数理解析研究所講究録
第718巻 1990年 129-143

「尾関育三氏の予想について」

昭和63年(1988) 10月27日(木) 午後4時〜5時
於：筑波大学 数学系 D814
大阪大学：行者明彦氏述
(木村達雄 記)

G を複素reductive群とする。一般論を御存知でない方は $GL_n(\mathbb{C})$ とか $SO_n(\mathbb{C})$ などの直積と思っておいて下さい。実際この話では $GL_n(\mathbb{C})$ と $SO_n(\mathbb{C})$ しかでてきません。

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とします。そして G が V に作用しているとする。但し $\forall g \in G$ にたいして $v \in V$ を $v \longmapsto gv$ と対応させる写像は $GL(V)$ の元であるとする。このとき、

定義 (G, V) が概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space) であるとは、$^{\exists} v_0 \in V$ があって Gv_0 が V の open set になっていること。以下では省略して P.V. と書く。

f を V 上の、恒等的には零でない多項式

ϕ を G から $\mathbb{C}^{\times}$ への準同型。(こういうのを G の character (指標) という)

このとき、

定義　f が ϕ に対応する相対不変式であるとは
$\forall g \in G,\ \forall v \in V$ に対して $f(gv) = \phi(g) f(v)$ となること
で，このとき $f \leftrightarrow \phi$ と略記する．

Lemma　$f_1 \leftrightarrow \phi,\ f_2 \leftrightarrow \phi$ なら $f_1 = f_2 \times \text{constant}$.

∵)
$$\begin{cases} f_1(gv_0) = \phi(g) f_1(v_0) \\ f_2(gv_0) = \phi(g) f_2(v_0) \end{cases}$$
より $\dfrac{f_1}{f_2}(gv_0) = \dfrac{f_1}{f_2}(v_0) = c$

即ち $\dfrac{f_1}{f_2} \equiv c$ on Gv_0．しかし Gv_0 は open set で
open set 上定数となる有理関数は定数，即ち
$f_1 = c f_2$　//

これは簡単な Lemma だが概均質ベクトル空間の理論の基礎となるものである。
$V^\vee$ を V の dual space とすると G は自然に $V^\vee$ に作用しますが，このとき，次のことが知られている。

① $(G, V^\vee)$ は P.V.
② $f^\vee \leftrightarrow \phi^{-1}$ となる相対不変式 $f^\vee$ が $V^\vee$ 上存在する

そこで $f \leftrightarrow \phi$ より $f^s \leftrightarrow \phi^s$
よって $f^{s+1} \leftrightarrow \phi^{s+1}$, $f^\vee \leftrightarrow \phi^{-1}$ となっているから

f^{s+1} と f^v を適当にくみあわせて ϕ^s と対応する相対不変式が得られそうだが，そうすれば f^s も同じ ϕ^s と対応するから，それらの間に何か関係式が得られるだろう．

実際 $f^v\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x_1, \cdots, x_n)^{s+1}$ が ϕ^s に対応する相対不変式で 従って $s \in \mathbb{N}$ のとき

$= b(s) f(x_1, \cdots, x_n)^s$ となる s に依存する定数 $b(s)$ が存在する．しかし $\frac{\partial}{\partial x_i} f^{s+1} = (s+1) f^s \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 等ゆえ $b(s)$ は s の多項式でなければいけない．

$b(s) = b_0 s^d + b_1 s^{d-1} + \cdots + b_d \in \mathbb{C}[s]$

これを b-関数という．

例）$G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO_n(\mathbb{C}) \ni (t, g)$

$V = \mathbb{C}^n \ni v$

作用を $(t, g)v = t(gv)$ とする（gv は行列の積，t はスカラー倍） このとき，

$f(x_1, \cdots, x_n) = f^v(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ とおくと

これが相対不変式で

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\right)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{s+1}$$

$$= 4(s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^s \quad //$$

これは直接計算すればすぐに出てくる。例えばゲルファント シーロフの超関数の第1巻では こういう関係式を使って超関数の構成とか、あるいは微分方程式の基本解の構成とかを系統だててやっている。即ちこのb-関数を使って系統だててやっており b-関数というのは解析的に重要な不変量であり、更に整数論や表現論にも概均質ベクトル空間の理論が応用されるが、そこでも b-関数が色々なところで表われてくる。 そのように重要な不変量であるから是非とも計算したい。

実は f, $f^{\vee}$ が具体的にわかっても $b(s)$ を計算するのは難しい。むしろ上記のようにすぐ計算できるのは例外中の例外である。

そこで b-関数を求めるアルゴリズムがほしいが M. Sato - M. Kashiwara - T. Kimura - T. Oshima の 1980年の Inv. Math. の論文で $b(s)$ を求めるアルゴリズムが与えられている。 これはいわゆる超局所解析を用いて $b(s)$ を計算するアルゴリズムで、これを用いて

実際にb-関数が色々な場合に計算されている。
例えば、アルゴリズムが確立する以前に佐藤幹夫、新谷卓郎氏などにより既に計算されてる場合があり今引用したSKKOでも実例が計算されているし木村さんも沢山計算しているし，室さん，尾関育三さん，笠井さん，… など沢山の人によって計算されている。

このアルゴリズムが万能ですべて計算できれば，それで話は終わるのですが，残念ながら万能ではなく（既約正則P.V.のなかで）一例だけ計算できないものがある。　この例というのは

(*) $G = GL_5 \times GL_4$

$V = \{(X_1, X_2, X_3, X_4)\ ;\ X_i$ は5次交代行列$\}$

で作用は，

$g \in GL_5$ は $(X_1, X_2, X_3, X_4) \mapsto (gX_1{}^tg, \cdots, gX_4{}^tg)$

$g \in GL_4$ は $(X_1, \cdots, X_4) \mapsto (X_1, \cdots, X_4){}^tg$

例えば

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (X_1, \cdots, X_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (X_1 + \alpha X_2, X_2, X_3, X_4)$$

f も $f^\vee$ も具体的に求まる.

$\deg f = \deg f^\vee = 40$, $\dim V = 40$ ゆえ $f, f^\vee$ は

40変数40次斉次多項式である。

素朴な計算で b-関数を求めようとすると計算量が $40!$ をはるかにこえる.

$$\text{計算量} \gg 40! \sim 10^{48}$$

これでは大変すぎて誰もやりたいとは思わない.

ここで b-関数について尾関育三氏の予想がある

予想 (I. Ozeki)

$$b(s) = (s+1)^8 \left[\left(s+\tfrac{2}{3}\right)\left(s+\tfrac{4}{3}\right)\right]^4 \cdot \left[\left(s+\tfrac{3}{4}\right)\left(s+\tfrac{5}{4}\right)\right]^4$$
$$\left[\left(s+\tfrac{5}{6}\right)\left(s+\tfrac{7}{6}\right)\right]^4 \cdot \left[\left(s+\tfrac{7}{10}\right)\left(s+\tfrac{9}{10}\right)\left(s+\tfrac{11}{10}\right)\left(s+\tfrac{13}{10}\right)\right]^2$$

何もかもきわめて具体的に求まっており, しかもこの一例だけわからないのだから, 方法の純粋さとか無視してどんな手を使っても求めることを考える. そこで b-関数についてわかってることをまとめれば, この予想について何かわかるのではないか, というのがこの話です.

$d = \deg f$, $n = \dim V$ とする．（今の場合は $d = n = 40$ であるが，少し一般に書いておく）

1． $b(s) = b_0 \prod_{j=1}^{d} (s + \alpha_j)$, $\alpha_j \in \mathbb{Q}$, $\alpha_j > 0$

（これは広中の特異点解消理論と D-module の一般論を用いて柏原正樹氏が証明した）

2． $b(-s - \frac{n}{d} - 1) = (-1)^d b(s)$

あるいは

$\{\frac{n}{d} + 1 - \alpha_j\}_{1 \leq j \leq d} = \{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq d}$ ともいえる．

これは佐藤幹夫氏自身によるかなりはやい時期からわかっていた結果です．

3． $b^{exp}(t) \overset{def}{=} \prod_{j=1}^{d} (t - exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j))$

とおく．$exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ は 1 の巾根（$\alpha_j > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Q}$）で $\alpha_j - \alpha_i \in \mathbb{Z}$ なら $exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j) = exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_i)$ ゆえ $b^{exp}(t)$ は $b(s)$ より情報量がへっているがあえてこれを考えると，$b^{exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が一般的に証明できる．　　　これは

vanishing cycle sheaf の monodromy に関する代数幾何的な議論を必要とする。

☆ d, n が与えられたとき 1. 2. 3. をみたす多項式は有限個しかない。

∵) $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ ゆえ $\alpha_j = \dfrac{l_j}{k_j}$, k_j, l_j は互いに素な自然数, とかける。すると $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ は k_j 乗して初めて 1 になる 1 の巾根ゆえ

$$\#\{\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j) \text{ の } \mathbb{Q} \text{ 上の代数共役全体}\} = \varphi(k_j)$$

となる。φ は Euler の関数である。

$b^{\exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ かつ $b^{\exp}(\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)) = 0$

ゆえ $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ の代数共役も $b^{\exp}$ の根である。

従って $d = \deg b^{\exp} \geqq \varphi(k_j)$

ところが Euler 関数 $\varphi(k)$ は $\lim_{k\to\infty} \varphi(k) = \infty$

従って (d = given ゆえ) k_j の可能性は有限個しかない。

一方 $0 < \alpha_j$, $0 < \frac{n}{d} + 1 - \alpha_j$ (1 と 2) ゆえ

$0 < \alpha_j = \dfrac{l_j}{k_j} < \dfrac{n}{d} + 1$ ∴ l_j の可能性も有限個 //

4. $f, f^{\vee}$ は $\mathbb{Z}$-係数にとれる。

そうすると $b(s) \in \mathbb{Z}[s]$ となる。これは簡単なことだがすごく大事なことです。(解析の人は $\mathbb{Z}[s]$ でも $\mathbb{R}[s]$ くらいにしか考えない傾向があった)

5. $\mathbb{F}_q$ を q個の元をもつ有限体とする。

$\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^{\times}, \mathbb{C}^{\times})$ は $(q-1)$次の巡回群ということが知られているから $\frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ と同型である。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^{\times}, \mathbb{C}^{\times}) & \underset{fix}{\cong} & \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ \chi_\alpha & \longleftrightarrow & \alpha \end{array}$$

この同型を1つ fix して $\alpha \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に対応する $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^{\times}, \mathbb{C}^{\times})$ の元を χ_α とかく。

但し $\chi_\alpha(0) = 0$ とおく。

χ_α に f を代入すると $\chi_\alpha(f)$ は $V(\mathbb{F}_q)$ 上の $\mathbb{C}$-valued function となる。(f は $\mathbb{Z}$-係数ゆえ $V(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^n$ 上の関数とみなせる)

この有限体上のフーリエ変換 $\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))$ を考えると これは $V^{\vee}(\mathbb{F}_q)$ 上の $\mathbb{C}$-valued function になる。

有限体上のフーリエ変換というのは、exp のかわりに和を積にうつす character を使って定義するが、ここでは省略する。

$$m(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \#\{1 \leq j \leq d \mid \alpha_j + \alpha \equiv 0 \mod \mathbb{Z}\}$$

とおく。 そうすると、次のことが知られている。

$v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q)$ が $f^\vee(v^\vee) \neq 0$ をみたすとき、

$$|\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)| = q^{-\frac{1}{2}m(\alpha)}$$ となる。

これは Deligne による Weil conjecture の証明を用いる。

この論文はそのうち書きます。

6. 今の例(*)の場合、

$\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)$ ($\alpha = 0, \frac{1}{2}$ のときのみ) が Lie 型の有限単純群の character table の中にあらわれ、表現論的手法で計算できる(川中宣明氏)

よって(*)の場合、$f^\vee(v^\vee) \neq 0$ での $|\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)|$ が二通りに計算できて、それを比べて $m(\alpha)$ が求まる($\alpha = 0, \frac{1}{2}$ のとき)。 これにより

$$\#\{j \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}\} = 8, \quad \#\{j \mid \alpha_j \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\} = 0$$

が得られる。

今の場合，$0 < \alpha_j < \frac{n}{d}+1 = \frac{40}{40}+1 = 2$

従って $\alpha_j \in \mathbb{Z} \ (0<\alpha_j<2) \iff \alpha_j = 1$

従って $b(s)$ の $(s+1)$ の因子は丁度 $(s+1)^8$ であることがわかる．これは尾関予想を support している．

$\alpha_j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z} \ (0<\alpha_j<2) \iff \alpha_j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

従って $b(s)$ には $(s+\frac{1}{2})$, $(s+\frac{3}{2})$ の因子は表われない．

これも尾関さんの予想を support している。　即ち

$$b(s) = \underbrace{(s+1)^8 \left[(s+\tfrac{1}{2})\right]^0 \left[(s+\tfrac{3}{2})\right]^0}_{\text{確定}} \times \cdots$$

7.　$b(s) = b_0 s^d + b_1 s^{d-1} + b_2 s^{d-2} + \cdots + b_d$

であったが，b_0 は計算しやすい．b_1 はまあまあ計算しやすい．b_2 はもう少し難しくなる．b_d はとても難しい．

$(*)$ の場合，

$b_0 = 2^{56} 3^{24} 5^{10}$（阪大の村上順氏，1984．8．20）

（f, $f^\vee$ が $\mathbb{Z}$-係数で $\mathbb{Z}$ 上既約としたとき）．

$b_1 = 40 b_0 = 2^{59} 3^{24} 5^{11}$，　これは b_0 がわかれば

b_1 は $40b_0$ として自動的に得られ，何の新しい情報も与えていない．

b_2 も計算可能．是非誰かにやってほしい．

例えば b_0 は $f^\vee(\mathrm{grad}\log f(v)) = b_0^{-1} f(v)^{-1}$ から計算するが，$b_1, b_2, \cdots$ も同じような idea で表示式が得られる．但し大きな行列式を計算しなければならない．

それでは話が進まないので，次は尾関育三さんの予想が正しいと仮定しよう．そのとき，

(#) $b_2 = 2^{54} 3^{22} 5^9 \cdot 281 \cdot 499$ となる．

実は (#) $\Rightarrow$ $b(s)$ の可能性が7通り．

ここまでくれば あと一押し という感じ．

最後の一押しに関する予想を1つ．

8. G = 単純代数群$/\mathbb{C}$

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

$N \in \mathfrak{g}$ を nilpotent element とする．

$N \xrightarrow[\text{Dynkin-Kostant 理論}]{} \text{P.V.}$ という理論がある．

nilpotent element は表現論で非常に重要な

対象になっていて，例えば nilpotent element に対して springer表現 というものが対応して，この springer表現が最近の有限Chevalley群の表現論の展開の一つの大きな基礎になっているわけです．

nilpotent element というのは，すごく調べにくくて，Dynkin-Kostant理論を用いて その研究を P.V. のところにもちこんでくる．但し P.V. のすべてがでてくるわけではない．

$\mathrm{P.V.} \longrightarrow b_N(s) \longrightarrow b_N^{exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ しかも 根は 1の巾根ゆえ $b_N^{exp}(t)$ は 円分多項式の積になる．

幸なことに 今考えてる P.V. (*) は $G = E_8$ の中に 一つだけ すごく難しい nilpotent element N があって これが，今考えている とてつもなく難しい P.V. (*) に Dynkin-Kostant理論により対応している。

N に対応する b-関数を $b_N(s)$，$b_N^{exp}(t)$ 等とかく．

$$C_N \stackrel{def}{=} \{ g \in G \mid ad(g)N (\stackrel{def}{=} gNg^{-1}) = N \}$$

$|G(\mathbb{F}_q)| = \varphi(q)$ となる ある多項式 φ があるが，

$|C_N(\mathbb{F}_q)| = \varphi_N(q)$ となる $\mathbb{Z}$-係数1変数多項式 φ_N がある。しかも φ も φ_N も $t^p \times$ 円分多項式の積（$\exists p$）と表わせることが知られている。

予想（##）　$b_N^{exp}(t)\,\varphi_N(t) \,|\, \varphi(t)$

尾関予想を仮定すれば成立するし，他の既約 P.V. ではすべて成立している．他に可約な P.V. でもいくつかやるとみな成立している．表現論からするとこれは解釈可能です（Harish-Chandra の微分方程式と P.V. にでてくる相対不変式のみたす微分方程式を同じわく組でとらえて解釈が可能みたいである）

（＊）の場合，

$\varphi_N = \mathrm{constant}$，である．

$\phi_n = n$ th cyclotomic polynomial とすると

$$\varphi(t) = t^{120}\,\boxed{\phi_1^8}\,\phi_2^8\,\boxed{\phi_3^4}\,\boxed{\phi_4^4}\,\phi_5^2\,\boxed{\phi_6^4}\,\phi_7\,\phi_8^2\,\phi_9\,\boxed{\phi_{10}^2}\,\phi_{12}^2\,\phi_{14}\,\phi_{15}\,\phi_{18}\,\phi_{20}\,\phi_{24}\,\phi_{30}$$

尾関予想 $\Rightarrow$ $b_N^{exp}(t) = \phi_1^8\,\phi_3^4\,\phi_4^4\,\phi_6^4\,\phi_{10}^2$

従って $b_N^{exp}(t) \,|\, \varphi(t)$ であるが，ピタッとわっている。

実は　尾関予想 $\Longleftrightarrow$ (#), (##)　となる.