数理解析研究所講究録
第 718 巻 1990 年 235-246

不変超函数のみたす微分方程式系について

立教大・理 落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai)

§

V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線型空間、H を GL(V) の連結閉部分群とする。V 上の超函数 $u(x)$ が <u>H - 不変</u>であるとは、

$$u(hx) = u(x) \qquad (\forall h \in H)$$

のときをいう。V 上の H-不変な超函数全体を $\mathcal{B}^H(V)$ と書く。$H_1 < H_2 < GL(V)$ を 2 つの連結閉部分群とすると、一般に

$$\mathcal{B}^{H_2}(V) \subset \mathcal{B}^{H_1}(V)$$

が、成りたつ。

<u>問</u> いつ $\mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)$ が、成りたつか。

<u>例</u> $V = \mathbb{R}^{2n}$

$$H_2 = SO_0(n,n) = \left\{ h \in GL(V) \;;\; {}^t h \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \right\}_0 .$$

$$H_1 \cong GL^+(n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \in GL(V) \;;\; g \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det g > 0 \right\}.$$

但し $\{\ \ \}_0$ は単位元連結成分。

上の問は、H_1 と H_2 が、不変超函数のレベルで近いかどうかを聞いていることになる。上の例の場合は、$n=1$ のときは、

$H_1 = H_2$ なので、問は自明に成立するが、$n \geqq 2$ のときは、
$\dim H_1 = n^2 \subsetneqq 2n^2 - n = \dim H_2$ なので、$H_1 \subsetneqq H_2$ である。

ここでは、この問題を微分方程式系の言葉で書いて、その定式化でわかることを記す。また、後半では、いくつかの例を記すことにする。

§

まず、記号の準備から。

H の Lie 環を $\mathfrak{h}$ と書く。$Y \in \mathfrak{h}$ に対し、V 上のベクトル場 L_Y を

$$(L_Y f)(v) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tY)v)\Big|_{t=0} \qquad ({}^\forall v \in V, {}^\forall f \in C^\infty(V))$$

で定義する。このとき、

$$u \in \mathcal{B}^H(V) \iff L_Y u = 0 \qquad {}^\forall Y \in \mathfrak{h}$$

が成りたつ。V 上の(線型偏)微分作用素の成す環の層を $\mathcal{D}$、その大域切断を $D = \Gamma(V, \mathcal{D})$ と書く。(代数的カテゴリーで考える)。D は階数が $\dim V$ の Weyl 代数になる。L_Y は自然に D の元と思えるのでそう思うことにする。さて $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$M = D \Big/ \sum_{Y \in \mathfrak{h}} D L_Y$$

と定義し、この左 D 加群 M を H-不変を定義する微分方程式系と(仮に)いうことにする。このとき、名前の通り、

$$\mathcal{B}^H(V) = \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{B}(V))$$

が成りたつ。

2つの閉部分群 $H_1 < H_2 < GL(V)$ に対しては、Lie環 $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ を経由して、やはり左D加群 M_1, M_2 を得る。一般に $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ から、全射準同型 $M_1 \longrightarrow M_2$ を得るが、

問　いつ $M_1 = M_2$ が成りたつか。

ということが考えられる。実際、$M_1 = M_2$ が成りたてば、$\mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)$ が成りたつ。さて、

$$
\begin{aligned}
& M_1 = M_2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} D L_Y = \sum_{Y \in \mathfrak{h}_2} D L_Y \\
\Leftrightarrow\ & L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} D L_Y \qquad {}^\forall Y' \in \mathfrak{h}_2
\end{aligned}
$$

であるから

$$[\mathfrak{h}] := \{ Y' \in \mathfrak{gl}(V) \ ; \ L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}} D L_Y \}$$

と定義すると、

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{h}_2 < [\mathfrak{h}_1]$$

がわかる。(この定義と下の補題の一部は、小林俊行氏による)

補題（ $[\cdot]$ の性質）

(0)　$\mathfrak{h} < [\mathfrak{h}]$ であって、$[\mathfrak{h}]$ は Lie環。

(1)（単調性）　$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ ならば、$[\mathfrak{h}_1] < [\mathfrak{h}_2]$

(2)（安定性）　$[[\mathfrak{h}]] = [\mathfrak{h}]$

(3)（交わり）　$\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{h}_1]$, $\mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}_2]$ ならば、$[\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2] = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$

(4)　$V_{\mathbb{C}}$ を V の複素化とし、$\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ の複素部分Lie環 $\mathfrak{h}$ について上と同様に定義したものを $[\mathfrak{h}]_{\mathbb{C}}$ と書く。このとき、

$$[\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}]_{\mathbb{C}} = [\mathfrak{g}]\otimes\mathbb{C} \quad .$$

(5) $V = V_1 \oplus V_2$ とする。$[\cdot]$ が $\mathfrak{gl}(V)$ に対し定義されているのを明記するときは $[\cdot]_V$ と書くことにする。このとき、$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{sl}(V_1)$, $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{sl}(V_2)$ ならば、

$$[\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2]_V = [\mathfrak{g}_1]_{V_1} \oplus [\mathfrak{g}_2]_{V_2}$$

(6) $\theta(Y) = -{}^tY \quad (Y \in \mathfrak{gl}(V))$ とし、$\theta\mathfrak{g} = \{\theta(Y) \ ; \ Y \in \mathfrak{g}\}$ とおく。このとき、

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$, $\theta\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ ならば $\theta[\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}]$.

(7) $[\mathfrak{g}] = \cap\{\mathfrak{g}' \ ;$ $\mathfrak{g}$ を含む $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間で、$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}']\}$.

(8) V の開集合 Ω 上の超函数 u に対して、$\mathrm{Ann}(u)$ を

$$\mathrm{Ann}(u) := \{Y \in \mathfrak{gl}(V) \ ; \ L_Y u = 0\}$$

と定義すると、$[\mathrm{Ann}(u)] = \mathrm{Ann}(u)$ 。

注 (5), (6) で、$\mathfrak{sl}(V)$ に入るという仮定をはずすと、一般には不成立。また (8) のように表わせる $\mathfrak{g} = \mathrm{Ann}(u)$ を、(仮に) 函数による特徴付けをもつという。

(2) の証明 $L : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow D$ を展開環 $U(\mathfrak{gl}(V))$ に延ばして、代数準同型 $L : U(\mathfrak{gl}(V)) \longrightarrow D$ を得る。L は単射ではないが、$\mathfrak{gl}(V)$ は単射に入っているので、$\mathfrak{gl}(V)$ を D の部分空間と思うことにすると、$[\mathfrak{g}]$ はその定義から、

$[\mathfrak{g}] = ($ $\mathfrak{g}$ で生成される D の左イデアル $\sum_{Y\in\mathfrak{g}} DL_Y$ の $\mathfrak{gl}(V)$ での切り口$)$

と思える。このことから (2) $[[\mathfrak{g}]] = [\mathfrak{g}]$ が出る //

冒頭の例の場合は、 $\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ， $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{so}(n,n)$ ．

◎ $\begin{cases} n \geqq 3 & \text{ならば } [\mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2 \quad (\text{ゆえに特に } \mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)) \\ n = 2 & \text{のときは } [\mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_1 \end{cases}$

である。

∵ V の座標を $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ ととると，$\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{h}_2$ の L による像はそれぞれ

$\mathfrak{h}_1$: $x_i\partial x_j - y_j \partial y_i \qquad (1 \leqq i,j \leqq n)$

$\mathfrak{h}_2$: $x_i\partial x_j - y_j \partial y_i$ ，$x_i \partial y_j - x_j \partial y_i$ ，$y_i \partial x_j - y_j \partial x_i \quad (1 \leqq i,j \leqq n)$

で生成される。

○ $n \geqq 3$ のとき、$1 \leqq i,j,k \leqq n$ が相異なるならば，

$$\begin{aligned} x_i\partial y_j - x_j \partial y_i = &(x_j\partial y_k - x_k \partial y_j)(x_i \partial x_k - y_k \partial y_i) \\ &+ (x_k \partial y_i - x_i \partial y_k)(x_j \partial x_k - y_k \partial y_j) \\ &+ (x_i\partial y_j - x_j \partial y_i)(x_k\partial x_k - y_k \partial y_k) \end{aligned}$$

であるから、$[\mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_2$ がわかる。逆に $\omega = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ とすると，$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{so}(\omega) = \mathrm{Ann}(\omega)$ だから (8) より $[\mathfrak{h}_2] = \mathfrak{h}_2$ ．合わせて $[\mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2$ 。

○ $n = 2$ のとき．

実は、更に $\mathcal{B}^{H_2}(V) \neq \mathcal{B}^{H_1}(V)$ であるが，ここでは別の(似た)方法を用いる．まず上と同じく $[\mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_2$ は，既知。

さらに (8)で、$\Omega = \{x_1 \neq 0\}$，$u = \delta(x_1y_1 + x_2y_2)Y(x_1y_2)$ とすると．

$$(x_1\partial y_2 - x_2 \partial y_1)u = \delta(y_1)\delta(y_2) \neq 0 \quad \text{で}$$

$\mathrm{Ann}\ u = \langle f_1,\ y_1\partial x_2 - y_2\partial x_1\rangle$ となるから (6) と合わせて

$[f_1] = f_1$ を得る。 //

注　今の例で，V の H_2-, H_1- 軌道分解はそれぞれ，

$$H_2 \begin{cases} \omega^{-1}(t) & ;\ t \in \mathbb{R}^\times \\ \{0\} & \\ \omega^{-1}(0) - \{0\} & \end{cases},\qquad H_1 \begin{cases} \omega^{-1}(t) & ;\ t \in \mathbb{R}^\times \\ \{0\} & \\ \omega^{-1}(0) - \{x=0 \text{ 又は } y=0\} & ^{(*)} \\ \{x=0,\ y\neq 0\} & \\ \{x\neq 0,\ y=0\} & \end{cases}$$

(* n=2 のときは，この軌道は，さらに2つの連結成分に分かれる) となっていて，異なる。一般には，軌道分解が一致することと，$[f_1]=[f_2]$ となることの間に，包含関係はない。

概均質ベクトル空間 $(GL(1)\times GL(n),\ \square\otimes(\Lambda_1\oplus\Lambda_1^*),\ V(n)\oplus V(n)^*)$ と，$(SO(2n),\ \Lambda_1,\ V(2n))$ は，相対不変式が等しいので，それから定義される $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{J}[\alpha]$ は一致する。($\alpha\in\mathbb{C}$)

(但し，$\mathcal{J}[\alpha] = \{P(\alpha)\ ;\ P(s)\in\mathcal{J}\}$，$\mathcal{J} = \{P(s)\in\mathcal{D}[s]\ ;\ \begin{smallmatrix} P(s)f(x)^s=0 \\ s\in\mathbb{C},\ x\in V-S\end{smallmatrix}\}$

S は p.v. の特異集合，f は相対不変式)(記号は [SKKO])。

一方，$\mathcal{M}'_\alpha = \mathcal{D}/\sum_{A\in\mathfrak{g}}\mathcal{D}(\langle d\rho(A)x,\ D_x\rangle - \alpha\,\delta\chi(A))$ の方は，$n\geq 3$ ならば一致し，n=2 ならば，$\alpha=-2$ の時一致しない，ということを左で言っている。$n\geq 3$ の時も，両者の $V_{\mathbb{C}}$ の軌道分解は異なり，$\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}'_\alpha$ となることは，一般論からは出ない。

(なお，n=2 でも $\alpha\neq -2$ ならば，$\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}'_\alpha$ である)

§

他に $[\cdot]$ の計算をしたものを挙げる。

◎ $V = \mathbb{R}^n$ $\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(V)$

このとき、$[\mathfrak{f}] = \mathfrak{f}$ であり、V の原点のデルタ函数 δ によって $\mathfrak{f} = \mathrm{Ann}(\delta)$ と書ける。

◎ $V = \mathbb{R}^n$ $\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{so}(p, n-p)$ $\quad (0 \leq p \leq n)$

このとき $[\mathfrak{f}] = \mathfrak{f}$ であり、$\mathfrak{f}$ に附随した２次形式 ω を用いて、$\mathfrak{f} = \mathrm{Ann}(\omega)$ と書ける。

◎ $V = \mathbb{R}^{2n}$ $\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$

このとき $[\mathfrak{f}] = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$

∵ V の座標を $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ ととり、$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} ; \begin{matrix} {}^tB = B \\ {}^tC = C \end{matrix} \right\}$ に対し、p5 の証明と同様に $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を作る。

$$\begin{cases} x_i^2 \partial x_i = x_i (x_i \partial x_i - y_i \partial y_i) + y_i \, x_i \partial y_i \\ x_i^2 \partial y_j = x_i (x_i \partial y_j + x_j \partial y_i) - x_j \, x_i \partial y_i \\ x_i \partial y_j = \frac{1}{2} (\partial x_i \cdot x_i^2 \partial y_j - \partial y_j \cdot x_i^2 \partial x_i) \end{cases}$$

同様に、$y_i \partial x_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ も作れる。あとは性質(0)より $[\mathfrak{f}] \supset \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を得る。一方 $\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ は $[\cdot]$ で安定なので、$[\mathfrak{f}] = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を得る。 //

◎ $V = \mathbb{R}^{nm} = M(n, m; \mathbb{R})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

$\mathfrak{f}$ の作用は、左からの $SL(n, \mathbb{R})$ のかけざんから来るもの。

このとき $[\mathfrak{f}] = \mathfrak{f}$ 。

この証明のために、

<u>補題</u>　uをVの開集合Ω上定義された超函数で、その台の閉包 $C = \overline{supp(u)} \subset V$ が、代数的集合なるものとする。
このとき、$H_1 = \{ h \in GL(V) \ ; \ hC = C \}$，$\mathfrak{g}_1$ をH_1のLie環とすると、　$Ann(u) \subset \mathfrak{g}_1$

<u>証明</u>　$Ann(u)$に対応する$GL(V)$の連結Lie部分群をHと書く。
任意の$x \in supp(u)$に対して、xのΩ内の近傍Uと、Hの単位元eの近傍Vを$VU \subset \Omega$かつ$Vx \subset U$なるようにとる。
このとき、Hの定義から $(h^*u)|_U = u|_U$　(但し $(h^*u)(x) = u(hx)$)
が、$^\forall h \in V$に対し成立する。故に　$hx \in supp(u) \subset C$　。仮定より $hx \in C$ というのは $h \in H$ に関する代数的関係だから、
$^\forall h \in H$ に対して、$hx \in C$ を得る。故に $h(supp(u)) \subset C$。
閉包をとって $hC \subset C$。これが$^\forall h \in H$ についで成りたつから $H \subset H_1$　即ち　$Ann(u) \subset \mathfrak{g}_1$　//

注　$C = \overline{sing-supp(u)}$　としてもよい。」

これを用いて、元にもどる。$1 \leqq i < j \leqq m$ に対して、uとして
$\{i$列めとj列めが平行$\}$という所に台をもつ、Vの開集合上の$\mathfrak{g}$-不変な超函数（実は測度）をとる。(存在する)。このとき、

$$\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{g}] = [Ann(u)] = Ann(u) \subset \mathfrak{g}_1$$

i, jを動かした$\mathfrak{g}_1$の交わりは$\mathfrak{gl}(n)$になり、これと$\mathfrak{sl}(V)$との交わりが$\mathfrak{g}$なので、$\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$　即ち　$[\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$　を得る//

◎ $V = \mathbb{R}^{nm} = M(n, m ; \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

このとき $[\mathfrak{g}] = \begin{cases} \mathfrak{g} & m \geq n \\ \mathfrak{gl}(V) & m < n \end{cases}$

<u>証明</u> $m \geq n$ のとき、V の n 次小行列式は、$\mathfrak{g}$-相対不変式である。このとき、次の補題がある。

<u>補題</u> f を V 上の実係数多項式で、次の2つをみたすとする。

1) f は $\mathfrak{g}$-相対不変

2) $\{f=0\}$ 上、消える V 上の多項式は、f で割り切れる。

このとき、$[\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} + Ann(f)$

<u>証明</u> f が $\mathfrak{g}$-不変のときは $\mathfrak{g} \subset Ann(f)$ より ok.

f が $\mathfrak{g}$-不変でないときは、$\mathfrak{g}_1 = \{ Y \in \mathfrak{gl}(V) ; L_Y f = c_Y f,\ c_Y \in \mathbb{C} \}$ とおくと、$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} + Ann(f)$。ゆえに $[\mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$ をいえばよい。

$u(x) = Y(f(x))$ とおくと、$\mathfrak{g}_1 \subset Ann(u)$。ゆえに、以下 $Ann(u) \subset \mathfrak{g}_1$ をいえばよい。$Ann(u)$ に対応する $GL(V)$ の連結 Lie 部分群を H_2 とすると、$\forall x \in sing\ supp(u) = \{ y \in V ; p(y) = 0 \}$ に対し $hx \in sing\ supp(u)$ $(\forall h \in H_2)$。即ち、$p(hx) = 0$。

仮定2) より $p(hx)$ は p で割れて、次数をみれば、$p(hx) = c_h p(x)$ と、ある $c_h \in \mathbb{C}$ を用いて書けることがわかる。即ち、

$Ann(u) \subset \mathfrak{g}_1$ //

これを用いると、$m \geq n$ のとき、$[\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ がわかる。

一方 $m<n$ のときは少々面倒で、局所化して帰納法を用いる。

補題　$V=M(n,m;\mathbb{R})$，$(n>m)$ とする。D の左イデアル I_λ を

$$I_\lambda=\sum_{1\leq i,j\leq n} D\left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}\partial_{jk}+\lambda\delta_{ij}\right),\qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

と定義する。このとき、

(1) $\lambda\notin\{0,1,\cdots,m\}$ ならば、$I_\lambda=D$

(2) $\lambda=0$ ならば、$I_\lambda=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} D\partial_{ij}$

(3) $\lambda=m$ ならば、$I_\lambda=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} D x_{ij}$

証明　m に関する帰納法

◦ $m=1$ のとき、

$$\begin{cases}\partial_i\cdot x_i\partial_j-\partial_j(x_i\partial_i+\lambda)=(1-\lambda)\,\partial_j & (i\neq j)\\ x_j(x_i\partial_i+\lambda)-x_i\cdot x_j\partial_i=\lambda x_j \\ \partial_j x_j-x_j\partial_j=1\end{cases}$$

より ok

◦ $m\geq 2$ とする。左 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}_\lambda=\mathcal{D}\underset{D}{\otimes}D/I_\lambda=\mathcal{D}/\mathcal{D}I_\lambda$ を扱う。

まず開集合 $\{x_{11}\neq 0\}$ で考えることとし、そこで次のような新しい座標系をとる。

$$\begin{cases}\tilde{x}_{11}=x_{11} & \\ \tilde{x}_{i1}=x_{i1}/x_{11} & 2\leq i\leq n\\ \tilde{x}_{1j}=x_{1j}/x_{11} & 2\leq j\leq m\\ \tilde{x}_{ij}=x_{ij}-x_{i1}x_{1j}/x_{11} & 2\leq i\leq n,\ 2\leq j\leq m\end{cases}$$

この座標で I_λ の生成元を書くと、

$$\mathcal{D} I_\lambda \big|_{\{x_{11} \neq 0\}} \supset \sum_{i=2}^{n} \mathcal{D}\, \partial \tilde{x}_{i1} + \sum_{2 \leq i, j \leq n} \mathcal{D} \left(\sum_{k=2}^{m} \tilde{x}_{ik}\, \partial \tilde{x}_{jk} + \lambda\, \delta_{ij} \right).$$

帰納法の仮定より $\lambda \notin \{0, 1, \cdots, m-1\}$ ならば、$\mathcal{D} I_\lambda \big|_{\{x_{11} \neq 0\}} = \mathcal{D}$

即ち $\operatorname{supp} \mathcal{M}_\lambda \subset \{x_{11} = 0\}$ となる。対称性より、結局

$\operatorname{supp} \mathcal{M}_\lambda \subset \{0\}$, $\operatorname{Ch} \mathcal{M}_\lambda \subset T^*_{\{0\}} V_{\mathbb{C}}$ を得る。(記号は [HK])。

Fourier 変換して $(\mathcal{M}_\lambda)^F = \mathcal{M}_{m-\lambda}$ だから、$\operatorname{Ch} \mathcal{M}_{m-\lambda} \subset T^*_{V_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$

故に $\lambda \notin \{0, 1, \cdots, m\}$ ならば $\operatorname{Ch} \mathcal{M}_\lambda \subset \{(0, 0)\}$ より $\mathcal{M}_\lambda = 0$。

また $\lambda = m$ のときも $\operatorname{Ch} \mathcal{M}_{m-\lambda} \subset T^*_{V_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$ より $\mathcal{M}_0$ は de Rham 系の直和。しかるに、開集合 $\{x \in V_{\mathbb{C}} \,;\, \operatorname{rank} x = n\}$ 上の重複度 1 であるから、$I_0 = D(\partial)$。 I_m はその Fourier 変換で出る。//

上の補題の(2)から、 $[\mathfrak{g}] = \mathfrak{gl}(V)$ $(m < n)$ を得る。//

◎ $V = M(m, n \,;\, \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m \,;\, \mathbb{R}) + \mathfrak{gl}(n \,;\, \mathbb{R})$

$\mathfrak{g}$ の作用は左右からの各々のかけざんからくるもの。

このとき
$$[\mathfrak{g}] = \begin{cases} \mathfrak{g} & m = n \\ \mathfrak{gl}(V) & m \neq n \end{cases}$$

∵ $m = n$ のとき、相対不変式 $\det x$ $(x \in V)$ をもつ。

$m \neq n$ のとき、左から従う。

◎ $V = M(m, n \,;\, \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m \,;\, \mathbb{R}) + \mathfrak{sl}(n \,;\, \mathbb{R})$

このとき
$$[\mathfrak{g}] = \begin{cases} \mathfrak{g} & m = n \\ \mathfrak{sl}(V) & m \neq n \end{cases}$$

∵ $m=n$ のとき、絶対不変式 $\det x$ をもつ。

$m \neq n$ のとき、p7 のようにして示す。 //

他にもいくつか例はあるが、これでひととおりの方法はでてきたので、止める。

最後に、この問題は rank 1 の半単純対称空間の接空間の不変超函数の一性質に由来している。(cf. 木幡氏)。このことは集会「群の表現論と特殊関数」に書くつもりです。

[HK] Hotta, R. and M. Kashiwara, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Invent. Math., 75 (1984) 327–358

[SKKO] Sato, M., M. Kashiwara, T. Kimura, and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Invent. Math., 62 (1980) 117–179