数理解析研究所講究録
第 718 巻 1990 年 223-227

Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain

京大理　野村隆昭　(Takaaki NOMURA)

Riemann 多様体 M 上に, M の等長変換からなる Lie 群 G が推移的に作用しているとしよう. このとき, M 上の微分作用素で, G の作用と可換なもの (G-不変な微分作用素) の研究は, M 上で調和解析を展開する際に重要な役割を果たす. よく知られた結果に, G が半単純 Lie 群で, K がその極大コンパクト群のとき, $M = G/K$ 上の G 不変な微分作用素のなす代数 $\mathbf{D}(M)^G$ は, 不定元が r ($= G/K$ の階数) 個の polynomial algebra に同型である — というのがある [1]. 本稿の目的は, M が複素ユークリッド空間内の有界対称領域で, G が M の正則 (holomorphic) 自己同型がなす Lie 群 (の単位元の連結成分) のとき, $\mathbf{D}(M)^G$ の代数的に独立な生成元を, 有界対称領域の分類を用いず, かつ explicit に書き下すことである. 有界対称領域のカテゴリーとある種の Jordan 3 重系のカテゴリーとは同値である [3], [6], [7] ので, 本稿では Jordan 3 重系による手法を用いる. それは, 自己双対凸錐の場合に筆者が [4] で Jordan 代数を用いたものとほぼ平行である.

§1. Jordan 3 重系

Jordan 3 重系の定義から始めよう. <u>実 Jordan 3 重系</u> V とは, 実ベクトル空間 V に次の (1),(2) をみたす trilinear な写像 (3 重積と呼ぶ) $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : V \times V \times V \to V$ が定義されているものをいう: $\forall a, b, u, v, w \in V$ に対して

(1) $\{u, v, w\} = \{w, v, u\}$,

(2) $\{a, b, \{u, v, w\}\} - \{u, v, \{a, b, w\}\} = \{\{a, b, u\}, v, w\} - \{u, \{b, a, v\}, w\}$.

さらに, 実 Jordan 3 重系 V が <u>エルミート</u> であるとは

(3) V は複素ベクトル空間,

(4) $\{u, v, w\}$ は u, w について $\mathbb{C}$-線型, v について反 $\mathbb{C}$-線型

となっているときをいう.

さて, V をエルミート Jordan 3 重系としよう. V 上の作用素 $u\square v$ ($u, v \in V$) と $Q(z)$ ($z \in V$) を次のように定義する:

$$(u\square v)w = \{u, v, w\}, \qquad Q(z)w = \{z, w, z\}.$$

作用素 $u\square v$ は $\mathbb{C}$-線型, $Q(z)$ は反 $\mathbb{C}$-線型である. 2 つの作用素 A, B に対して, $[A, B] := AB - BA$ とおくとき, 等式 (2) は作用素の等式として

$$[a\square b, u\square v] = ((a\square b)u)\square v - u\square((b\square a)v)$$

と書き直されることに注意しておく(この方が記憶には便利である). 半双線型形式

$$(u, v) := \mathrm{tr}\, u \Box v \tag{1.1}$$

が V 上に正定値な(エルミート)内積を定義するとき, エルミート Jordan 3 重系 V は positive であるといわれる.

例 1. 複素 $p \times q$ 行列の全体を $M_{pq}(\mathbb{C})$ で表し,

$$\{u, v, w\} := \frac{1}{2}(uv^*w + wv^*u) \qquad (u, v, w \in M_{pq}(\mathbb{C}))$$

とおこう. ただし, $v^* = {}^t\overline{v}$ (複素共役転置). このとき,

$$\mathrm{tr}\, u \Box v = \frac{1}{2}(p+q) \cdot \mathrm{trace}(uv^*)$$

(右辺の trace は通常の行列のトレース)

となるから, $M_{pq}(\mathbb{C})$ は positive なエルミート Jordan 3 重系になる. ∎

一般に, G を半単純 Lie 群, K はその極大コンパクト群で, G/K はエルミート対称空間になるものとしよう. G, K の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表し, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする. このとき, $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{c}$ の次元は正で, $Z_0 \in \mathfrak{c}$ が存在して, $\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-, \qquad \mathfrak{p}_\pm \text{は ad } Z_0 \text{ の } \pm i\text{-固有空間}$$

と分解される. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役 (conjugation) を σ で表すとき, $\mathfrak{p}_+$ に 3 重積を

$$\{u, v, w\} := \frac{1}{2}[[u, \sigma(v)], w]$$

で定義すると, $\mathfrak{p}_+$ は positive なエルミート Jordan 3 重系になる(ここで, $\mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可換な部分 Lie 代数になることを使う). 実際, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実型 $\mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$ に関する共役を τ, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Killing 形式を B で表すとき,

$$2\,\mathrm{tr}\, u \Box v = -B(u, \tau(v)) \qquad (u, v \in \mathfrak{p}_+)$$

となる.

本稿を以上の様に, Lie 群, Lie 代数から始めることもできるが, 微分作用素の explicit な表示に, Jordan 3 重系での作用素を使うので, 最初から Jordan 系を用いることにする.

例 2. $\mathfrak{A}$ を形式的実 Jordan 代数とする. ベクトル空間としての $\mathfrak{A}$ の複素化 $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ は自然に複素 Jordan 代数になるが, $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ に

$$\{u, v, w\} := (u\overline{v})w + u(\overline{v}w) - \overline{v}(uw) \tag{1.2}$$

で 3 重積を入れると, $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ は positive なエルミート Jordan 3 重系になる. ここで, $v \mapsto \bar{v}$ は $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{A}$ に関する共役. ∎

有界対称領域が tube 領域に正則同型であるための必要十分条件は, 対応する positive エルミート Jordan 3 重系が形式的実 Jordan 代数の複素化から (1.2) の様にして得られていることである.

以下, 本稿の終わりまで, V を positive なエルミート Jordan 3 重系でしかも単純であるとする. 従って, V には (1.1) により内積が定義される. 各 $z \in V$ に対して, $z\Box z$ は半正定値エルミート作用素なので, その半正定値エルミートな平方根 $(z\Box z)^{1/2}$ が存在する.

$$\|z\|_\infty := \|(z\Box z)^{1/2}\| \qquad ((z\Box z)^{1/2} \text{ の作用素ノルム})$$

とおこう. $\|\cdot\|_\infty$ は z のスペクトル・ノルム と呼ばれるものである.

$$\mathcal{D} := \{\, z \in V\,;\, \|z\|_\infty < 1 \,\}$$

とすると, $\mathcal{D}$ は V の有界対称領域である. 原点 $0 \in \mathcal{D}$ での symmetry は $z \mapsto -z$ で与えられる. この様にして, 任意の有界対称領域が, スペクトル・ノルムについての開単位球として得られる (有界対称領域の Harish-Chandra 実現がこの様になっていることは, Langlands が [2,Lemma 2] ですでに注意している).

$$B(z,w) := I - 2z\Box w + Q(z)Q(w) \qquad (z, w \in V)$$

は V 上の $\mathbb{C}$-線型作用素で, Bergman 作用素 と呼ばれる. 実際, $z, w \in \mathcal{D}$ のとき, $\det B(z,w)$ は $\mathcal{D}$ の Bergman 核と正の定数倍の違いだけである. 特に, $z \in \mathcal{D}$ なら $B(z,z)$ は正定値エルミートであることに注意しておく.

$\mathcal{D}$ の正則自己同型のなす Lie 群の単位元の連結成分を G, 原点 $0 \in \mathcal{D}$ における G の固定部分群を K とする. K は G の極大コンパクト群であり, Cartan の一意性定理を用いることにより, K は V 上の $\mathbb{C}$-線型作用素から成っており, K の $\mathcal{D}$ への作用は $\mathbb{C}$-線型であることがわかる. Bergman 作用素についての基本的な等式を挙げておこう:

$$B(gz, gw) = (d_z g)B(z,w)(d_w g)^* \qquad (g \in G,\ z, w \in \mathcal{D}).$$

ただし, $d_z g(v) := \dfrac{d}{dt} g(z+tv)\Big|_{t=0}$ で, g は正則自己同型ゆえ $d_z g \in GL_{\mathbb{C}}(V)$. そして, $(d_w g)^*$ は $\mathbb{C}$-線型作用素 $d_w g$ の内積 (1.1) に関する adjoint.

§2. 結果

V の各元 v の奇数乗 $v^{(2j-1)}$ を

$$v^{(1)} := v, \qquad v^{(2j+1)} := Q(v)v^{(2j-1)} \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

で定義する. このとき,

$$v^{(2j+1)} = (v\Box v)^j v \tag{2.1}$$

でもある. V の内積 (1.1) を用いて V 上の函数 $f_1, \ldots, f_r$ (r は V の階数) を

$$f_j(v) := (v^{(2j-1)}, v)$$

で定義する. (2.1) と作用素 $v\Box v$ がエルミートであることを用いて, 各 f_j は実数値函数であることがわかる. V を実ベクトル空間とみなすとき, それを $V^{\mathbf{R}}$ と表すことにすると, 各 f_j は $V^{\mathbf{R}}$ 上の多項式函数である. K の $\mathcal{D}$ への作用が $\mathbb{C}$-線型であったから, K は V に $\mathbb{C}$-線型で作用していることになる. $V^{\mathbf{R}}$ 上の K-不変な多項式函数の全体を $\mathrm{Pol}(V^{\mathbf{R}})^K$ と表すことにする.

定理 1. $f_1, \ldots, f_r$ は $\mathrm{Pol}(V^{\mathbf{R}})^K$ の代数的に独立な生成元である. ▮

$z \in \mathcal{D}$ のとき, Bergman 作用素 $B(z,z)$ は正定値エルミートだから, その正定値エルミートな平方根 $B(z,z)^{1/2}$ が存在する. 定理 1 の f_j を用いて

$$p_j(z,v) = f_j(B(z,z)^{1/2}v) \qquad (z \in \mathcal{D},\, v \in V)$$

とおく.

補題 1. 各 $j = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$p_j(z,v) = \left(\left(Q(v)B(z,z)\right)^{j-1} v,\, B(z,z)v\right) \qquad (z \in \mathcal{D}, v \in V). \quad ▮$$

写像 : $V^{\mathbf{R}} \ni v \mapsto Q(v)$, $V^{\mathbf{R}} \ni z \mapsto B(z,z)$ は, 定義から直ちにわかるように, 多項式写像であるから, 補題 1 によって, p_j は $V^{\mathbf{R}} \times V^{\mathbf{R}}$ 上の多項式函数を $\mathcal{D} \times V^{\mathbf{R}}$ に制限したものであることがわかる.

さて, $T^*(\mathcal{D}) \approx \mathcal{D} \times V^{\mathbf{R}}$ を $\mathcal{D}$ の余接束とする. G の $T^*(\mathcal{D})$ への作用は

$$g \cdot (z,v) = (gz,\, (d_z g)^{*-1} v) \qquad (g \in G,\, z \in \mathcal{D},\, v \in V^{\mathbf{R}})$$

である.

補題 2. $p_1, \ldots, p_r$ は $T^*(\mathcal{D})$ 上の G-不変な函数である. ▮

各 p_j に対して, 微分作用素 $p_j(x, \partial/\partial x)$ を

$$p_j(x, \partial/\partial x) e^{\mathrm{Re}(x,y)} = p_j(x,y) e^{\mathrm{Re}(x,y)}$$

で定義する. 補題 2 によって, 各 $p_j(x, \partial/\partial x)$ は $\mathcal{D}$ 上の G-不変な微分作用素である.

定理 2. r 個の微分作用素 $p_1(x, \partial/\partial x), \ldots, p_r(x, \partial/\partial x)$ は $\mathcal{D}$ 上の G-不変な微分作用素がなす代数 $\mathbf{D}(\mathcal{D})^G$ の代数的に独立な生成元である. ▮

REFERENCES

1. S. Helgason, "Groups and geometric analysis," Academic press, New York, 1984.
2. R. P. Langlands, *The dimension of spaces of automorphic forms*, Amer. J. Math. **85** (1963), 99-124.
3. O. Loos, "Bounded symmetric domains and Jordan pairs," Lecture Notes, Univ. California at Irvine, 1977.
4. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone*, J. Reine Angew. Math. **400** (1989), 122–133.
5. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain*, J. Math. Kyoto Univ., to appear.
6. I. Satake, "Algebraic structures of symmetric domains," Iwanami Shoten/Princeton Univ. Press, Tokyo/Princeton, 1980.
7. H. Upmeier, "Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras," North-Holland, Amsterdam, 1985.
8. H. Upmeier, "Jordan algebras in analysis, operator theory and quantum mechanics," Regional Conf. in Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1987.