる。したがって $(\mathcal{R}'_P)^g = T(P\mathcal{R}'_P, \mathcal{R}'_P)$ は $\mathcal{R}'_P$ 上 module-finite になり (2.4) より $\mathcal{R}'_J(I)$ が $\mathcal{R}'(I)$ 上 module-finite であることが得られる。

3. 主結果.

以下 $S \subset A$ を $I \cap S = \phi$ であるような A 内の乗法系とし，$I^{(n)} = I^n(S^{-1}A) \cap A$ とおく。filtration $F = \{I^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して，Rees 代数 $\mathcal{R}(F)$ と $\mathcal{R}'(F)$ をそれぞれ単に $\mathcal{R}$，$\mathcal{R}'$ と書く。

Theorem (3.1). 次は同値である。

① $\mathcal{R}$ は Noether である。

② $\exists k > 0$; 任意の $P \in V(I^{(k)})$ such that $P \cap S \neq \phi$ と任意の $Q \in \operatorname{Ass} \widehat{A_P}$ とに対して不等式

$$\ell(I^{(k)}\widehat{A_P} + Q/Q) < \dim \widehat{A_P}/Q$$

が成立する。

③ $\exists k > 0$; 任意の $n \geqq 1$ に対して，$[I^{(k)}]^n = I^{(kn)}$

証明。自然数 $k \geqq 1$ に対して，$\mathfrak{a} = I^{(k)}$ とし $\mathfrak{F} := A^*(\mathfrak{a})$

とおく。すると $r \geqq 1$ を，等式 $\mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{a}^n = \mathfrak{F}$ がすべての $n \geqq r$ に対して成立する様にとれるので（cf. [7]），$J = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{F} \text{ such that } \mathfrak{p} \cap S \neq \phi} \mathfrak{p}$ とおくと，$\mathfrak{a}^n : \langle J \rangle = \mathfrak{a}^{(n)}$ $(= I^{(kn)})$，$\forall n \geqq r$ である。よって $S := \sum_{n \geqq 0} (\mathfrak{a}^n : \langle J \rangle) t^{kn}$，$\mathcal{R}^{(k)} := \sum_{n \geqq 0} I^{(nk)} t^{nk}$ とおくと，$S \subset \mathcal{R}^{(k)}$ であってかつ S と $\mathcal{R}^{(k)}$ の差異 $\mathcal{R}^{(k)}/S$ は高々 A 上有限生成加群であることがわかる。

①⇒③　$\mathcal{R}^{(k)} = A[\mathcal{R}_k]$ となるように $k > 0$ をとればよい。

③⇒②　ここで得られた k に対して上で準備した議論を適用すると，$P \in V(I^{(k)})$ で $P \cap S \neq \phi$ なるものについては，$\mathfrak{a}^n : \langle P \rangle = \mathfrak{a}^n$ であるから，$\mathcal{R}_P(\mathfrak{a}) = \mathcal{R}(\mathfrak{a})$．したがって (2.6) によって ② を得る。

②⇒①　この $k > 0$ に対して上の議論を適用すると，$S := \mathcal{R}_J(\mathfrak{a})$ は ② の仮定より Noether である（cf. (2.6)）ので，$\mathcal{R}^{(k)}$ は Noether であって，従って (2.1) より $\mathcal{R}$ 自身が Noether となる。

Corollary (3.2)．A は *local* で quasi-unmixed と仮定せよ。このとき，もし $\mathcal{R}$ が Noether ならば，$^\exists k > 0$；任意の $P \in V(I^{(k)})$ で $P \cap S \neq \phi$ なるものについて不等式 $\ell(I^{(k)}A_P) < \dim A_P$ が成立する。（A が unmixed であれば逆も正しい。）

証明。$\mathfrak{a}$ を A のイデアル $(\mathfrak{a} \neq A)$ とすると，$\ell(\mathfrak{a}) \geqq \ell(I+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ $(\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A)$ であって，適当な $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A$ に対しては $\ell(\mathfrak{a}) = \ell(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ となることに従う。

Corollary (3.3). A は unmixed な局所環とする。このときもし $\exists k>0$; $\ell(I^{(k)}) = \operatorname{ht}_A I^{(k)}$ ならば，R は必ず Noether である。

Lemma (3.4). A は quasi-unmixed なる局所環とせよ。もし $A/I^{(n)}$ が Cohen-Macaulay, $\forall n \gg 0$ であってかつ R が Noether ならば，

$$\ell(I^{(k)}) = \operatorname{ht}_A I^{(k)}, \quad \exists k > 0$$

である。

証明。$k>0$ を $[I^{(k)}]^n = I^{(kn)}$ であってかつ $A/I^{(kn)}$ が Cohen-Macaulay $(\forall n \geqq 1)$ となるようにとる。$\mathfrak{a} = I^{(k)}$ とおき $m = \dim A/\mathfrak{a}$ とし，$f_1, f_2, \cdots, f_m \in A$ を $A/\mathfrak{a}$ の sop でかつ A の ssop となるようにとり $Q = (f_1, f_2, \cdots, f_m)A$ とせよ。すると，$f_1, f_2, \cdots, f_m$ は $A/\mathfrak{a}^n$ に対しても sop であるから，すべての $n \geqq 1$ に対して

$$Q \cap \mathfrak{a}^n = Q\mathfrak{a}^n$$

となる。したがって，associated graded rings の同型

$$G^{\cdot}_{\mathfrak{a}}(A)/Q\,G^{\cdot}_{\mathfrak{a}}(A) \cong G^{\cdot}_{\mathfrak{a}+Q/Q}(A/Q)$$

が得られ，これより，$\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとすると，

$$\begin{aligned} \dim A/\mathfrak{m} \otimes_A G^{\cdot}_{\mathfrak{a}}(A) &= \dim A/Q \\ &= \dim A - m \\ &= \dim A - \dim A/\mathfrak{a} \\ &= \operatorname{ht} \mathfrak{a}, \end{aligned}$$

すなわち，$\ell(\mathfrak{a}) = \operatorname{ht}_A \mathfrak{a}$ が導かれる。

(3.3) と (3.4) とより直ちに次が得られる：

Theorem (3.5). ([2]) A が unmixed 局所環で，$n \gg 0$ では $A/I^{(n)}$ は Cohen-Macaulay であると仮定せよ。このとき，

$$\mathcal{R} \text{ が Noether である。} \Leftrightarrow {}^{\exists} k > 0 ;\ \ell(I^{(k)}) = \operatorname{ht}_A I^{(k)}$$

次の主張は (3.5) の special case である。

Corollary (3.6). (P. Schenzel [10]). 正則局所環 A 内の素イデアル P が $\dim A/P = 1$ をもつとき，Symbolic Rees algebra $\mathcal{R}_s(P) := \sum_{n \geq 0} P^{(n)} t^n$ が A 上有限生成代数

であるための必要かつ十分条件は，$\exists k > 0$; $\ell(P^{(k)}) = \dim A - 1$ となることである。

この (3.6) に到達することが，私の報告の目的であった。しかしこの判定法は，理論的には確かに優美なものではあるけれども，これを実際に使おうとすることは，analytic spread $\ell(P^{(k)})$ の計算が（普通は）容易でないために，あまり得策でないと思う。一方で，(3.5) にはいくつか重要な応用があって，私と西田氏との報告 [3] に述べられているので，興味をお持ちの方はそちらも参照されたい。

References

[1] Cowsik, R., Symbolic powers and the number of defining equations. Algebra and its applications (New Delhi, 1981), 13 - 14, Leture Notes in Pure and Appl. Math., 91, Dekker, New York, 1984.

[2] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, Preprint

[3] Goto, S. and Nishida, K., On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, 第11回可換環論シンポジウム報告集.

[4] Huneke, C., On the finite generation of symbolic blow-ups, Math. Z. 179 (1982), 465-472.

[5] Ito, S., $\mathbb{Z}$-transforms and overrings of noetherian ring, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 635-657

[6] Katz, D. and Ratliff, L., On the symbolic Rees ring of a primary ideal, Comm. in Alg. 14 (1986), 959-970

[7] McAdam, S., Asymptotic prime divsors, LNM 1023, Springer (1983)

[8] Rees, D., On a problem of Zariski, Illinois J. Math. 2, 145-149 (1958)

[9] Roberts, P., A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not noetherian, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 589-592

[10] Schenzel, P., Filtrations and Noetherian symbolic blow-up rings, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 4, 817-822

[11] Schenzel, P., Finiteness of relative Rees rings and asymptotic prime divisors, Math. Nachr. 129 (1986), 123 – 148

[12] Schenzel, P., Examples of noetherian symbolic blow-up rings, Rev. Roumaine math. Pures Appl. 33 (1988), 4, 375 – 383