数理解析研究所講究録
第717巻1990年90-103

加速可能集合と加速法

長崎総合科学大　長田直樹　(Naoki Osada)

1. はじめに

収束の遅い数列や級数の極限値を求めるには，加速法が必要になる．数列変換Tが，数列の集合$\mathscr{S}$のすべての数列を加速するとき，$\mathscr{S}$は加速可能集合と呼ばれる．数列(S_n)が$\mathscr{S}$に属すことが事前に分かれば，Tを用いて加速できる．

自然数全体の集合を$\mathbb{N}$とする．収束する実数列全体の集合を$\mathscr{C}$とし，$\mathscr{C}$の部分集合$\mathscr{C}^*$を

$$\mathscr{C}^*=\{(S_n)\in\mathscr{C} \mid \exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} S_n\neq S_m \text{ for } \forall m>N\}$$

により定義する．Sに収束する数列$(S_n)\in\mathscr{C}^*$が極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S}{S_n-S}=\lambda$$

を持つとき，$|\lambda|\leqq 1$ である．$\mathscr{C}^*$の２つの部分集合ＬＩＮ，ＬＯＧは

$$\mathrm{LIN}=\{(S_n)\in\mathscr{C}^* \mid -1\leqq\lambda<1,\ \lambda\neq 0\}$$

$$\mathrm{LOG}=\{(S_n)\in\mathscr{C}^* \mid \lambda=1\}$$

により定義される．それぞれの元を線型収束列，対数収束列という．また，ＬＯＧの部分集合ＬＯＧＳＦは

$$\mathrm{LOGSF}=\{(S_n)\in\mathrm{LOG} \mid \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}=1\}$$

により定義される．よく知られているように，ＬＩＮは Aitken δ^2法により加速可能となる(Henrici[4])．また，ＬＯＧおよびＬＯＧＳＦは，Delahaye と Germain-Bonne [3] が示したように，加速可能ではない．そこで，ＬＯＧＳＦの加速可能な部分集合を求めることが問題となる．この問題に対してKowalewski [5]は詳細な研究を行った．その中で彼女は，与えられた数列の集合から数列変換を得る方法として，ＴＳＥ(technique du sous-ensemble)と呼ばれる手法を用い

ている．ＴＳＥは，加速可能集合や数列変換の核を調べる上で，有益な道具であるにもかかわらず，これまでほとんど注目されなかった．

本報告では，ＴＳＥを定式化し，ＴＳＥから得られる数列変換の核について述べる．つづいて，ＬＯＧＳＦのある部分集合にＴＳＥを適用し，得られる数列変換$T^{[m]}$の核や$T^{[m]}$による加速可能集合について調べる．さらに，$T^{[m]}$を典型的な数列に適用した場合の誤差の漸近評価も述べ，数値例を与える．

2．基本的定義

$\mathscr{S}$，$\mathscr{T}$を数列の集合とする．数列変換$T:\mathscr{S}\rightarrow\mathscr{T}$と$(S_n)\in\mathscr{S}$に対し $(T_n)=T(S_n)$ とおく．

Tが$(S_n)\in\mathscr{S}$に対し完全であるとは，T_mが存在するような任意の自然数mに対し

$$T_m=\lim_{n\to\infty}S_n$$

が成り立つときいう．Tによって完全となる最大の集合をTの核という．

Tが$(S_n)\in\mathscr{S}$を加速するとは， $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ とおいたとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n-S}{S_n-S}=0$$

となるときいう．数列の集合$\mathscr{S}$が加速可能であるとは，$\mathscr{S}$上定義された数列変換Tが存在して，$\mathscr{S}$の全ての数列がTにより加速されるときいう．

3．ＴＳＥ

実数全体の集合をＲとする．自然数k，R^{k+2}の開集合$U_n(n>k)$，U_nで連続な実数値関数$f_n(x_1,\ldots,x_{k+2})$，および，$\mathscr{C}$の部分集合$\mathscr{S}$が存在し，任意の$(S_m)\in\mathscr{S}$と $n>k$ に対し

$$(S_{n-k},\ldots,S_n,S)\in U_n$$

が成立するものと仮定する．ここでSは(S_m)の極限値である．さらに，$\mathscr{S}$の部分集合$\mathscr{T}$が，Ｒの空でない部分集合Ｉにより

$$\mathscr{T}=\{\ (S_n)\in\mathscr{S}\mid\exists\alpha\in I\ \ \text{s.t.}\ \lim_{n\to\infty}f_n(S_{n-k},\ldots,S_n,S)\ =\alpha\}$$

と表されているものとする．

$\mathscr{T}$に対するＴＳＥとは，$\mathscr{T}$を定義する関数f_nから以下のように数列変換を導く手法である．

3.1. 第１種のＴＳＥ

各$n>k+1$に対し，$k+3$変数関数F_nを

$$F_n(x_1,\dots,x_{k+3})=f_n(x_2,\dots,x_{k+2},x_{k+3})-f_{n-1}(x_1,\dots,x_{k+1},x_{k+3})$$

により定義する．R^{k+2}の開集合V_nとV_nで連続な関数g_nが存在して，任意の$(x_1,\dots,x_{k+2})\in V_n$ に対し

$$(x_2,\dots,x_{k+2},g_n(x_1,\dots,x_{k+2}))\in U_n,$$

$$(x_1,\dots,x_{k+1},g_n(x_1,\dots,x_{k+2}))\in U_{n-1},$$

$$F_n(x_1,\dots,x_{k+2},g_n(x_1,\dots,x_{k+2}))=0$$

が成立すると仮定する．このとき，$\mathscr{S}$の部分集合

$$\mathscr{D}=\{\ (S_n)\in\mathscr{S}\mid(S_{n-k-1},\dots,S_n)\in V_n\ \text{for}\ \forall n>k+1\ \}$$

を定義域とする数列変換$T:(S_n)\to(T_n)$

$$T_n=g_n(S_{n-k-1},\dots,S_n)\qquad n>k+1$$

が得られる．Tの核は

$$\mathscr{N}=\{\ (S_n)\in\mathscr{D}\mid\exists\alpha\in R\ \text{s.t.}\ f_n(S_{n-k},\dots,S_n,S)=\alpha\ \text{for}\ \forall n>k\ \}$$

に含まれる．とくに，R^{k+3}の開集合W_n（$n>k+1$）が存在して，

$$F_n(x_1,\dots,x_{k+3})=0,\qquad (x_1,\dots,x_{k+3})\in W_n$$

と

$$x_{k+3}=g_n(x_1,\dots,x_{k+2}),\qquad (x_1,\dots,x_{k+2})\in V_n$$

が同値なとき，Tの核は$\mathscr{N}$に一致する．

U_nとf_nがnに無関係なときは，F_n,V_n,g_nもnに無関係である．それぞれ，U,f,F,V,gと表すと，数列変換Tは

$$T_n=g(S_{n-k-1},\dots,S_n)\qquad n>k+1$$

となる．

3.2. 第２種のＴＳＥ

数列$(S_n)\in\mathscr{T}$ に対し極限値

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}f_n(S_{n-k},\dots,S_n,S)$$

が既知の場合を考える．各$n>k$に対し，$k+2$変数関数$F^\alpha{}_n$を

$$F^\alpha{}_n(x_1,\dots,x_{k+2})=f_n(x_1,\dots,x_{k+2})-\alpha$$

により定義する．さらに，R^{k+1}の開集合$V^\alpha{}_n$と$V^\alpha{}_n$で連続な関数$g^\alpha{}_n$が存在して

$$F^{\alpha}{}_n(x_1,\ldots,x_{k+1},g^{\alpha}{}_n(x_1,\ldots,x_{k+1}))=0, \qquad (x_1,\ldots,x_{k+1})\in V^{\alpha}{}_n$$

が成立すると仮定する．このとき，$\mathscr{S}$の部分集合

$$\mathscr{D}^{\alpha}=\{\ (S_n)\in\mathscr{S}\ |\ (S_{n-k},\ldots,S_n)\in V^{\alpha}{}_n \text{ for } \forall n>k\ \}$$

を定義域とする数列変換$T^{\alpha}:(S_n)\to(T^{\alpha}{}_n)$

$$T^{\alpha}{}_n=g^{\alpha}{}_n(S_{n-k},\ldots,S_n) \qquad n>k$$

が得られる．数列変換T^{α}の核は，

$$\mathscr{N}^{\alpha}=\{\ (S_n)\in\mathscr{D}^{\alpha}\ |\ f_n(S_{n-k},\ldots,S_n,S)=\alpha \text{ for } \forall n>k\ \}$$

に含まれる．とくに，R^{k+2}の開集合$W^{\alpha}{}_n$（$n>k$）が存在して，

$$F^{\alpha}{}_n(x_1,\ldots,x_{k+2})=0, \qquad (x_1,\ldots,x_{k+2})\in W^{\alpha}{}_n$$

と

$$x_{k+2}=g^{\alpha}{}_n(x_1,\ldots,x_{k+1}), \qquad (x_1,\ldots,x_{k+1})\in V^{\alpha}{}_n$$

が同値なとき，T^{α}の核は$\mathscr{N}^{\alpha}$に一致する．

4．基本的例

前節においてU_n,V_n,W_n,f_n,F_n,g_nがnに無関係の場合を考える．

$$U=\{\ (x,y,z)\in R^3\ |\ x\neq z\ \},$$

$$f(x,y,z)=\frac{y-z}{x-z},$$

$$\mathscr{S}=\mathscr{C}^*$$

とする．このとき，

$$I=[-1,0)\cup(0,1)$$

とすると $\mathscr{T}$＝ＬＩＮ であり，

$$I=\{1\}$$

とすると $\mathscr{T}$＝ＬＯＧ となる．

ＬＩＮあるいはＬＯＧに，第１種のＴＳＥを適用する．

$$F(x,y,z,w)=\frac{z-w}{y-w}-\frac{y-w}{x-w}$$

とおき，$F(x,y,z,w)=0$ をwについて解くと

$$w=x-\frac{(y-x)^2}{z-2y+x}=y-\frac{(y-x)(z-y)}{z-2y+x}=z-\frac{(z-y)^2}{z-2y+x}$$

となるので，得られる数列変換はAitken δ^2-process

$$T_n = S_{n-2} - \frac{(\Delta S_{n-2})^2}{\Delta^2 S_{n-2}}$$

である．ここで，Δは

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n, \qquad \Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$$

を表す．そこで

$$g(x,y,z) = x - \frac{(y-x)^2}{z-2y+x}$$

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z-2y+x \neq 0,\ x \neq y,\ y \neq z \}$$

$$W = \{ (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid (x,y,z) \in V,\ x \neq w,\ y \neq w \}$$

とおくと

$$F(x,y,z,w) = 0, \qquad (x,y,z,w) \in W$$

と

$$w = g(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in V$$

は同値である．したがって，Tの定義域は

$$\mathscr{D} = \{ (S_n) \in \mathscr{C} \mid \Delta^2 S_n \neq 0 \text{ and } \Delta S_n \neq 0 \text{ for } \forall n \in \mathbf{N} \}$$

であり，TはＬＩＮ$\cap \mathscr{D}$を加速する．また，Tの核は

$$\mathscr{N} = \{ (S_n) \in \mathscr{D} \mid \exists \lambda (0 < |\lambda| < 1) \quad \text{s.t. } S_n = S + (S_1 - S)\lambda^{n-1} \text{ for } \forall n \in \mathbf{N} \}$$

である．(Brezinski[1,p.40])．

なお，$(S_n) \in$ ＬＩＮのとき，$\lim_{n\to\infty} \Delta S_{n+1}/\Delta S_n < 1$ (Wimp[7,p.6])だから，nが十分大きいときには，$\Delta^2 S_{n-2} \neq 0$である．(Henrici[4,p.73])．よって，

$$\tilde{T}_n = \begin{cases} T_n & \text{if } \Delta^2 S_{n-2} \neq 0 \\ S_n & \text{if } \Delta^2 S_{n-2} = 0 \end{cases}$$

はＬＩＮ全体を加速する．

5．数列変換$T^{[m]}$

Sに収束する数列$(S_n) \in \mathscr{C}^*$に対し

$$e_n = S_n - S, \quad \lambda_n = 1 - e_{n+1}/e_n$$

とおく．ＬＯＧの部分集合$\mathscr{L}_0$を

$$\mathscr{L}_0 = \{ (S_n) \in LOGSF \mid \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = 0 \}$$

により定義する．$\mathscr{L}_0$は対数収束数列のなかでも特に収束が遅い．そこで，$\mathscr{L}_0$の加速可能な部分集合をＴＳＥを用いて求める．

はじめに繰り返し対数 $\log^{[m]}x$ と関数 $L^{[m]}x$ を定義しておこう：

$$\log^{[0]}x = x,$$

$$\log^{[m]}x = \log(\log^{[m-1]}x) \qquad m = 1,2,...$$

$$L^{[0]}x = x,$$

$$L^{[m]}x = L^{[m-1]}x \ \log^{[m]}x \qquad m = 1,2,...$$

$\log^{[m]}x$および$L^{[m]}x$の定義域は

$$\{ x \in R \mid \log^{[m-1]}x > 0 \}$$

である．

ＬＯＧＳＦの部分集合の次のような２つの系列を考える：$m = 0,1,2,...$に対し

$$\mathscr{S}^{[m]} = \{ (S_n) \in LOGSF \mid \exists \alpha > 0 \ \text{s.t.} \lim_{n\to\infty} L^{[m]}n \cdot \lambda_n = \alpha \},$$

$$\mathscr{T}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathscr{S}^{[m]} \mid \lim_{n\to\infty} L^{[m]}n \Delta \varepsilon_n = 0 \}.$$

ここで，$\varepsilon_n = L^{[m]}n\lambda_n - \alpha$，$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ とする．

いま，$\mathscr{S}^{[m]}(m = 0,1,2,...)$に第１種のＴＳＥを適用する．３節の$U_n, f_n$として

$$U_n = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 \neq x_3 \}$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = L^{[m]}(n-1) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_3}$$

とおく．

$$F_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_n(x_2, x_3, x_4) - f_{n-1}(x_1, x_2, x_4) = 0$$

つまり

$$L^{[m]}(n-1) \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_4} = L^{[m]}(n-2) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_4}$$

をx_4について解くと

$$x_4 = x_2 + \frac{L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) - L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)}$$

となる.

$$V_n = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) \neq L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2),\ x_1 \neq x_2,\ x_2 \neq x_3 \}$$

$$W_n = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (x_1, x_2, x_3) \in V_n,\ x_2 \neq x_4 \}$$

$$g_n(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \frac{L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) - L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)}$$

とすると

$$F_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_n$$

と

$$x_4 = g_n(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in V_n$$

は同値になる.

3節の結果より，数列変換$T^{[m]}$を得る：

$$T^{[m]}{}_n = S_{n-1} + \frac{L^{[m]}(n-1)\Delta S_{n-1}\Delta S_{n-2}}{L^{[m]}(n-2)\Delta S_{n-2} - L^{[m]}(n-1)\Delta S_{n-1}}, \qquad n \geqq n_0$$

ここで，$\log^{[m]}(n_0 - 2) > 0$とする.

$T^{[m]}$の定義域は

$$\mathscr{D}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathscr{C}^* \mid \Delta S_n \neq 0,\ L^{[m]}(n)\Delta S_n \neq L^{[m]}(n+1)\Delta S_{n+1} \text{ for } \forall n \geqq n_0 - 2 \}$$

であり，核は

$$\mathscr{N}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathscr{D}^{[m]} \mid \exists \alpha \in R \text{ s.t. } L^{[m]}n\,\lambda_n = \alpha \}$$

である.

定理1. 整数 $m \geqq 0$ と数列 $(S_n) \in \mathscr{S}^{[m]}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T^{[m]}{}_n - S}{S_n - S} = 0$$

が成り立つための必要十分条件は，$(S_n) \in \mathscr{T}^{[m]}$である.

証明. $(S_n) \in \mathscr{S}^{[m]}$だから，$\alpha > 0$と零に収束する数列$(\varepsilon_n)$が存在して

$$L^{[m]}n\,\lambda_n = \alpha + \varepsilon_n$$

となる.

$$\frac{T^{[m]}{}_n - S}{S_n - S} = \frac{S_{n-1} - S}{S_n - S} + \frac{L^{[m]}(n-1)\Delta S_{n-1}\Delta S_{n-2}}{e_n(L^{[m]}(n-2)\Delta S_{n-2} - L^{[m]}(n-1)\Delta S_{n-1})}$$

$$= \frac{e_{n-1}}{e_n}\left[1 - \frac{(\alpha+\varepsilon_{n-1})(\alpha+\varepsilon_{n-2})}{(\alpha+\varepsilon_{n-1})(\alpha+\varepsilon_{n-2}) - L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2}}\right]$$

より求める結果が得られる. □

系2. $(S_n)\in\mathcal{T}^{[m]}$ に対し,

$$T^{[m]}{}_n - S$$

$$= (S_{n-1} - S)\left[-\frac{L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2}}{(\alpha+\varepsilon_{n-1})(\alpha+\varepsilon_{n-2})} + O((L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2})^2)\right].$$

とくに, $|\varepsilon_{n-1}| + |\varepsilon_{n-2}| = o(L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2})$ のときは

$$T^{[m]}{}_n - S$$

$$= (S_{n-1} - S)[-\alpha^{-2}L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2} + O((L^{[m]}(n-2)\Delta\varepsilon_{n-2})^2)].$$

定理3. 任意の自然数mに対し, $\mathcal{T}^{[m]} \subset \mathcal{L}_0$.

証明. $(S_n)\in\mathcal{T}^{[m]}$に対し, $\alpha>0$と零に収束する数列(ε_n)が存在して

$$L^{[m]}n\ \lambda_n = \alpha + \varepsilon_n$$

$$\lim_{n\to\infty} L^{[m]}n\Delta\varepsilon_n = 0$$

となる. よって

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n}\ \frac{L^{[m]}n(\alpha+\varepsilon_{n+1})}{L^{[m]}(n+1)(\alpha+\varepsilon_n)}$$

$$= (1-\lambda_n)\ \frac{L^{[m]}n}{L^{[m]}(n+1)}\ [1 + O(\Delta\varepsilon_n)]$$

だから

$$L^{[m]}(n+1)\left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$$

$$= L^{[m]}(n+1) - L^{[m]}n + \alpha + \varepsilon_n + O(L^{[m]}n\Delta\varepsilon_n).$$

したがって,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}=\frac{\alpha+\varepsilon_{n+1}}{L^{[m]}(n+1)-L^{[m]}n+\alpha+\varepsilon_n+O(L^{[m]}n\Delta\varepsilon_n)}$$

より，$m>0$のとき

$$\lim_{n\to\infty}(L^{[m]}(n+1)-L^{[m]}n)=\infty$$

であることに注意すれば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}=0$$

が成立する． □

$\mathcal{T}^{[m]}$に関するさらに詳しい性質については，Osada[6]を見よ．

6．加速列$(T^{[m]}{}_n)$の誤差の漸近公式

数列(S_n)がある種の漸近展開を満たす場合の，加速列$(T^{[m]}{}_n)$の誤差の漸近公式$(m=1,2)$を述べる．

命題4．数列(S_n)が，

$$S_n-S$$
$$=(\log n)^\alpha[c_0+\frac{c_1}{n\log n}+\frac{c_2}{n^2\log n}+O(\frac{1}{n^2(\log n)^2})]$$

を満たすものとする．ここで，αは負の実数で，$c_0\neq 0$，$(\alpha/2)+(c_1/c_0)\neq 0$とする．このとき，$(S_n)\in\mathcal{T}^{[1]}$で，

$$T^{[1]}{}_n-S=\frac{c_0}{\alpha^2}(\frac{\alpha}{2}+\frac{c_1}{c_0})\frac{(\log n)^{\alpha+1}}{n}+O(\frac{(\log n)^\alpha}{n}).$$

証明　Maclaurin展開から得られる漸近公式

$$(\log(n+1))^\alpha-(\log n)^\alpha=\frac{\alpha}{n}(\log n)^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{2n^2}(\log n)^{\alpha-1}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}(\log n)^{\alpha-2}+O(\frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^3}),$$

$$\frac{(\log(n+1))^{\alpha}}{(n+1)^{k}}-\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{k}}=-\frac{k(\log n)^{\alpha}}{n^{k+1}}+\frac{\alpha(\log n)^{\alpha-1}}{n^{k+1}}+0\left(\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{k+2}}\right)$$

を繰り返し用いることにより，

$$\varDelta S_n=c_0\alpha\frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n}\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{c_1}{c_0\alpha}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{c_1(\alpha-1)}{c_0\alpha}\right)\frac{1}{n\log n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

$$\frac{\varDelta S_n}{e_n}=\frac{\alpha}{n\log n}\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{c_1}{c_0\alpha}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{c_1}{c_0\alpha}\right)\frac{1}{n\log n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

が得られる．よって，

$$n\log n\frac{\varDelta S_n}{e_n}=\alpha-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{c_1}{c_0}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}-\frac{c_1}{c_0}\right)\frac{1}{n\log n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

これより，$(S_n)\in\mathcal{T}^{[1]}$が成り立つ．

$$\varDelta\varepsilon_n=-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{c_1}{c_0}\right)\frac{1}{n^2}+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}-\frac{c_1}{c_0}\right)\frac{1}{n^2\log n}+0\left(\frac{1}{n^2(\log n)^2}\right)$$

と系２より

$$\begin{aligned}&T^{[1]}{}_n-S\\&=e_{n-1}[-\alpha^{-2}(n-2)\log(n-2)\varDelta\varepsilon_{n-2}+0(((n-2)\log(n-2)\varDelta\varepsilon_{n-2})^2)]\\&=\frac{c_0}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{c_1}{c_0}\right)\frac{(\log n)^{\alpha+1}}{n}+0\left(\frac{(\log n)^{\alpha}}{n}\right)\qquad\square\end{aligned}$$

命題５．数列(S_n)が，

$$S_n-S\sim(\log n)^{\alpha}\left[c_0+\frac{c_1}{\log n}+\frac{c_2}{(\log n)^2}+0\left(\frac{1}{(\log n)^3}\right)\right]$$

を満たすものとする．ここで，αは負の実数で，$c_0\neq0$である．このとき，$(S_n)\in\mathcal{T}^{[1]}$で，

$$T^{[1]}{}_n - S = \frac{c_1}{\alpha^2}(\log n)^{\alpha-1} + O((\log n)^{\alpha-2}).$$

証明. 命題4と同様である.

命題6. 数列(S_n)が,

$$S_n - S$$
$$= (\log^{[2]} n)^{\alpha}[c_0 + \frac{c_1}{n \log n \log^{[2]} n} + O(\frac{1}{n^2 \log n (\log^{[2]} n)^2})]$$

を満たすものとする. ここで, αは負の実数で, $c_0 \neq 0$, $(\alpha/2)+(c_1/c_0) \neq 0$とする. このとき, $(S_n) \in \mathcal{T}^{[2]}$である. さらに

$$T^{[2]}{}_n - S = \frac{c_0}{\alpha^2}(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0})\frac{\log n (\log^{[2]} n)^{\alpha+1}}{n} + (\frac{(\log^{[2]} n)^{\alpha+1}}{n}).$$

証明. 命題4と同様である.

7. 数値例

例1　級数の部分和

$$S_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(\log j)^2}$$

を考える. Euler-Maclaurinの公式より, 漸近展開

$$S_n - S = \frac{-1}{\log n} + \frac{1}{2n(\log n)^2} - \frac{(\log n)+2}{12n^2(\log n)^3}$$
$$+ \frac{3(\log n)^3 + 11(\log n)^2 + 18(\log n) + 12}{360n^4(\log n)^5} + O(\frac{1}{n^6(\log n)^2})$$

が得られる. この漸近展開より

$$S = 2.10974\ 28012\ 36892$$

も計算できる. 命題4より, $(S_n) \in \mathcal{T}^{[1]}$がいえる.

S_nと$T^{[1]}{}_n$の有効桁数（$= -\log_{10}|$誤差$|$）を表1に示す. それぞれ, およそ$\log_{10}(\log n)$, $\log_{10} n$である.

例２　数列

$$S_n=\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{1/2}$$

を考える．２項展開により

$$S_n\sim 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{1/2}{j}(\log j)^{-j}$$

が成り立つ．命題５より，$(S_n)\in\mathcal{T}^{[1]}$がいえる．

S_nと$T^{[1]}{}_n$の有効桁数を表１に示す．それぞれ，およそ$\log_{10}2+\log_{10}(\log n)$，$\log_{10}8+2\log_{10}(\log n)$（$=-\log_{10}(1/8(\log n)^2)$）となっている．

例３　級数の部分和

$$S_n=\sum_{j=4}^{n}\frac{1}{j\log j\,(\log^{[2]}j)^2}$$

を考える．Euler-Maclaurinの公式より，漸近展開

$$S_n-S=\frac{-1}{\log^{[2]}n}+\frac{1}{2n(\log n)(\log^{[2]}n)^2}-\frac{(\log n)(\log^{[2]}n)+\log^{[2]}n+2}{12n^2(\log n)^2(\log^{[2]}n)^4}+O\left(\frac{1}{n^4(\log n)(\log^{[2]}n)^2}\right)$$

が得られる．この漸近展開より

$S=4.10340\ 05972\ 00226$

が計算できる．命題６より，$(S_n)\in\mathcal{T}^{[2]}$がいえる．

S_nと$T^{[2]}{}_n$の有効桁数を表１に示す．それぞれ，およそ$\log_{10}(\log^{[2]}n)$，$\log_{10}n-\log_{10}(\log n)$（$=-\log_{10}((\log n)/n)$）となっている．

表１．$T^{[m]}$変換の有効桁数

	例１		例２		例３	
n	S_n	$T^{[1]}_n$	S_n	$T^{[1]}_n$	S_n	$T^{[2]}_n$
6	0.27	-0.40	0.61	0.47	-0.20	-1.10
7	0.30	-0.08	0.64	0.63	-0.15	-1.49
8	0.33	0.12	0.66	0.76	-0.12	-0.81
9	0.35	0.26	0.69	0.86	-0.09	-0.54
10	0.37	0.37	0.70	0.94	-0.07	-0.38
20	0.48	0.92	0.81	1.37	0.04	0.26
30	0.53	1.18	0.86	1.57	0.09	0.51
40	0.57	1.34	0.89	1.70	0.12	0.66
50	0.59	1.46	0.92	1.79	0.14	0.77
100	0.66	1.82	0.99	2.04	0.18	1.09
200	0.72	2.16	1.04	2.24	0.22	1.39
300	0.76	2.35	1.08	2.34	0.24	1.55
400	0.78	2.48	1.10	2.41	0.25	1.67
500	0.79	2.58	1.11	2.45	0.26	1.76
1000	0.84	2.90	1.16	2.58	0.29	2.04
2000	0.88	3.21	1.20	2.68	0.31	2.31
3000	0.90	3.39	1.22	2.73	0.32	2.47
4000	0.92	3.52	1.23	2.77	0.33	2.59
5000	0.93	3.62	1.24	2.79	0.33	2.68
10000	0.96	3.93	1.28	2.87	0.35	2.95
20000	1.00	4.23	1.31	2.93	0.36	3.23
30000	1.01	4.40	1.32	2.97	0.37	3.39

10進約16桁　　PC-9801VM

8. 結論

数列の集合から数列変換を導き出す方法TSEは，加速可能集合や数列変換の核の研究に役立つ．収束の速度が極めて遅い$\mathscr{L}_0$の部分集合にTSEを適用して得られる変換$T^{[1]}$，$T^{[2]}$は，$1/\log n$や$1/\log(\log n))$のorderで収束する数列を，$1/n, 1/(\log n)^2$あるいは$(\log n)/n$などのorderで収束する数列に変換するので，許容誤差が比較的大きいときには，実用に使える．

$T^{[1]}$，$T^{[2]}$変換は，繰り返し適用や，他の加速法との組み合わせにより，高精度の結果を与えることがある．これについては，今後の課題である．

命題4，5，6は，研究集会の際の鳥居達生教授との討論から示唆を受けた．ここに記して感謝する．

参考文献

[1] C.Brezinski, Accélération de la Convergence en Analyse Numérique, Lecture Notes in Math. 584, Springer-Verlag, 1977.

[2] C.Brezinski, A new approach to convergence acceleration methods, in A. Cuyt (ed.), Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation, D. Reidel Publishing Company, 373-405, 1988.

[3] J.P.Delaheye and B.Germain-Bonne, The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated, SIAM J.Numer.Anal.19(1982), pp. 840-844.

[4] P.Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley and Sons, 1964. [一松・平本・本田共訳，数値解析の基礎，培風館(1973).]

[5] C.Kowalewski, Accélération de la convergence pour certaines suites à convergence logarithmique, Lecture Notes in Math. 888, pp.263-272, Springer-Verlag, 1981.

[6] N.Osada, Accelerable subsets of logarithmic sequences, J.Comp.Appl. Math. (to appear).

[7] J.Wimp, Sequence Transformations and Their Applications, Academic Press, 1981.