数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 181-187

Gorenstein局所環の安定イデアルについて

広大理 大石 彰 (Akira Ooishi)

0. 安定イデアル. (R, m, k) を d 次元 Cohen-Macaulay 局所環, I をその m-準素イデアルとする。等式 $l(I/I^2) = e(I) + (d-1)l(R/I)$ が成立するとき, I は安定(stable)であると言う。R の剰余体が無限体のとき, この条件は $I^2 = IJ$ となるパラメーターイデアル $J \subset I$ が取れることと同値である。

例 1. m が安定であるとき, 即ち等式 $emb(R) = e(R) + d - 1$ が成り立つとき R は最大埋入次元(maximal embedding dimension)を持つと言われ Sally 等により良く研究されている。

例 2. $d = 1$, R が解析的不分岐とする。R の任意の整閉 m-準素イデアルが安定であるとき, R は Arf 環 であると

言う（Lipman）。そのためには，Rの全ての無限近点（infinitely near point）の局所環が最大埋入次元を持つことが必要十分である。特にseminormal局所環はArf環である。例えば $k[[X_1,\cdots,X_n]]/(X_iX_j \mid i \neq j)$，$k[[t^e, t^{e+1},\cdots, t^{2e-1}]]$ などはArf環で前者はseminormal，後者はseminormalでない。

例3．$d=1$，Rは解析的不分岐で剰余体kを含むとする。Rの任意の整閉m-準素イデアルが安定かつnormalであるためには，Rが有限個の$k[[t^e, t^{e+1},\cdots, t^{2e-1}]]$ の形の環の貼り合わせになっていることが必要十分である。但し，イデアルIはその全ての巾が整閉であるとき normal であると言う。上の条件は $\overline{p}_a(R) := \ell(m\overline{R}/m)=0$ なることと同値である。

例4．$d=2$，Rが解析的正規とする。Rの任意の整閉m-準素イデアルが安定かつnormalであるためにはRが有理的特異点（即ち $p_g(R)=0$）であることが必要十分である（Rees）。

例5．Rがd次元正則局所環のとき，m^r が安定$\Longleftrightarrow r=1$

又は $d \leqslant 2$ 又は $(d, r) = (3, 2)$。

1. <u>主定理</u>. 安定イデアルについては多くのことが知られている。特に I が安定ならば次数付環 $G(I) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/I^{n+1}$ は Cohen-Macaulay 環である(Valla, 1979)。そこで，次に I が安定のとき，G(I) がいつ Gorenstein 環になるかを問題にする。もし G(I) が Gorenstein 環ならば R は必然的に Gorenstein 環なので，最初から R は Gorenstein 環としてよい。そのとき I がパラメーターイデアルならば $G(I) \cong R/I[X_1, \cdots, X_d]$ が Gorenstein 環であることは明白。よって我々の問いに対する答えは次で与えられる：

<u>定理</u>. R が Gorenstein 局所環，I が R の安定な $\mathfrak{m}$-準素イデアルでパラメーターイデアルでないとする。このとき

(1) $r(G(I)) \leqslant 2\ell(R/I) - e(I) + 1$。

(2) G(I) が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $e(I) = 2\ell(R/I)$。

(但し $r(G(I))$ は G(I) の Cohen-Macaulay 型を表わす。)

定理は $d=0$ の場合に帰着させて証明される。今 $(R, \mathfrak{m}, k)$ をアルチン Gorenstein 局所環として，有限生成 R-加群 M に対して $M^* = \mathrm{Hom}(M, R)$ とおく。すると双対性により

$$M^{**} \cong M, \quad \ell(M^*) = \ell(M),$$

又，R のイデアル I に対して $ann(I) = (R/I)^*$ であることから

$$ann(ann(I)) = I, \quad I \subset J \text{ とすると } ann(I)/ann(J) \cong (J/I)^*。$$

以下，I を R のイデアルで $I \neq 0$，R かつ $I^2 = 0$ とし $J = ann(I)$ とおく。すると上のことより

$$Soc(R) \subset I \subset J, \ ann(J) = I,$$
$$\ell(I) = \ell(R/J), \ \ell(J) = \ell(R/I),$$
$$\ell(I) \leqslant \ell(J) = \ell(R/I)。$$

よって次の補題が従う：

<u>補題</u>. $2\ell(I) \leqslant \ell(R)$ かつ $2\ell(I) = \ell(R) \Longleftrightarrow I = J$。

次数付環 $G(I) = R/I \oplus I/I^2$ は $m/I \oplus I/I^2$ を極大イデアルとするアルチン局所環である。

<u>命題</u>.
$$r(G(I)) = \ell(J/I + mJ) + 1$$
$$\leqslant \ell(R) - 2\ell(I) + 1。$$

証明．　等式は $Soc(G(I)) \cong (J/I + mJ)^* \oplus k$ を示せば

よい。$(\bar{a},\bar{b})\in G(I)$ のとき

$$(\bar{a},\bar{b})\in Soc(G(I)) \Longleftrightarrow (\bar{a},\bar{b})(\mathfrak{m}/I\oplus I/I^2)=0$$

$\Longleftrightarrow$ $a\in(I:\mathfrak{m})\cap ann(I)=ann(J\mathfrak{m})\cap ann(I)=$ $ann(I+\mathfrak{m}J)$ かつ $b\in I\cap Soc(R)=Soc(R)$。
従って，$Soc(G(I))\cong ann(I+\mathfrak{m}J)/ann(J)\oplus Soc(R)\cong$ $(J/I+\mathfrak{m}J)^*\oplus k$。不等式は $\ell(J/I+\mathfrak{m}J)\leqslant\ell(J/I)=$ $\ell(J)-\ell(I)=\ell(R/I)-\ell(I)=\ell(R)-2\ell(I)$ より明白。

<u>系.</u> 次は同値：

(1) $I=J$（又は $I\cong J$）。

(2) $2\ell(I)=\ell(R)$。

(3) $G(I)$ が Gorenstein環。

<u>定理の証明</u>： $R(X)$ を考えることにより k は無限体としてよい。$J=(x_1,\cdots,x_d)$ を I の極小還元として $S=R/J$，$L=I/J$ とおくと，S はアルチンGorenstein局所環で，$\ell(S)=e(I)$，$L^2=0$，$L\neq 0$ かつ $G(L)\cong G(I)/(x_1^*,\cdots,x_d^*)$。
従って

$$\begin{aligned} r(G(I))=r(G(L)) &\leqslant \ell(S)-2\ell(L)+1 \\ &=2\ell(S/L)-\ell(S)+1=2\ell(R/I)-e(I)+1 \end{aligned}$$

かつ，$G(I)$ が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $G(L)$ が Gorenstein $\Longleftrightarrow$

$$2\ell(L) = \ell(S) \iff e(I) = 2\ell(R/I)\text{。}$$

2. 諸例.

例6. Rが解析的不分岐な1次元Gorenstein局所環でDVRでないとすると，Rの導手イデアル$C = R : \overline{R}$は安定な整閉$\mathfrak{m}$－準素イデアルで$G(C)$はGorenstein環である。

例7. $R = k[[t^2, t^{2r+1}]]$，$r \geqq 1$とするとRの任意の$\mathfrak{m}$－準素イデアルIは安定で，Iが整閉のとき$G(I)$がGorenstein $\iff I = \mathfrak{m}$又は(t^{4r-2}, t^{4r-1})。

例8. $R = k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-2}]]$，$e \geqq 3$とすると$R$の整閉$\mathfrak{m}$－準素イデアル$I$に対して$G(I)$がGorenstein $\iff I = \mathfrak{m}$，$(t^{2e-2}, t^{2e}, t^{2e+1}, \cdots, t^{3e-3})$又は$(t^{2e}, t^{2e+1}, \cdots, t^{3e-3})$（$R$の導手）。

例9. Rが解析的不分岐な1次元Gorenstein局所環でkを含むとする。このとき$G(I)$がGorenstein環になるような整閉$\mathfrak{m}$－準素イデアルIは$\mathfrak{m}$のみ $\iff \hat{R} \cong k[[X, Y]]/(XY)$又は$k[[X, Y]]/(X^2 - Y^3)$。

<u>例</u>10.　R が d 次元正則局所環のとき $\mathfrak{m}^r$ が安定かつ $G(\mathfrak{m}^r)$ が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $r=1$ 又は $d\leqslant 1$ 又は $(d,r)=(3,2)$。

<u>例</u>11.　R が 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環，$e(R)=2$ のとき任意の r について $\mathfrak{m}^r$ は安定かつ $G(\mathfrak{m}^r)$ は Gorenstein である。

(October 1989)