数理解析研究所講究録 156
第 713 巻 1990 年 156-163

Rings with Approximation Property

(C. Rotthaus の論文の紹介)

京大理　西村純一 (Jun-ichi NISHIMURA)

0. 序。

最近、C. Rotthaus により、次の定理

定理A。　Approximation Property を持つ局所環は Excellent Hensel である。

が得られたので紹介します。既に、Artin, Popescu, Rotthaus 等により、

定理B。　Excellent Hensel 局所環は Approximation Property を持つ。

ことが証明されていますので、今度の C. Rotthaus の結果より、結局、

定理C。　局所環 A が Approximation Property を持つための必要十分条件は、A が Excellent Hensel であること。

が示されたことになります。

Rotthaus の証明のポイントは、局所環 A の完備化 $\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathfrak{p}}$ での局所環 $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ が正則でないことを適当な方程式系で記述し、次の Artin-Rotthaus (cf. Popescu) に依る、定理D を利用することです。(詳細は次節以下を参照して下さい。) なお、上記の定理B の証明にも定理D は、本質的に重要な役割を果していました。

定理D。　$V \to W$ が、Excellent Cohen 環 (または、体) の準同型で、$V/pV \to W/pW$ が分離的。$R_0 = V[X_1, \ldots, X_m]$ 、$R = W[[X_1, \ldots, X_m]]$ であれば、R は順滑 (= smooth) R_0-代数の順極限 (= direct limit) で表される。即ち、任意の有限型 R_0-代数 (= R_0-algebra of finite type) B に対し、次の図式を可換にする順滑 R_0-代数 D が存在する。

$$
\begin{array}{ccc}
R_0 & \longrightarrow & R \\
\downarrow & \nearrow & \uparrow \\
B & \longrightarrow & D
\end{array}
$$

1. 準備。(定義、記号、事実、等)

定義 1.1　局所環 A が Approximation Property (以下、(AP) と略) を持つとは、A 上の多項式環 $A[Y] = A[Y_1, \ldots, Y_n]$ (n は任意) の方程式系 $f_1(Y), \ldots, f_N(Y) \in A[Y]$ が、A の完備化 $\hat{A}$ に解 $(\hat{y}) = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n) \in \hat{A}^n$ を持つ。即ち、$f_1(\hat{y}) = \ldots = f_N(\hat{y}) = 0$ なら、A に於ても解 $(y) = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ を持つ。即ち、$f_1(y) = \ldots = f_N(y) = 0$ 。

定義 1.2　局所環 A が Excellent とは、A が強鎖状 (= universally catenary)、且つ、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ が正則射。

注意 1.3　自然な準同型 $A \to \hat{A}$ が正則射であることと、次は同値。

任意の有限 A-整域 B と $\hat{P} \in \mathrm{Spec}\hat{B}$ に於て、$\hat{P} \cap B = (0)$ であれば、$\hat{B}_{\hat{P}}$ は正則局所環。

注意 1.4　A が (AP) を持てば、A は Hensel 環。更に、A が被約 (= reduced)、整域 (= domain)、正規 (= normal) なら、$\hat{A}$ もそれぞれ、被約、整域、正規。

次の事実は自明ではありませんが、よく知られています。

命題 1.5　A が (AP) を持てば、任意の有限 A-代数 B も (AP) を持つ。

命題 1.5 と注意 1.4 (cf.　注意 1.3) より、次の系を得ます。

系 1.6　A が (AP) を持てば、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ は被約射。

系 1.7　A が (AP) を持てば、A は強鎖状。

系 1.8　A が (AP) を持てば、自然な準同型 $A \to \hat{A}$ は正規射。

2. 方程式系。

以下、二つの n 次元 正則局所環 (R_0, m_0) 、(R, m) で、$R_0 \subseteq R$、且つ、$\mathrm{m}_0 R = \mathrm{m}$ であるもの、及び、$(R/\mathrm{q})_\mathrm{p}$ が正則でない R の素イデアル p 、$\mathrm{q} (\in \mathrm{Spec}R)$ を固定して話を進めます。

まず、次の補題に注意しておきます。

補題 2.0　a が R の高さ h のイデアルであれば、m_0 の元 $\ell_1, \ldots, \ell_{n-h}$ で、$(\mathrm{a}, \varphi(\ell_1), \ldots, \varphi(\ell_{n-h}))$ が m-準素イデアルであるものが見つけられる。

写像 $\delta : R\setminus\{0\} \to \mathbf{N}$ ($a \mapsto \delta(a)$) を $a \in \mathbf{m}^{\delta(a)} \setminus \mathbf{m}^{\delta(a)+1}$ により、$R\setminus\{0\} \to \mathrm{gr}_{\mathbf{m}}R$ ($a \mapsto a^*$) を $a^* = a + \mathbf{m}^{\delta(a)+1} \in \mathbf{m}^{\delta(a)}/\mathbf{m}^{\delta(a)+1}$ で定め — $\delta(a)$ を a の次数 (= degree)、a^* を a の leading form と呼びます —。そして、R のイデアル $\mathbf{a}$ に対し、$\mathbf{a}^*$ で $\mathbf{a}$ の元の leading forms で生成された $\mathrm{gr}_{\mathbf{m}}R$ のイデアルを表します。
$\mathbf{m}_0 = (X_1, \ldots, X_n)$ (即ち、$X_1, \ldots, X_n$ が R_0 の正則パラメーター系) である時、

$$\Gamma_k = \{X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n} \mid e_1 + \cdots + e_n = k\} = \{m(k,\gamma) \mid \gamma = 1, \ldots, \gamma_k\}$$

と書きます。

2.1 q を記述する方程式系。

最初に、$\mathbf{q}$ の生成系 $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を、$(q_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda} = \mathbf{q}^*$ であるように選びます。次に、$t = \max\{\delta(q_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ であれば、$\mathbf{q}^*$ の k 次成分 $\mathbf{q}_k^*$ ($k \le t$) を

$$\mathbf{q}_k^* = < q_\lambda^* \ (\delta(q_\lambda) = k), \ q_\lambda^* \cdot m(\ell,\gamma) \ (\delta(q_\lambda) + \ell = k) >$$

のように、$R/\mathbf{m}$-ベクトル空間とみなし、

$$\Pi_k = \{q_\mu \mid \delta(q_\mu) = k\} \bigcup \{q_\nu \cdot m(\ell_\nu, \gamma_\nu) \mid \delta(q_\nu) + \ell_\nu = k\}$$

を、$\Pi_k^* = \{q_\mu^*\} \cup \{q_\nu^* \cdot m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\}$ がベクトル空間 $\mathbf{q}_k^*$ の基底であるように取り、$\Theta_k (\subseteq \Gamma_k)$ を、$\Pi_k^* \cup \Theta_k$ が $\mathbf{m}^k/\mathbf{m}^{k+1}$ の基底であるように取ります。

約束。 以下の関係式・方程式系に於て、下線記号 (例えば、$\underline{q}_\lambda$) は、R_0 上 R の元 q_λ の関係式系を表し、同時に、同じ式を R_0 上の方程式系と考える場合には、不定元 Q_λ を表していると解釈します。

$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \Pi_k, \Theta_k$ 等の選び方から、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 1.}}$

$$\underline{q}_\lambda = \textstyle\sum_{\gamma=1}^{\gamma_k} \underline{a}_{\lambda\gamma} m(k,\gamma), \quad k = \delta(q_\lambda) \ (\lambda \in \Lambda)$$

$\boxed{\text{Equations 2.}}$

$$\begin{aligned} m(k,\kappa) &= \textstyle\sum_{q_\mu\in\Pi_k} \underline{b}_{(k,\kappa)\mu}\underline{q}_\mu + \sum_{q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\in\Pi_k} \underline{c}_{(k,\kappa)\nu}\underline{q}_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu) \\ &\quad + \textstyle\sum_{m(k,\gamma)\in\Theta_k} \underline{d}_{(k,\kappa)\gamma} m(k,\gamma) \\ &\quad + \textstyle\sum_{m(k+1,\varepsilon)\in\Gamma_{k+1}} \underline{e}_{(k,\kappa)\varepsilon} m(k+1,\varepsilon) \\ &\in \Gamma_k \setminus \Theta_k \quad (k \le t) \end{aligned}$$

この時、$B_1 = R_0[Q_\lambda, A_{\lambda\gamma}, B_{(k,\kappa)\mu}, C_{(k,\kappa)\nu}, D_{(k,\kappa)\gamma}, E_{(k,\kappa)\varepsilon}]/J_1$ と定義します。但し、

$$\begin{aligned} J_1 = (\,& Q_\lambda - \textstyle\sum_{\gamma=1}^{\gamma_k} A_{\lambda\gamma} m(k,\gamma), \\ & m(k,\kappa) - \{\textstyle\sum_{q_\mu\in\Pi_k} B_{(k,\kappa)\mu} Q_\mu + \sum_{q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu)\in\Pi_k} C_{(k,\kappa)\nu} Q_\nu m(\ell_\nu,\gamma_\nu) \\ & \qquad + \textstyle\sum_{m(k,\gamma)\in\Theta_k} D_{(k,\kappa)\gamma} m(k,\gamma) + \sum_{m(k+1,\varepsilon)\in\Gamma_{k+1}} E_{(k,\kappa)\varepsilon} m(k+1,\varepsilon)\}) \end{aligned}$$

命題 2.1.1 R_0-準同型 $\varphi_1 : B_1 \to R$ が $\varphi_1(Q_\lambda) \in \mathbf{q}\ (\lambda \in \Lambda)$ であれば、$(\varphi_1(Q_\lambda)) = \mathbf{q}$。

証明。 $\tilde{\mathbf{q}} = (\varphi_1(Q_\lambda))$ と表せば、仮定より $\tilde{\mathbf{q}} \subseteq \mathbf{q}$。更に、関係式・方程式系 1 、2 より $\tilde{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q}^*$。故に、$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$。

2.2 $\mathbf{p}$ の高さ（$\mathrm{ht}\,\mathbf{p} = h$）を記述する方程式系。

次に、$q_\sigma \in R(\sigma \in \Sigma(\supset \Lambda))$ を増し、$\mathbf{p} = (q_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$、且つ、$\{q_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ が次の条件を満たす $v_1, \ldots, v_h$ を含んでいる、と仮定します。

2.2.1 $s \in R \setminus \mathbf{p}$ が存在し、$s\,\mathbf{p} \subset (v_1, \ldots, v_h)$、
2.2.2 $\mathrm{ht}\,(v_1, \ldots, v_h) = h$。

即ち、$\ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_1 (\in \mathbf{N})$ が存在し、

2.2.3 $\mathbf{m}^{k_1} \subset (v_1, \ldots, v_h, \ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)})R$。

以上より、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 3.}}$ $$\underline{v}_i = \underline{q}_{\sigma_i} \qquad (i = 1, \ldots, h;\ \sigma_i \in \Sigma)$$

$\boxed{\text{Equations 4.}}$ $$\underline{s}\,\underline{q}_\sigma = \textstyle\sum_{i=1}^h \underline{f}_{\sigma i}\,\underline{v}_i \qquad (\sigma \in \Sigma)$$

$\boxed{\text{Equations 5.}}$ $$m(k_1, \gamma) = \textstyle\sum_{i=1}^h \underline{g}_{\gamma i}\,\underline{v}_i + \sum_{j=1}^{n-h} \underline{h}_{\gamma j}\,\ell_j^{(1)} \qquad (\gamma = 1, \ldots, \gamma_{k_1})$$

ここで、$B_2 = B_1[Q_\sigma, V_i, S, F_{\sigma i}, G_{\gamma i}, H_{\gamma j}]/J_2$ と定義します。但し、

$$J_2 = (V_i - Q_{\sigma_i},\ SQ_\sigma - \sum_{i=1}^h F_{\sigma i}V_i,\ m(k_1, \gamma) - \{\sum_{i=1}^h G_{\gamma i}V_i + \sum_{j=1}^{n-h} H_{\gamma j}\ell_j^{(1)}\})。$$

命題 2.2.4 R_0-準同型 $\varphi_2 : B_2 \to R$ が $\varphi_2(S) \notin (\varphi_2(V_i))$ であれば、$(\varphi_2(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_2}$ で、高さ h のものが存在する。

証明。 関係式・方程式系 5 より $\mathbf{m}^{k_1} \subset (\varphi_2(V_1), \ldots, \varphi_2(V_h), \ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{n-h}^{(1)})$ だから、$(\varphi_2(V_1), \ldots, \varphi_2(V_h)) = \mathbf{q}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{q}_r$ は高さ h の清純（= unmixed）イデアル。仮定より、$\varphi_2(S) \notin \mathbf{q}_j$ である $j\ (1 \le j \le r)$ が見つかり、一方 $\mathbf{a} = (\varphi_2(Q_\sigma))$ と表せば、関係式・方程式系 4 より $\varphi_2(S)\mathbf{a} \subseteq \mathbf{q}_j$。依って、十分大きな自然数 ν が見つかり $\mathbf{a}^\nu \subseteq \mathbf{q}_j$。故に、$\mathbf{p}_{\varphi_2} = \sqrt{\mathbf{q}_j}$ が求める高さ h の極小素イデアル。

2.3 $(R/\mathbf{q})_\mathbf{p}$ が正則でないことを記述する方程式系。

以下、$|\,\Lambda\,| = m$。即ち、$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{q_1, \ldots, q_m\}$。また、$m$ 次対称群を Ω_m で表

します。

さて、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}}$ が正則でないことを言い替えますと、任意の置換 $\omega \in \Omega_m$ に対し、非負整数 $k(\omega)\,(<\mathrm{ht}\,\mathbf{q})$ と元 $t(\omega) \in R \setminus \mathbf{p}$ が見つかり、

2.3.1 $\quad t(\omega)\, q_{\omega(k(\omega)+1)} \in \mathbf{p}^2 + (\, q_{\omega(1)}, \ldots, q_{\omega(k(\omega))}\,)$ 。

更に、$t = \prod_{\omega\in\Omega_m} t(\omega) \notin \mathbf{p}$ を言い替えますと、$\ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(2)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_2\,(\in \mathbf{N})$ が存在し

2.3.2 $\quad \mathbf{m}^{k_2} \subset (\mathbf{p}, t, \ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(2)})\, R$ 。

以上より、次の関係式・方程式系を得ます。

$$\boxed{\text{Equations 6.}} \qquad \underline{t}\, \underline{q}_{\omega(k(\omega)+1)} \;=\; \textstyle\sum_{\sigma,\tau\in\Sigma} \underline{k}_{\omega\sigma\tau}\, \underline{q}_{\sigma}\, \underline{q}_{\tau} + \sum_{i=1}^{k(\omega)} \underline{m}_{\omega i}\, \underline{q}_{\omega(i)}$$

$$\boxed{\text{Equations 7.}} \qquad m(k_2,\gamma) \;=\; \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma} \underline{n}_{\gamma\sigma}\, \underline{q}_{\sigma} + \underline{r}_{\gamma}\, \underline{t} + \sum_{j=1}^{n-h-1} \underline{u}_{\gamma j}\, \ell_j^{(2)}$$

次に、$B_3 = B_2[T, K_{\omega\sigma\tau}, M_{\omega i}, N_{\gamma\sigma}, R_\gamma, U_{\gamma j}]/J_3$ と定義します。但し、

$$\begin{aligned} J_3 = (\; & TQ_{\omega(k(\omega)+1)} - \{\textstyle\sum_{\sigma,\tau\in\Sigma} K_{\omega\sigma\tau} Q_\sigma Q_\tau + \sum_{i=1}^{k(\omega)} M_{\omega i} Q_{\omega(i)}\}, \\ & m(k_2,\gamma) - \{\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma} N_{\gamma\sigma} Q_\Sigma + R_\gamma T + \sum_{j=1}^{n-h-1} U_{\gamma j} \ell_j^{(2)}\}\,)\text{。} \end{aligned}$$

命題 2.3.3 $\quad R_0$-準同型 $\varphi_3 : B_3 \to R$ が $\varphi_3(Q_\lambda) \in \mathbf{q}\,(\lambda \in \Lambda)$ 、$\varphi_3(S) \notin (\varphi_3(V_i))$ を満たせば、$(\varphi_3(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_3}$ で、$\mathbf{q} \subset \mathbf{p}_{\varphi_3}$、$\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_{\varphi_3} = h$ 、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}_{\varphi_3}}$ が正則でない、ものが存在する。

証明略。

2.4 $\quad \mathrm{Sing}(R/\mathbf{q})$ に於ける $\mathbf{p}$ と他の極小素イデアルとの関係を記述する方程式系。

以後、次のことを仮定して話を進めます。

2.4.1 $\quad \mathrm{Sing}(R/\mathbf{q})$ は $\mathrm{Spec}(R/\mathbf{q})$ の閉集合、
2.4.2 $\quad \mathbf{p}$ は $\mathrm{Sing}(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアル。

Case 1. $\quad \mathrm{ht}\,\mathbf{p}$ が $\mathrm{Sing}(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアルの中で、高さが最小の時。

新しい関係式・方程式系は考えません。

Case 2. $\quad \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s$ が $\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_i < \mathrm{ht}\,\mathbf{p}(=h)$ である $\mathrm{Sing}(R/\mathbf{q})$ の極小素イデアルの全体の時。

$c \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathbf{p}_i \setminus \mathbf{p}$ を取れば、$\mathrm{ht}(\,\mathbf{p}, c\,) = h + 1$。即ち、$\ell_1^{(3)}, \ldots, \ell_{n-h-1}^{(3)} \in \mathbf{m}_0$ 及び $k_3(\in \mathbf{N})$ が存在し、

2.4.3　$\mathbf{m}^{k_3} \subset (\mathbf{p}, c, \ell_1^{(3)}, \dots, \ell_{n-h-1}^{(3)})R$。

これより、次の関係式・方程式系を得ます。

$\boxed{\text{Equations 8.}}$ $$m(k_3,\gamma) = \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma} \underline{v}_{\gamma\sigma}\, \underline{q}_\sigma + \underline{w}_\gamma\, \underline{c} + \sum_{j=1}^{n-h-1} \underline{z}_{\gamma j}\, \ell_j^{(3)}$$

ここで、$B_4 = B_3[C, V_{\gamma\sigma}, W_\gamma, Z_{\gamma j}]/J_4$ と定義します。但し、

$$J_4 = (m(k_3,\gamma) - \{\sum_{\sigma\in\Sigma} V_{\gamma\sigma}Q_\sigma + W_\gamma C + \sum_{j=1}^{n-h-1} Z_{\gamma j}\ell_j^{(3)}\})。$$

命題 2.4.4　R_0-準同型 $\varphi_4 : B_4 \to R$ が、$\varphi_4(Q_\lambda) \in \mathbf{q}(\lambda \in \Lambda)$、$\varphi_4(S) \notin (\varphi_4(V_i))$、$\varphi_4(C) \equiv c(\mathbf{q})$ を満たせば、$(\varphi_4(Q_\sigma))$ の極小素イデアル $\mathbf{p}_{\varphi_4}$ で、$\mathbf{q} \subset \mathbf{p}_{\varphi_4}$、$\mathrm{ht}\,\mathbf{p}_{\varphi_4} = h$、$(R/\mathbf{q})_{\mathbf{p}_{\varphi_4}}$ が正則でなく、$\mathbf{p}_{\varphi_4} \not\supseteq \mathbf{p}_i$ $(i = 1, \dots, s)$ であるものが存在する。

証明略。

3. 定理 A の証明。

定理を証明するには、次の主張を示せば十分です。

主張 3.1。　$(A, \mathbf{m})$ が (AP) を持つ局所整域で、$\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{Sing}\hat{A}$ なら、$\hat{\mathbf{p}} \cap A \neq (0)$。

主張の証明を始める前に、記号を準備します。　$\mathbf{m} = (x_1, \dots, x_m)$ であれば、$\hat{A} = W[[X_1, \dots, X_m]]/\mathbf{q}$（但し、$W$ は体、或は、Cohen 環）ですから、V が素体（A が等標数の場合）、或は、$\mathbf{Z}_{(p)}$（A が不等標数の場合）であるとしますと、次の可換図式を得ます。

$$\begin{array}{ccc} R_0 = V[X_1,\dots,X_m]_{(p,X)} & \longrightarrow & R = W[[X_1,\dots,X_m]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \hat{A} = R/\mathbf{q} \end{array}$$

主張の証明。　主張が正しくなかったと仮定します。つまり

3.1.1　$\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{Sing}\hat{A}$ で $\hat{\mathbf{p}} \cap A = (0)$ である $\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathbf{p}}$ が存在する

ことになります。そのような素イデアルで高さが最小のもの $\hat{\mathbf{p}}$ を取り、次の各々の場合について考えます。

Case 1.　$\mathrm{ht}\hat{\mathbf{p}}$ が $\mathrm{Sing}\hat{A}$ で最小の場合。　$B = B_3$ とします。

Case 2.　$\hat{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{p}}_s$ が、$\mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}_i < \mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}$ な $\mathrm{Sing}\hat{A}$ の極小素イデアルの全体の時。

仮定より $\hat{\mathfrak{p}}_i \cap A \neq (0)$ 。従って $d \in \bigcap_{i=1}^{s} \hat{\mathfrak{p}}_i \cap A \setminus \{0\}$ が取れ、d の R に於ける元像 c を選べば、$c \notin \mathfrak{p}$ (但し、$\mathfrak{p}$ は $\hat{\mathfrak{p}}$ の R に於ける元像)。この場合、 B として B_4 を取ります。

定理 D より次の図式を可換にする順滑 R_0-代数 D が存在します。

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

更に、次の図式を可換にする自然な A-準同型が存在します。

$$\begin{array}{ccc} E_0 = A \otimes_{R_0} D & \longrightarrow & A \otimes_{R_0} R \\ \downarrow & & \downarrow \\ E = E_0/(Q_\lambda, C - d) & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \hat{A} \end{array}$$

さて、任意の自然数 ν に対し、A の元 $s_\nu, q_{\sigma\nu} \in A (\sigma \in \Sigma \setminus \Lambda)$ を $\hat{\rho}(S) - s_\nu \in \hat{\mathfrak{m}}^\nu$、$\hat{\rho}(Q_\sigma) - q_{\sigma\nu} \in \hat{\mathfrak{m}}^\nu$ であるように選びます。この時、A が (AP) を持つことより、A-準同型 $\rho_\nu : E \to A$ で$\rho_\nu(S) - s_\nu \in \mathfrak{m}^\nu$、$\rho_\nu(Q_\sigma) - q_{\sigma\nu} \in \mathfrak{m}^\nu$、$\rho_\nu(Q_\lambda) = 0 \ (\lambda \in \Lambda)$ 、$\rho_\nu(C) = d$ であるものが存在します。　一方、D が順滑 R_0-代数、R が完備局所環なので、合成射 $\psi_\nu : D \to E \xrightarrow{\rho_\nu} A \to \hat{A} = R/\mathfrak{q}$ は、次の図式を可換にする R_0-準同型 $\Psi_\nu : D \to R$ に持ち上がります。

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ D & \xrightarrow{\psi_\nu} & R/\mathfrak{q} \end{array}$$

この時、$\Psi_\nu(Q_\lambda) = \mathfrak{q} \ (\lambda \in \Lambda)$ 、$\Psi_\nu(C) \equiv c \ (\mathfrak{q})$ 。 更に、ν が十分大きければ、

3.1.2　$\Psi_\nu(S) \notin (\Psi_\nu(V_1), \ldots, \Psi_\nu(V_h))$ 。

3.1.2 の証明。　$\Psi_\nu(S) \in (\Psi_\nu(V_1), \ldots, \Psi_\nu(V_h))$ なら、$\psi_\nu(S) \in (\psi_\nu(V_1), \ldots, \psi_\nu(V_h)) \subseteq (\psi_\nu(Q_\sigma))$ であり、$\psi_\nu(S) \in \hat{\mathfrak{p}} + \hat{\mathfrak{m}}^\nu$。従って、$\hat{\rho}(S) \in \hat{\mathfrak{p}} + \hat{\mathfrak{m}}^\nu$。

命題 2.4.4 より、R の素イデアル $\mathfrak{p}_{\Psi_\nu}$ で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_{\Psi_\nu}$、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_{\Psi_\nu} = h$ 、$(R/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}_{\Psi_\nu}}$ が正則でなく、$\mathfrak{p}_{\Psi_\nu} \not\supseteq \mathfrak{p}_i$ (但し、$\mathfrak{p}_i$ は $\hat{\mathfrak{p}}_i$ の R に於ける元像) であるものが存在します。

よって、$\hat{A}$ の素イデアル $\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \mathfrak{p}_{\Psi_\nu}/\mathfrak{q}$ を取れば、

$$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \in \mathrm{Sing}\hat{A}、\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \cap A \neq (0)、\mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \mathrm{ht}\,\hat{\mathfrak{p}}、\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} \not\supseteq \hat{\mathfrak{p}}_i\,(i = 1, \ldots, s)。$$

以上より、ν が十分大きければ、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu}$ は $\mathrm{Sing}\hat{A}$ の極小素イデアルなので、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_\nu} = \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu+k}}$ が無限個の k に於て成立する十分大きな ν_0 が見つけられ、$\hat{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}} + \hat{\mathfrak{m}}^{\nu_0+k}$ が成立します。

従って、$\hat{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}}$。故に、$\hat{\mathfrak{p}} = \hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}}$。ところで、$\hat{\mathfrak{p}}_{\Psi_{\nu_0}} \cap A \neq (0)$ 。これは矛盾。(以上より主張の証明が終わり、従って、定理 A の証明も完了します。)