数理解析研究所講究録
第717巻 1990年 76-89

楕円 modular 関数を用いた関数の解析接続について

一橋大学・経済 杉原正顕 (Masaaki Sugihara)
東京大学・工 森 正武 (Masatake Mori)

はじめに

1975年，(故) 高橋秀俊先生は，文献[1]において複素関数論と数値解析の関連を種々の側面から論じられ，そのなかの“3．べき級数展開について”において変数変換を用いた解析接続の概念を提案されました．そして，例として，関数f(z)が1と∞にだけ特異点（分岐点でもよい）をもつ場合，よく知られた初等関数を変換関数として用いることによって，容易にf(z)の解析接続が得られることを示され，さらに，下の（原文の）コピーにみるように，最適な変換関数は楕円 modular 関数によって与えられることを示唆されました．

最適の変換は，楕円 modular 関数

(15) $$x=\phi_4(u)=\frac{16u(1+u^2+u^6+u^{12}+\cdots)^4}{(1+2u+2u^4+2u^9+\cdots)^4}$$

によって与えられる．これによる対応は

$$\phi(0)=0,\ \phi(1)=1,\ \phi(-1)=\infty,\ \phi(-e^{-\pi})=-1,$$
$$\phi(e^{-\pi})=1/2$$

であり，u平面の単位円はx平面を$1, \infty$を除いて全部無限に多重に覆いつくす．

（文献[1]より）

本稿の目的はこのコピーの数行の意味（特に“最適”の意味）を詳細に調べることにある．まず，初めに高橋先生の提案された変数変換を用いた解析接続の概念を復習し，1と∞にだけ特異点をもつ関数として，f(z)= －log(1－z)

を例にとり，[1]に示されている初等関数を用いることによって，この関数がどのように解析接続されるかを調べる．そして，さらに，高橋先生が変換関数として最適と述べられている楕円 modular 関数を用いたときの解析接続について詳細に調べ，その最適性の意味を探る．

1．変数変換を用いた解析接続

複素関数 $f(z)$ がべき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1-1}$$

の形で与えられているとする．通常，複素関数論で言うところの解析接続では，変数 z を

$z=\phi(w)=w-p$　（ここで，p はべき級数(1)の収束円内の点）

とおき，変数変換を行った関数（べき級数）

$$g(w) = f(\phi(w))=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

を作ることが行われる．高橋先生は，この解析接続の概念を拡張して，$\phi(w)$ を一般の関数

$$\phi(w)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

とし，変数変換を行った関数（べき級数）を作ることを提案された[1]．ただし，$\phi(w)$ としては，条件 $\phi(0)=0$（$=b_0=0$）を満足するもののみを考察対象とされた．$\phi(w)$ がこの条件を満足すれば，$f(\phi(w))$ の展開係数 c_k が $f(z)$ および $\phi(w)$ の展開係数 a_k，b_k から有限回の演算で求められるーこれは，数値計算の立場からすれば素直な要請であるーからである（下の注意1参照）．

この一般の関数を用いて変数変換を行って新しい関数（べき級数）を作る操作を変数変換を用いた解析接続と呼ぶ（このような概念に対して“解析接続”という言葉を用いることは，不適切であると思われる方もあるかもしれないが，解析接続とは“べき級数(1-1)を用いては計算できなかった関数値が計算できるようになること”と考えればこの言葉使いは素直なものと思われる）．

《注意1》　$b_0=0$ のとき $f(\phi(w))$ の展開係数 c_k が $f(z)$ および $\phi(w)$ の展開係数 a_k，b_k から有限回の演算で求められることはほぼ自明であるが，

高橋先生は a_k, b_k から c_k を計算するつぎのようなアルゴリズムを提案されている.

（高橋のアルゴリズム）

配列 A（K），B（K），（K＝1，...，N）にそれぞれ a_k, b_kをストアしておく.

```
      DO 10 K=1, N
        DO 20 I=1, K
          S=0
          DO 30 J=1, K-I+1
            S=S+A(N-I-J+2)*B(J)
30        CONTINUE
          A(N-I+1)=S
20      CONTINUE
10    CONTINUE
```

配列 A（K），（K＝1，...，N）に c_1, c_2, ..., c_N が入る.

高橋先生はこのアルゴリズムの証明をどこにも記して居られないので，蛇足ではあるが，以下，その証明らしきもの（＝説明）を与える.

まず，c_k $(k \geqq 1)$は，明らかに a_i, b_i $(i=1, \ldots, k)$ の関数である．そこで，その関数を$C_k(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_k)$ で表すことにする．このとき，次の関係式が成立する.

関係式

$$C_{k+1}(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}; b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$$
$$= a_1 b_{k+1} + C_1(a_2; b_1) b_k + C_2(a_2, a_3; b_1, b_2) b_{k-1} + \cdots + C_k(a_2, \ldots, a_{k+1}; b_1, \ldots, b_k) b_1$$

（関係式の証明）

$f(\phi(w))$ はつぎのように変形できる.

$$f(\phi(w)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\phi(w))^k$$

$$= a_0 + \phi(w)\left(a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(\phi(w))^k\right)$$

$$= a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k\right)\left(a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(a_2, \ldots, a_{k+1}; b_1, \ldots, b_k)w^k\right)$$

この最後の式を展開したときのw^{k+1}の係数は定義によって$C_{k+1}(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}; b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$に等しい．この関係を表したのが上記の関係式である．

■

高橋のアルゴリズムは，この関係式を逐次用いて，$c_1, c_2, \ldots, c_N$ を$a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$ から計算するアルゴリズムである．例でみるとより分かりやすいと思われる．N=3の場合を考える．まず，c_1, c_2, c_3 は関係式からつぎのように表現される．

①$c_1 = C_1(a_1; b_1) = a_1 b_1$

②$c_2 = C_2(a_1, a_2; b_1, b_2) = a_1 b_2 + C_1(a_2; b_1)b_1$

③$c_3 = C_3(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) = a_1 b_3 + C_1(a_2; b_1)b_2 + C_2(a_2, a_3; b_1, b_2)b_1$

ここで，$C_1(a_2; b_1)$，$C_2(a_2, a_3; b_1, b_2)$はさらに次のように表現される．

④$C_1(a_2; b_1) = a_2 b_1$

⑤$C_2(a_2, a_3; b_1, b_2) = a_2 b_2 + C_1(a_3; b_1)b_1$

そして，最後に$C_1(a_3; b_1)$は次のように表現される．

⑥$C_1(a_3; b_1) = a_3 b_1$

これらの関係①～⑥を逆に辿ることによって，$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ からc_1, c_2, c_3 が計算される． これが高橋のアルゴリズムである．

《注意２》 従来の原点移動を用いた解析接続が数値計算に使用されることもある．たとえば，文献[2]などを参照せよ．

２．変数変換を用いた解析接続の具体例

文献[1]では，変数変換を用いた解析接続の例として，１と∞にだけ特異点をもつ関数について，よく知られた初等関数を変換関数として用いた場合の解析接続が詳細に調べられている．ここでは，より具体的に，１と∞にだけ特異点をもつ

関数として，

$$f(z) = -\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \tag{2-1}$$

を例にとり，[1]に示されている初等関数を用いることによって，この関数がどのように解析接続されるかを調べる．

(i) 変数変換

$$z = \phi_1(w) = \frac{2w}{1+w}$$

を用いたときの解析接続

変数変換後の関数（べき級数）

$$f(\phi_1(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \tag{2-2}$$

の収束半径は，f（ϕ_1(w)）の原点に一番近い特異点までの距離に等しい．従って，変数変換によって，f（z）の特異点がどの様に写るかを調べれば，(2-2)のべき級数の収束半径が分かる．今の場合，変数変換 z ＝ ϕ_1(w)によって，f（z）の特異点 1，∞ はそれぞれ 1，-1 に写像されるから，(2-2)のべき級数の収束半径は 1 である．w平面の単位円内部（＝(2-2)のべき級数の収束円内部）は，z平面の半平面：｛z｜Re z＜1｝に対応するから（図１参照），(2-2)のべき級数を用いることによって，半平面：｛z｜Re z＜1｝に含まれる任意のzに対してf（z）の値が計算できる．つまり，f（z）は，この変数変換によって半平面：｛z｜Re z＜1｝に解析接続されたことになる．

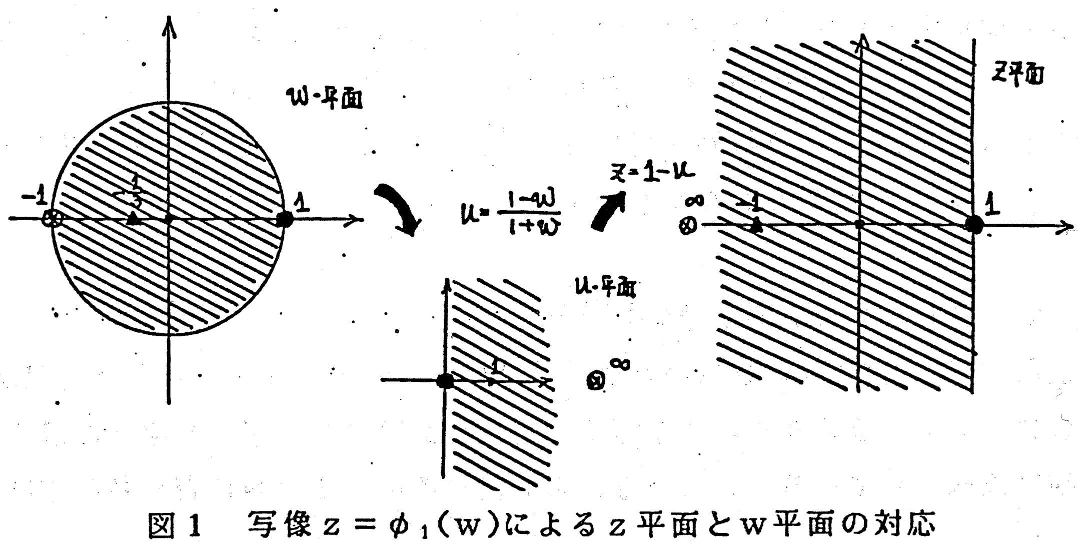


図１　写像 z ＝ ϕ_1(w)による z 平面と w 平面の対応

《注意１》　変換関数として一次分数変換を考えるとき，解析接続される領域（＝変数変換後の関数（べき級数）の収束円内部に対応するｗの範囲）がもともとのべき級数の収束円（今の場合，単位円）を含み，さらに，解析接続される領域がもっとも大きくなることが望ましい．変換 $z=\phi_1(w)$ は，このような条件を満たす一次分数変換である．

《注意２》　一次分数変換を変換関数に用いた解析接続は，Euler 変換などを含む級数の収束の加速法と密接な関係がある．例えば，交代級数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ に対する Euler 変換 $(1/2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1/2)^k \Delta^k a_0$ は，一次分数変換 $z=w/(1+w)$ を変換関数に用いた解析接続の式：

$$-z\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = -w\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k a_0\, w^k$$

で $z=-1$（$=w=-1/2$）と置いたものに等しい．詳細は，文献 [3], [4] などを参照せよ．

（ii）　変数変換

$$z=\phi_2(w)=1-\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^2$$

を用いたときの解析接続

この変数変換においても，(i)の場合と同様，$f(z)$ の特異点 1，∞ はそれぞれ 1，-1 に写像されるから，変数変換後の関数（べき級数）の収束域は単位円である．　写像 $z=\phi_2(w)$ は，写像①：$u=(1-w)/(1+w)$，写像②：$v=u^2$，写像③：$z=1-v$ の合成であり，ｗ平面の単位円内部は，まず，写像①によって右半平面に写像され，さらに，写像②によって全平面から非正の実軸の部分を除いた領域に写像され，最後に，写像③によって全平面から１以上の実軸の部分を除いた領域に写像される（図２参照）．従って，$f(z)$ は，この変数変換によって全平面から１以上の実軸の部分を除いた領域に解析接続される．

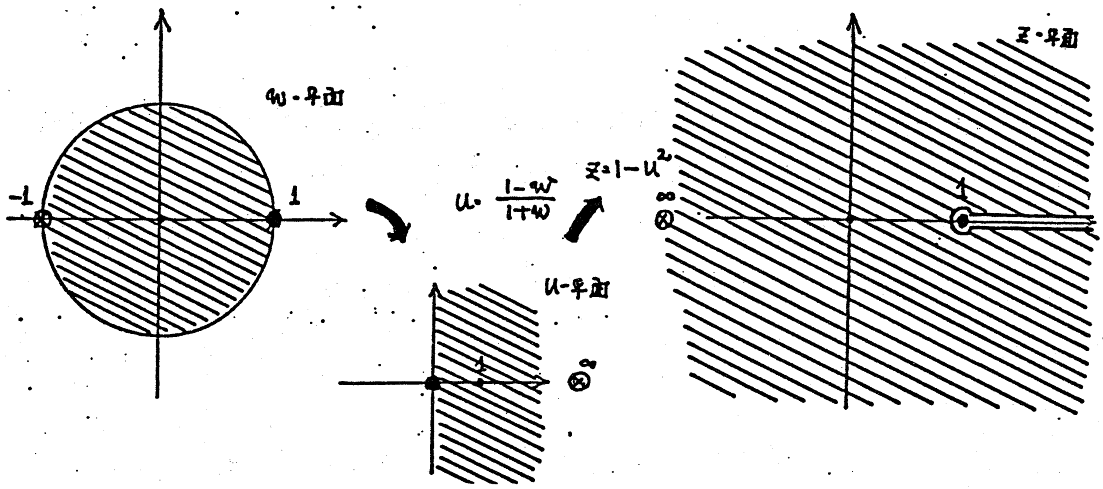


図2　写像$z = \phi_2(w)$によるz平面とw平面の対応

(iii)　変数変換

$$z = \phi_4(w) = 1 - \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^4$$

を用いたときの解析接続

この変数変換においても，f(z)の特異点 1，∞ はそれぞれ 1，-1 に写像されるから，変数変換後の関数（べき級数）の収束域は単位円である．この写像は，写像①：$u = (1-w)/(1+w)$，写像②：$v = u^4$，写像③：$z = 1 - v$の合成であり，(ii)の場合と同様にして，容易に分かるように，w平面の単位円内部はz平面からz＝1を除いた領域を2重に覆うリーマン面 $\mathfrak{R} = \{ z \mid z = 1 - re^{i\theta},\ 0<r,\ -2\pi<\theta<2\pi \}$ に写像される（図3参照）．従って，f(z)は，この変数変換によってz平面からz＝1を除いた領域を2重に覆うリーマン面 $\mathfrak{R}$ に解析接続される．

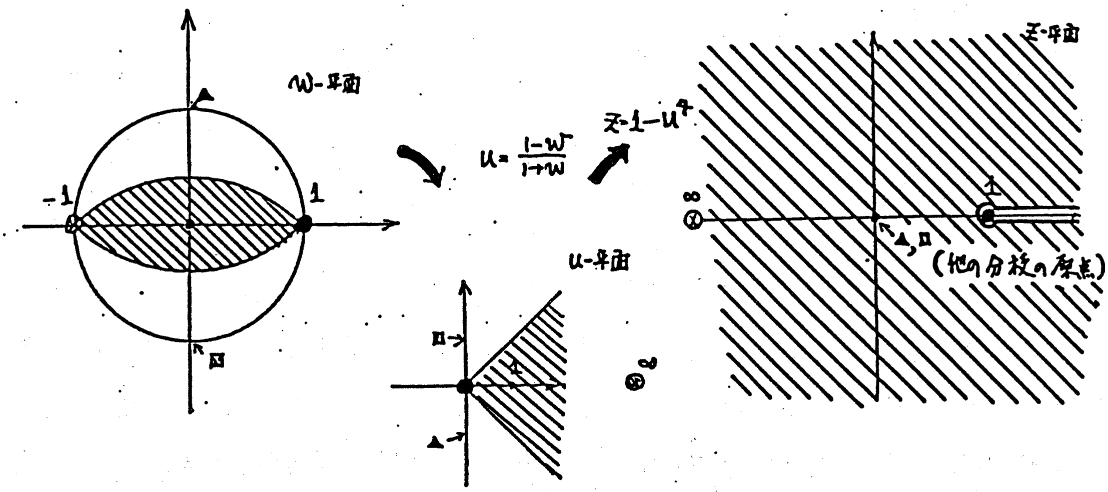


図3　写像$z = \phi_4(w)$によるz平面とw平面の対応

以上の(i)〜(iii)の例から分かるように，変数変換

$$z = \phi_k(w) = 1 - \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^k \tag{2-3}$$

において，kを大きくしていけば，その変数変換を用いることによって，f(z)は－log(1－z)が定めるリーマン面（z平面からz＝1を除いた領域を無限多重に覆うリーマン面）上いくらでも解析接続していくことができる．

3．楕円 modular 関数を用いた解析接続

2．で得られた解析接続の具体例に関する知見から，自ずと次のような予想が頭にうかぶ．

『文献[1]に高橋先生が書いておられる楕円 modular 関数を用いた変換とは，(2-3)の変換でk→∞としたものに対応する究極の変換なのではないか？　つまり，文献[1]で用いられた最適という言葉は究極を意味するのではないか？』

以下，この予想の正否を決定するために，楕円 modular 関数を用いた変換

$$z = \phi_\infty(w) = \frac{16w(1+w^2+w^6+w^{12}+...+w^{n(n+1)}+...)^4}{(1+2w+2w^4+2w^9+...+2w^{n\cdot n}+...)^4}$$

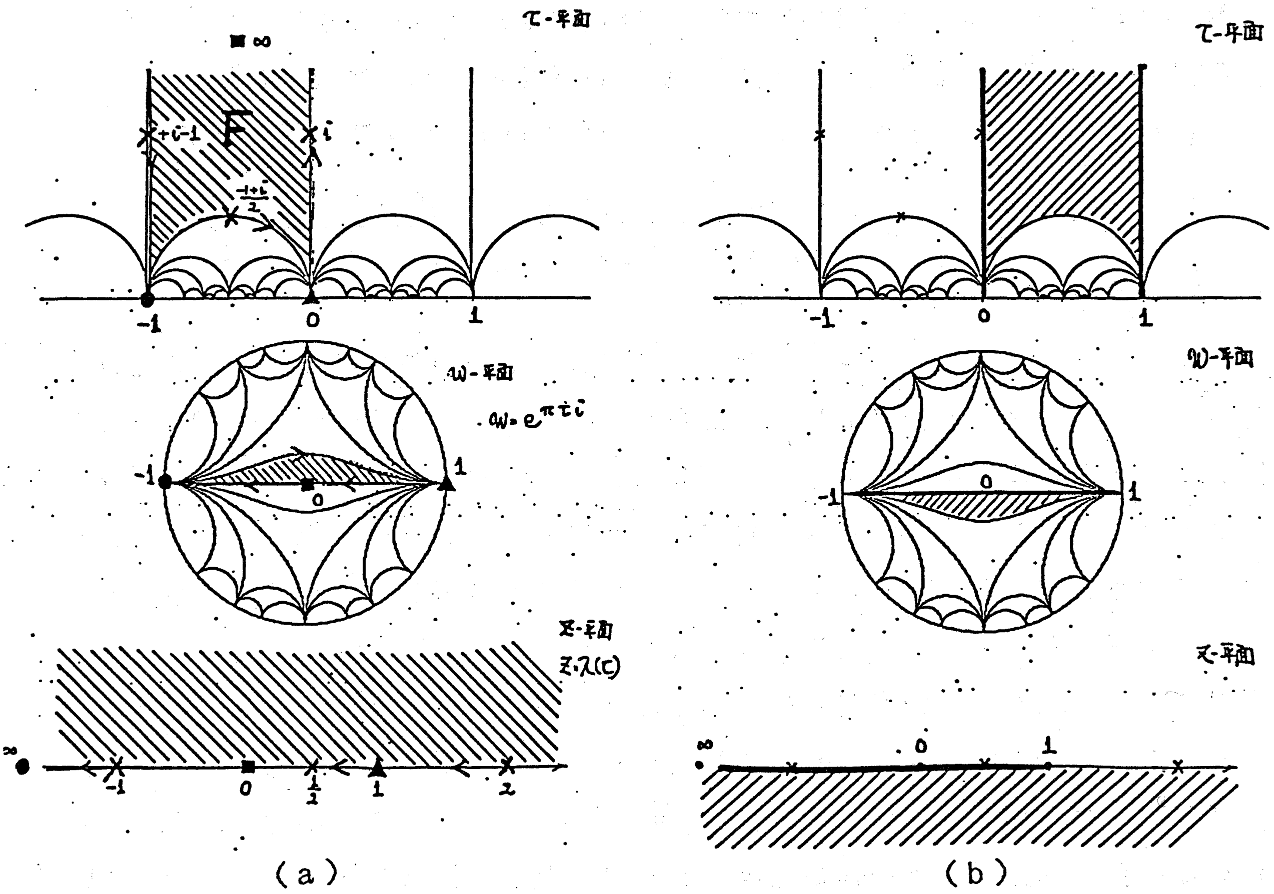
について詳細に調べる．

まず，$\phi_\infty(w)$ で $w = e^{\pi\tau i}$ とおいてできるτの関数を考える．この関数は，通常，$\lambda(\tau)$と表され，普通はこの関数を楕円 modular 関数という．$\lambda(\tau)$は，定義から明かなように，上半平面を定義域とする正則な関数である．この関数については，写像としての性質（定義域の上半平面をどの様に写像するか等）が詳細に調べられており，写像$z=\lambda(\tau)$はτ平面の上半平面をz平面－{0，1}を無限多重に覆うリーマン面に写像することが知られている（[5]，[6] 参照）．また，より詳細な領域の対応も知られており，領域$F=\{\tau \mid \mathrm{Im}\ \tau>0,\ -1<\tau<0,\ |\tau+1/2|>1/2\}$がz平面の上半平面に（等角に）対応し，領域Fの境界上の点$\tau=0$，-1，∞ がz＝1，∞，0 に対応する．$\lambda(\tau)$の定義域の残り部分（＝τ平面の上半平面－F）とz平面（リーマン面）との対応については，領域Fとz平面の上半平面との対応を鏡像の原理を用いて拡張することによって得られることが知られている．

次に，いま問題となっている写像　$z = \phi_\infty(w)$ を考える．まず，w平面の単

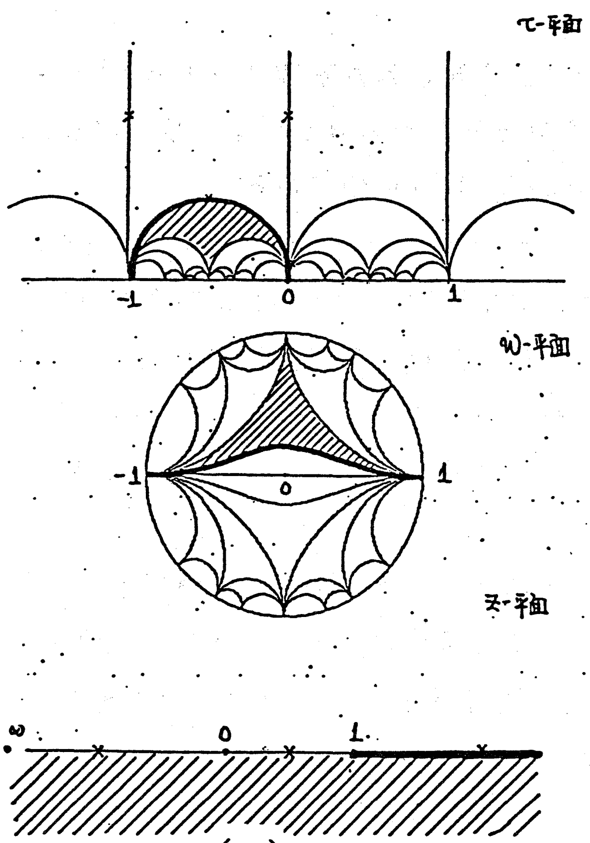
位円が，写像 $w = e^{\pi\tau i}$ によって，τ 平面の領域 $R = \{\tau \mid \mathrm{Im}\ \tau > 0, -1 \leqq \tau < 1\}$ に対応することに注意する．このことから容易にわかるように，写像 $z = \phi_{\infty}(w)$ によってw平面の単位円がどのように写像されるかをみるためには，τ 平面の領域F，および，Rに含まれるFの鏡像（鏡映を何度も適用したものも含む）の $z = \lambda(\tau)$ による像と $w = e^{\pi\tau i}$ による像との対応を調べればよい．

図４の（ａ），（ｂ），（ｃ）にこれを調べた結果の一部を示す．そして，図５に，結果のまとめとして，ｚ平面の実軸上の０，１，∞がｗ平面のどの点と対応するかを示す．



（ａ）　（ｂ）

図４　τ 平面の領域F，および，Fの鏡像（鏡映を何度も適用したものも含む）の $z = \lambda(\tau)$ による像と $w = e^{\pi\tau i}$ による像



（c）

図４（続き）

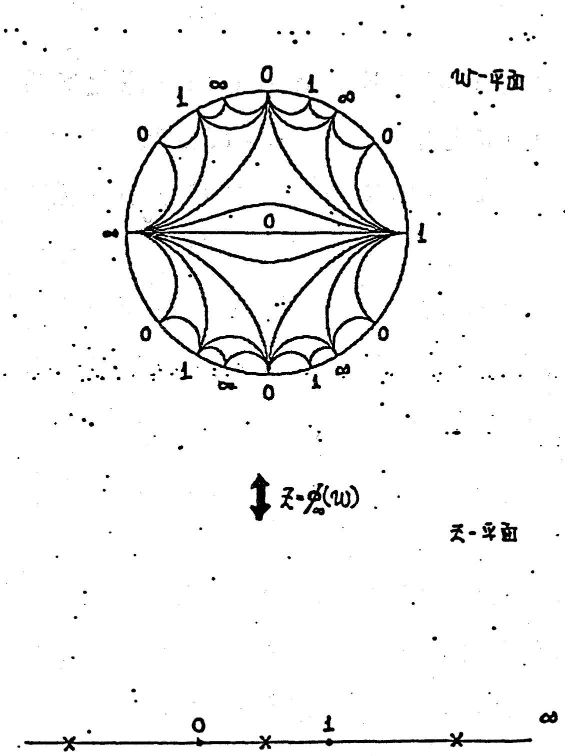


図５　写像　$z=\phi_\infty(w)$　によって ｚ平面の実軸上の０，１，∞がｗ平面のどの点と対応するかを示す．

図４，図５から分かるように，写像　$z=\phi_\infty(w)$　の値域の成すリーマン面は，$-\log(1-z)$が定めるリーマン面の各分枝（ただし，主なる分枝は除く）に$z=0$を分岐点として$\log(z)$の定めるリーマン面を張り合わせたような形をしている．従って，変数変換　$z=\phi_\infty(w)$　を用いたべき級数(2-1)の解析接続では，主なる分枝以外の分枝において$z=0$が分岐点になるので，そこでの関数値を求めることが出来ない．このことは，初めの予想が正しくないことを示している．

４．究極の変数変換は存在するか？

予想は否定されてしまったわけであるが，ここでは，基本に立ち帰って，３．の冒頭に述べた意味での究極の変数変換は存在するかどうかを考えてみる．

究極の変数変換をみつけることは，単位円内部と$-\log(1-z)$が定めるリーマン面とを一対一に対応させる双正則な写像をみつけることに対応する．ところが，単位円内部と$-\log(1-z)$が定めるリーマン面とは等角同値ではなく，この２つの領域の間に一対一双正則な写像は存在しないのである．このことは，

次の有名なＫｏｅｂｅの一意化定理，および，よく知られた事実“－ｌｏｇ(１－ｚ)が定めるリーマン面は複素平面と等角同値である”から導かれる．したがって，３．の冒頭に述べた意味での究極の変数変換は存在しないのである．

Ｋｏｅｂｅの一意化定理 ————————————————————

単連結リーマン面は，複素球面，複素平面，単位円内部の何れかに等角同値である．（勿論，複素球面，複素平面，単位円内部は互いに等角同値ではない．）

————————————————————————————

（この定理はリーマン面関連の本には大抵書いてある．例えば，[8]などを参照せよ．）

《注意１》　－ｌｏｇ(１－ｚ)が定めるリーマン面が複素平面と等角同値であることはよく知られた事実であるが，参考までに，図６に，－ｌｏｇ(１－ｚ)が定めるリーマン面が写像ｚ＝１－ｅ^{w}によって一意化されること（リーマン面の分枝と複素平面内の領域との対応関係）を示す．

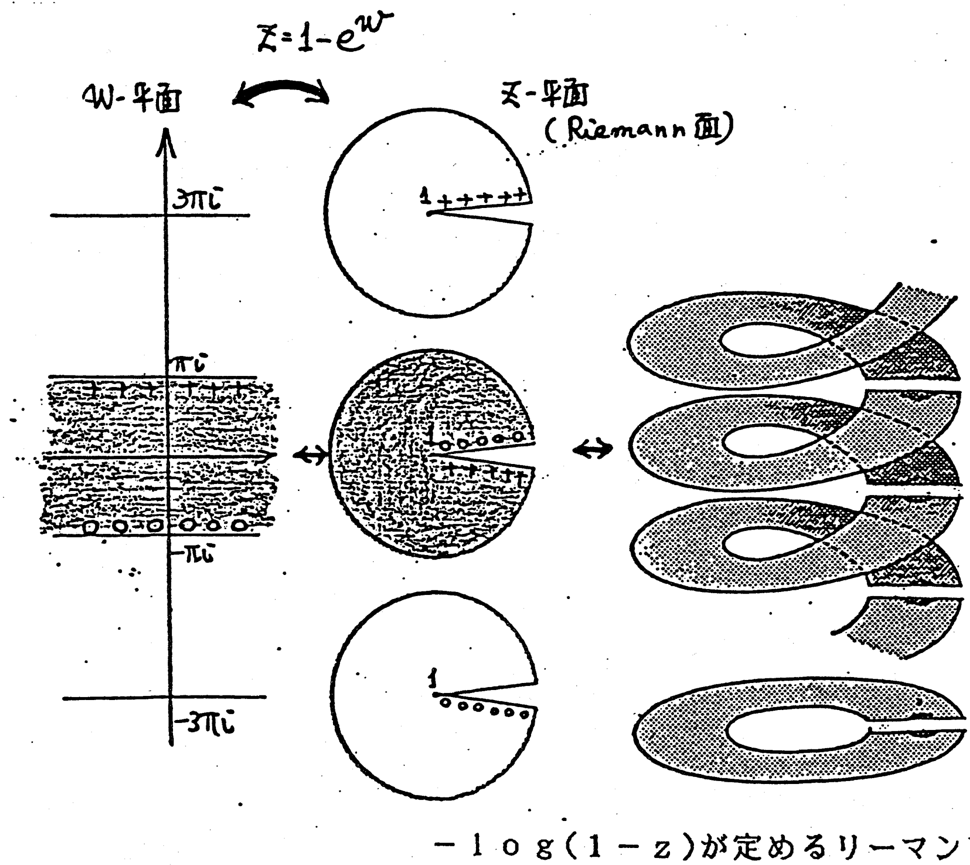


図６　－ｌｏｇ(１－ｚ)が定めるリーマン面の写像ｚ＝１－ｅ^{w}による一意化
（リーマン面の分枝と複素平面内の領域との対応関係）

$-\log(1-z)$が定めるリーマン面が写像$z=1-e^w$によって一意化されるという事実は，べき級数(2-1)が，変数変換$z=1-e^w$を用いることによって，べき級数(2-1)から定まるリーマン面（$=-\log(1-z)$が定めるリーマン面）全体に解析接続されることを示している．従って，べき級数(2-1)の解析接続を考える限り，変数変換$z=1-e^w$こそが究極の変数変換であると言えるーー殆ど自明のことであるがーー．

5．楕円 modular 関数を用いた変数変換が最適（＝究極）の変換になる関数発見！

以上みてきたように，関数(2-1)の解析接続を考えている限り，楕円 modular 関数を用いた変数変換は究極の変数変換にはなり得ない．従って，高橋先生が文献[1]に述べられていることは間違い（または，なにかの勘違い）なのではないかとの疑念が生ずる．しかし，高橋先生は文献[8]においても変数変換を用いた解析接続について書いておられ（このことは，藤野清次氏（計算流体力学研究所）にお教えいただきました），それを読んだときこの疑念は一掃された．というのも，その中で，高橋先生は例としてべき級数

(5-1)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$$

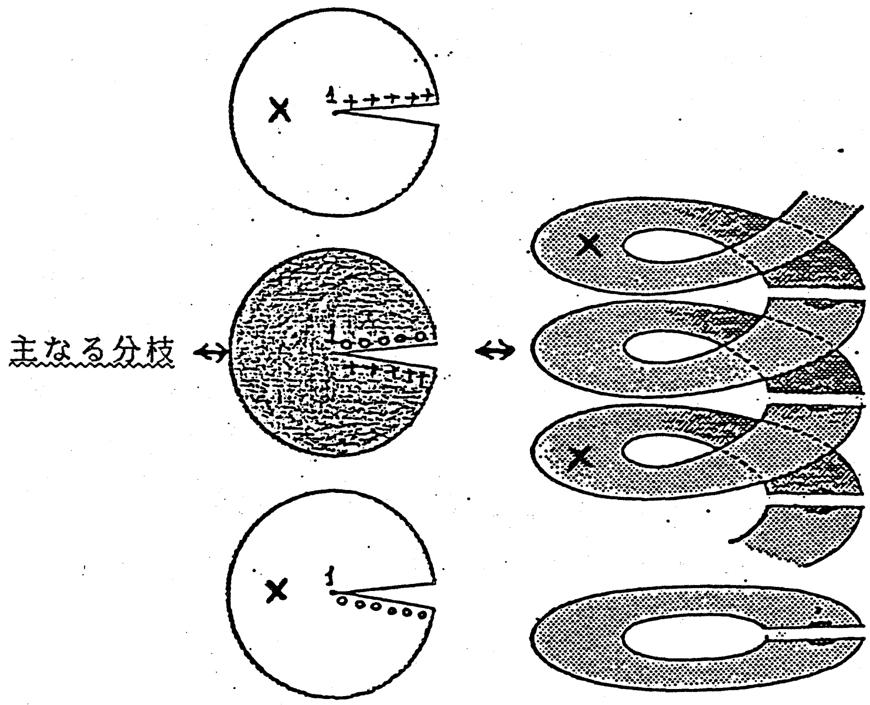
を扱っておられ，このべき級数を解析接続していくと，その定義域が3．で述べたような$-\log(1-z)$が定めるリーマン面の各分枝（ただし，主なる分枝は除く）に$z=0$を分岐点として$\log(z)$の定めるリーマン面を張り合わせたような形のリーマン面になる（注意1参照）ことを注意しておられるからである．

3．で述べたようにこのリーマン面は，写像 $z=\phi_\infty(w)$ の値域の成すリーマン面と同じであり，したがって，この関数の解析接続に関しては，楕円 modular 関数を用いた変数変換 $z=\phi_\infty(w)$ が究極の変数変換となる．推測であるが，文献[1]においても，高橋先生が変数変換を用いた解析接続について書いておられるとき，頭の中には例として(5-1)のようなべき級数があり，それで，楕円 modular 関数を用いた変数変換が最適（＝究極）の変換であると書かれたのではないかと思われる．

《注意1》 このことは，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = \int_0^z \frac{-\log(1-u)}{u}\,du$$

なる関係があること（高橋先生も少し述べて居られる）から容易にわかる（図7）



－ｌｏｇ（１－ｕ）／ｕが定めるリーマン面

図７　関数 －ｌｏｇ（１－ｕ）／ｕの特異点　（×：特異点）

関数 －ｌｏｇ（１－ｕ）／ｕの特異点はリーマン面の主なる分枝を除く各分枝上のｕ＝０にあり，したがって，－ｌｏｇ（１－ｕ）／ｕの積分によって定義される関数においては，その点は分岐点となる．

《注意２》　べき級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

によって定義される関数は Dilogarithm または Spencer's Integral とよばれ，関数等式などいろいろな性質が知られている[9]．このことは，二宮市三造先生（中京大学）にお教えいただきました．

終わりに

以上，紆余曲折があったものの楕円 modular 関数を用いた解析接続の理論的意味がなんとかわかり，高橋先生が考えておられたことが理解できたようである．ただし，まだ，楕円 modular 関数を用いた解析接続の実際の関数の数値計算への応用という大きな課題がのこっている．今後の課題としたい．

参考文献

[1] 高橋秀俊：“複素関数論と数値解析”，京都大学数理解析研究所講究録，No. 253 (1975), pp. 24-37.

[2] A. W. Davis: “Exact distribution of Hotelling's generalized T_0^2”, Biometrika, Vol.57 (1970), pp. 187-191.

[3] 森正武：数値解析法，朝倉書店，1984.

[4] W. Niethammer: “Numerical application of Euler's series trasformation and its generalization”, Numer. Math., Vol.34(1980), pp. 271-283.

[5] 辻正次：複素函数論，槇書店，1968.

[6] 笠原乾吉：複素解析，実教出版，1978.

[7] 及川廣太郎：リーマン面，共立出版，1987.

[8] 高橋秀俊：“数値計算の話”，科学，Vol.45(1975), pp. 706-713.

[9] A. Abramowitz and I. B. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, NBS Appl. Math. Series 53, 1964.