

Duality for an action of a countable amenable group
on an injective factor

宮崎大学工学部

片山良一

今日まで多くの人達により有限群あるいはコンパクト群の作用に関する双対定理が作り上げられてきている。

一方可算離散群 G の作用の場合 [1] においてはじめて試みられている。この場合は G が amenable 群であり因子環 M が injective II_1 -型であり、作用が外部的であれば漸近的な双対定理が成立する。ここでは injective な因子環 M が II_∞ , III_λ 型 ($0 < \lambda < 1$) の場合に同様の漸近的な双対定理が成立することを示す。方法論としては [2] の方針を借用して証明する、即ち群 G の作用を II_∞ -型の場合に帰着して証明する。

群 G を amenable 群、因子環 M を $\text{II}_\infty, \text{III}_\lambda$ 型 ($0 < \lambda < 1$) とする。

α ; Action of G on M が ultra-free (Ocuneanu の意味で centrally free) であるとは Central sequence algebra M_ω 上で free な作用である。また M の ultra product algebra を $M(\omega)$ で表す。 ϕ を M 上の normal

faithful normal state であるとき M 上のノルム $\|\cdot\|_\phi^\sharp$ を

$$\|x\|_\phi^\sharp = \{\phi(xx^*) + \phi(x^*x)\}^{1/2}, \quad x \in M$$

と定義する。

このとき自己同型 $\theta \in \text{Aut}(M)$ が asymptotically fixed point property (AFP) を持つことは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_g(x_n) - x_n\|_\phi^\sharp = 0 \quad \text{for all } g \in G$$

となる M の bounded sequence $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta(x_n) - x_n\|_{\frac{\|\cdot\|}{\phi}} = 0$$

となることである。

Main Theorem (M, G, α) は上の条件を満たすものとする。もし自己同型 $\theta \in \text{Aut}(M)$ が AFP を持てば

$$\theta = \alpha_g$$

となる $g \in G$ が存在する。

これを証明するには次のような一連の補題を用いる。

補題1 (M, G, α) と θ は上と同じ。 $\lambda(\cdot)$ を G の $M(\omega)^G$ の中への unitary 表現とする。そして 1-cohomology vanishing theorem ([3]A. Ocneanu) により

$$V \alpha_g(V) = \lambda(g)$$

となる unitary $V \in M(\omega)$ が存在する。このとき

$$\theta(V) = V \lambda(g_0)$$

となる $g_0 \in G$ が存在する。

この証明は [1] の injective II_1 -型因子環の場合とまったく同じ方法で証明できる。

補題2 (Cocycle Perturbation by M. Takesaki) (M, G, α) と θ は上と同じ。 u を α -cocycle ($u_g \in U(M)$ with $u_{gh} = u_g \alpha_g(u_h)$ for $g \in G$) とする、このとき unitary $W \in U(M)$ が存在して $\text{Ad } W \cdot \theta$ は perturbed action $u_g \alpha_g = \text{Ad } u_g \alpha_g$ に関して AFP を持つ。

この補題の証明の方針は補題1の $V = \{v_n\} \in M(\omega)$ に対して適当な部分列を取るにより

$$s\text{-}\lim_{n(i) \rightarrow \infty} v_{n(i)}^* \theta(v_{n(i)}) = W$$

(左辺がある unitary W に strong*-topology で収束する意味) となり、この W で θ を perturb することにより $\text{Ad } W \cdot \theta$ が AFP を持つことを示す。

ここまで来ると Connes-Jones-Ocuneanu 等による amenable 群の作用の cocycle 同値の結果が利用できる。

M が injective Π_{∞} -因子環 R_{01} の場合

作用は次のような作用 $\beta_g \otimes \gamma_{-\log \Delta(g)}$ と cocycle 同値である、

$$M \cong R_0 \otimes R_{01}$$

β は injective Π_1 -因子環 R_0 上の free な群 G 作用

γ は injective III_1 -因子環の modular action の dual action である。これは R_{01} 上の作用で

$$\tau \cdot \gamma_t = e^{-t} \tau \quad (\tau; \text{f.n.s.-trace on } R_{01})$$

を満たす \mathbb{R} の作用である

$$\Delta(g) = \text{mod } \alpha_g \quad (\tau \alpha_g = \Delta(g) \tau, \Delta(g) \in \mathbb{R}_+)$$

$\gamma_t(U(s)) = e^{ist} U(s)$ を満たす \mathbb{R} の表現 $U(\cdot)$ が R_{01} の中に存在するので補題1により

$$\theta(U(s)) = U(s) e^{is(-\log \Delta(g_0))} \quad \text{for } s \in \mathbb{R}$$

となる $g_0 \in G$ が存在する。AFP を持つ自己同型 $\alpha_{g_0}^{-1} \theta$ を新たに考える

ことにより、 θ は $\mathbb{C} \otimes R_{01}$ 上で trivial と考えて良い。この場合は作用

β_g に関して $\theta|_{R_0 \otimes \mathbb{C}}$ は AFP を持つことになり injective Π_1 -型因子環の場合に帰着できる。この場合は [1] で解決済である。 θ を W で inner perturb したことにより θ と最初の α_{g_0} とは inner automorphism のぶんどけずれるが、この inner automorphism は trivial であることが証明できる。

M が injective Π_λ -型 ($0 < \lambda < 1$) 因子環 R_λ の場合

α の α -cocycle perturbed action α' で次の性質を満たすものが作れる。
([3] Proposition 12.1, Lemma 13.3 を用いる)

(i) α' は α' -invariant dominant weight ω を持つ

(ii) $M \cong N \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$ continuous decomposition by M. Takesaki において

$$\alpha'_g(U(t)) = U(t) \text{ for } g \in G \text{ and } t \in \mathbb{R} \quad (U(t) \in U(M) \text{ は } \mathbb{R} \text{ の表現})$$

$$\alpha'_g(V(t)) = V(t) \text{ for } g \in G \text{ and } t \in \mathbb{R} \quad (V(t) \in U(N) \text{ は } \mathbb{R} \text{ の表現})$$

$$U(t)V(s)U(t)^* = e^{ist}V(s) \quad \sigma_s^\omega(U(t)) = e^{ist}U(t) \text{ を満たす}$$

(iii) Π_∞ -von Neumann algebra $M_\omega \cong N \cong N_0 \otimes L^\infty([0, -\log \lambda])$ において

($L^\infty([0, -\log \lambda])$ は N の center) a twisted group $G \times \mathbb{Z}$ の作用で

(g, n) $\in G \times \mathbb{Z}$ 対して ($N_0 \cong R_{01}$)

$$\alpha'_g \overline{\theta} \cdot \log \Delta(g) \overline{\theta}^{-n} \text{ の } \{0\} \text{ の fiber automorphism } \in \text{Aut}(N_0),$$

$\overline{\theta}$ は modular automorphism σ^ω の dual action $\hat{\sigma}^\omega$ の $\hat{\sigma}_{-\log \lambda}^\omega$

$$\overline{\theta} \cdot \log \Delta(g) = \hat{\sigma}_{-\log \lambda}^\omega \cdot \log \Delta(g)$$

$$\Delta(g) = \text{mod } \alpha_g \in [0, -\log \lambda)$$

補題3 (i) θ と σ^ω は commute する, ゆえに θ は N を globally invariant にする

(ii) $\theta(U(t)) = U(t)$ for $t \in \mathbb{R}$ [補題2(ii)より]

(iii) 補題1より θ は $L^\infty([0, -\log \lambda))$ 上 trivial として良い

このことにより injective Π_∞ -型因子環 R_{01} 上の $G \times \mathbb{Z}$ の free action

$$\alpha'_g \overline{\theta}^{-\log \Delta(g)} \overline{\theta}^n \text{ の } \{0\} \text{ の fiber automorphism}$$

と AFP を持つ R_{01} の自己同型 θ (θ の $\{0\}$ の fiber automorphism のこと, 同じ記号を用いる) の問題に帰着できる。

Π_∞ -型の結果を利用すれば まず下の式が $\{0\}$ -fiber で成立しそして N の上で

$$\alpha'_g \overline{\theta}^{-\log \Delta(g)} \overline{\theta}^n = \theta \quad \text{for some } g \in G \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

が導ける。補題3(ii)と補題2(ii)より M 上で

$$\alpha'_g \text{Ad}U(-\log \Delta(g) - \lambda^n) = \theta \quad \text{for some } g \in G \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

補題3(iii)より $\Delta(g) = 1$ なので M 上で

$$\alpha'_g \overline{\theta}^n = \theta \quad \text{for some } g \in G \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

補題2(ii)より $n = 0$ となり 双対定理が成立つ。

最近竹崎氏との共著で M が injective factor の場合に双対定理が成立することを示した。

Referencrs

[1] Y. Katayama, A duality for an action of a countable amenable group

- on a hyperfinite II_1 -factor, *J. Operator Theory*, 21(1989), 297-314
- [2] C.E.Sutherland and M.Takesaki, Action of discrete amenable groups on injective factors of type III_λ , $\lambda \neq 1$, *Pacific J. Math.* 137(1989) 405-444
- [3] U.Haagerup and E.Størmer, Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights (preprint)
- [4] A.Ocuneanu, Action of discrete amenable groups on von Neumann algebras, *Lecture Note in Math.*, Springer-Verlag, 1138(1985)