数理解析研究所講究録
第718巻 1990年 247-264

有限Coxeter群の岩堀-Hecke algebraの既約射影加群の分類

阪大理　山根宏之（Hiroyuki Yamane）

Introduction

Wを有限Coxeter群とする．$H(W,q)$ $(q\in\mathbb{C})$をWの岩堀-Hecke algebraとする．即ち$H(W,q)$は単位元をもつ$\mathbb{C}$-algebraで

$$H(W,q)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}T(w)$$

関係式

$$T(s)T(w)=\begin{cases}T(sw) & ,\ \ell(sw)>\ell(w)\\ (q-1)T(w)+qT(sw) & ,\ \ell(sw)<\ell(w)\end{cases}$$

で定義される．従って$H(W,q)$はWの群環$\mathbb{C}W$のq-analogueになっている。<u>qが1の巾根又は0でないとき</u>は$\mathbb{C}$-algebraとして$H(W,q)\simeq\mathbb{C}W$である事が分かっている．又このとき$H(W,q)$は半単純であって$H(W,q)$の表現についても良く分っている．

(i) Wが既約で古典型のときは"seminormal form"と呼ばれるYoung図型を使った既約な行列表現が$H(W,q)$に対してq-analogueされる．（Hoefsmit [6]）

(ii) 一般のWに対しては Kazhdan-Lusztig [3] が"W-graph"という概念をKazhdan-Lusztig予想の中で導入し、行者[5]が全てのWの$\mathbb{C}$上の既約表現はあるW-graphを使って実現出来る事を示した。

ところが最近の各方面の研究でqが1の巾根のときの$H(W,q)$の表現が色々と出現し、その表現論を調べる必要が生じてきた。その各方面とは、

(i) 可解格子模型（三輪、神保、尾角 etc.）

(ii) Conformal field theory（土屋 蟹江 etc.）

(iii) 結び目理論（Jones 河野 村上 etc.）

(iv) C^*-algebra（Wenzl, Jones etc.）

等である。

<u>$q=p^r$（pは素数）</u>，$G=G(\mathbb{F}_q)$を有限体$\mathbb{F}_q$の(non-twistedな)有限Chevalley群とする。（例えば $G(\mathbb{F}_q)=SL_N(\mathbb{F}_q)$, $SO_N(\mathbb{F}_q)$ $Sp_N(\mathbb{F}_q)$ etc.）WをGのワイル群、$B=B(\mathbb{F}_q)$をボレル部分群とする。$H(W,q)$は元々、岩堀先生によって誘導表現$1_{\mathbb{C}B}^{\mathbb{C}G}$に表れる既約表現を調べる為に導入された。

さらに<u>qが1の巾根</u>のときについても$H(W,q)$の表現が最近研究されてきている。その結果、特に$q=\sqrt[p]{1}$のとき$H(W,q)$の($\mathbb{C}$上)の表現論が$\overline{\mathbb{F}}_p W$及び$\overline{\mathbb{F}}_p G(\mathbb{F}_x)$（$x$と$p$は関係ない）の表現論と似ているらしい事が分って来た。私の結果も含めてそれら

を書き下してみる.

(i) Dipper - James [8] [9]. S_n を n 次の対称群とする

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p S_n$ の既約表現の分類・構成 $\longleftrightarrow$ $H(S_n, \sqrt[p]{1})$ の ———

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p S_n$ の中山予想 $\longleftrightarrow$ $H(S_n, \sqrt[p]{1})$ の ———

(ii) 行者 - 宇野 [4]

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p W$ の半単純性の判定法(マシュケの定理) $\longleftrightarrow$ $H(W, \sqrt[p]{1})$ の ———

$\overline{\mathbb{F}}_p G(\mathbb{F}_q)$ の 〃 〃

(iii) Y— [11]

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p W$ の既約射影加群の分類 $\longleftrightarrow$ $H(W, \sqrt[p]{1})$ の ———
(不足数 0 の既約指標)

$\overline{\mathbb{F}}_p G(\mathbb{F}_q)$ の 〃 〃

((iv) これはここでは関係なく余談であるが Drinfeld, 神保によって導入された量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に対しても q が 1 のべき根のときの $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論と $U_q(\mathfrak{g})$ に対応する $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の代数群 $G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の表現論が似ているらしい事が分ってきている (Luzstig [12]))

ここでは(iii)について解説しその系としてただちに(ii)が出てくるのをみる.

§1. 有限群のモジュラー表現論 (標数正の体上の表現論)

G を有限群, $m = |G|$ とする. K を離散付値 $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ を持っている標数 0 の付値体とする. さらに次の事を仮定する.

ii) K は v に関して完備. iii) K は1の m 乗根を全て含む.
$R = \{x \in K \mid v(x) \geqq 0\}$ (付値環), $(\pi) = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ (付値イデアル)
$F = R/(\pi)$ (剰余体) とおく. ここで $\mathrm{char}(F) = p > 0$ と仮定する. このとき次の事が知られている.

Lemma 1.1.
任意の KG-加群 V に対して次をみたす行列表現
$X : KG \to M_n(K)$ $(n = \dim V)$ が存在する.
i) X と V は表現として同値
ii) ${}^\forall g \in G$ に対して $X(g) \in M_n(R)$ $(\subset M_n(K))$. □

Def. 1.2.
KG-加群 V に対して FG-加群 V_F を F 上の行列表現
$X(g) \bmod M_n((\pi)) (\subset M_n(R))$ $(g \in G)$ で与えられるものとする. □

Def 1.3. (既約射影加群の定義)
A を単位元をもつ環とする. A_L (A_R) を左(右)正則 A 加群とする. A-左(右)加群 V が左(右)既約射影加群であるとは
i) V は既約
ii) ${}^\exists U$: A-左(右)加群 s.t. A_L $(A_R) \simeq V \oplus U$

Def 1.4. (対称多元環) $\underbrace{}_{}$ and Lemma

・kを体. Aを単位元をもつk-algebraとする. このときk-双線形写像 $f : A \times A \to k$があってしかもfが非退化で結合的かつ対称的なときAを対称多元環と呼ぶ

・Aが対称多元環であるならば(Cartan行列が対称であるので) A-左既約射影加群であるという事とA-右既約射影加群であるという事は同値. □

Lemma 1.5.

kを体とする. このときAが有限群の群環 $A = kG$ 又はHecke環 $A = H(W, q)$ $(q \in \mathbb{C}^{\times})$ のときAは対称多元環である.

証明

まず$A = kG$のとき考える. k-linear map $\delta : kG \to k$ を $\delta(e) = 1$, $\delta(g) = 0$ $(e \neq g)$ で定義する. そして$f : A \times A \to k$を $f(g, h) = \delta(gh)$ $(g, h \in G)$ で定義すればよい. $A = H(W, q)$のときは $\delta^q : H(W, q) \to \mathbb{C}$ を $\delta^q(T(w)) = \begin{cases} 1 & (w = e) \\ 0 & (w \neq e) \end{cases}$ で定義すれば $\delta^q(T(w)T(v)) = \begin{cases} q^{\ell(w)} & (w = v) \\ 0 & (w \neq v) \end{cases}$ が成り立つ. 従って同様にしてfを定義すればよい □

以後 $\mathrm{Irr}(A)$を既約A-加群全体, $P\mathrm{Irr}(A)$を既約射影A-加群全体とおく. V, WをA-加群としVとWが同値であ

ればV～Wなければ $V\not\sim W$ できます.

Theorem 1.6.（不足数０の既約指標）

$P\mathrm{Irr}(FG)$

$= \{ V_F \mid V \in \mathrm{Irr}(KG) \text{ s.t. } \nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0 \ (\Leftrightarrow \frac{|G|}{\dim V} \notin p\mathbb{Z}) \}$

さらに $V \not\sim W \in \mathrm{Irr}(KG)$, $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = \nu\left(\frac{|G|}{\dim W}\right) = 0$ であるならば $V_F \not\sim W_F \in P\mathrm{Irr}(FG)$. □

○ $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0$ である $V \in \mathrm{Irr}(KG)$ の指標を"不足数０の既約指標"という.

この定理の系としてつぎのマシュケの定理がただちに出てくる.

Corollary 1.7.（マシュケの定理）

FG が半単純 $\Leftrightarrow \nu(|G|) = 0 \ (\Leftrightarrow |G| \notin p\mathbb{Z})$

証明

$(\Leftarrow)$ $\dim_F FG = |G| = \dim_K KG = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(KG)/\sim} (\dim V)^2 \underset{\nu(|G|)=0 \text{ と Th 1.6.}}{=} \sum_{V \in \mathrm{Irr}(KG)/\sim} (\dim V_F)^2$

従って多元環の表現論より FG の左正則加群 $(FG)_L$ は FG-加群として $(FG)_L \cong \bigoplus_{V \in \mathrm{Irr}(KG)/\sim} (V_F)^{\dim V}$ 従って FG は半単純.

(⇒) Th 1.6. と 多元環の表現論より $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) \neq 0$ である $V \in \mathrm{Irr}(KG)$ が存在すれば FG は半単純である：ゆえに $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0$ $(\forall V \in \mathrm{Irr}(KG))$ とくに $V_0 = K$, $g.1 = 1$ $(\forall g \in G)$ をとってくると $\nu(|G|) = \nu\left(\frac{|G|}{\dim V_0}\right) = 0$ □

§2. 岩堀-Hecke algebra の定義と W-graph

(W, S) を有限 Coxeter 系とする．即ち S は有限集合で $s \neq r \in S$ に対して $n_{sr} = n_{rs} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が与えられていて W は

$$W = \left\langle s \in S \;\middle|\; \overset{\text{関係式}}{s^2 = e \ (s \in S) \quad (sr)^{n_{sr}} = e \ (s \neq r \in S)} \right\rangle$$

で定義される有限群である．　$w \in W$ に対して $\ell(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\ell(w) = \min\{m \mid w = s_{i_1} \cdots s_{i_m} \ (s_{i_1}, \ldots, s_{i_m} \in S)\}$ で定義し，これを w の "length" と呼ぶ．

可換環 $A\ (\ni 1)$ と $a \in A$ に対して，A-algebra $H_A(W, a)$ を

(i) 自由 A-加群として $H_A(W, a) = \bigoplus_{w \in W} AT(w)$

(ii)
$$\begin{matrix} T(s)T(w) \\ (s \in S,\, w \in W) \end{matrix} = \begin{cases} T(sw) & , \text{ if } \ell(sw) > \ell(w), \\ (a-1)T(w) + aT(sw) & , \text{ if } \ell(sw) < \ell(w). \end{cases}$$

で定義する．

Lemma 2.1.

$H_A(W, a)$ は A-algebra として

$$H_A(W, a) = \left\langle T(s)\ (s \in S) \;\middle|\; \begin{matrix} (T(s) - a)(T(s) + 1) = 0 \\ \underbrace{T(s)T(r)\cdots}_{n_{sr}\text{個}} = \underbrace{T(r)T(s)\cdots}_{n_{sr}\text{個}} \end{matrix} \right\rangle$$

で特徴づけられる． □

tを不定元とし$\mathbb{C}(t)$を有理式体，$\mathbb{C}[t]$を多項式環とする．$\mathcal{H}(W)=H_{\mathbb{C}(t)}(W,t^2)$とおく．このとき$\mathcal{H}(W)$はsemisimpleかつ分解型（分解型である事はTh 2.3より分かる）．$\zeta\in\mathbb{C}$に対して$H(W,\zeta)=H_{\mathbb{C}}(W,\zeta)$とおく．特に$H(W,1)\cong\mathbb{C}W$.

ここで一応W-graphの定義だけはしておく．

Def. 2.2（W-graphの定義）

(W,S)は既約でWはワイル群であるとする．そして次のような三つ組(Γ,I,μ)を考える．

$\Gamma=(\Gamma^0,\Gamma^1)$はグラフ　Γ^0:頂点，Γ^1 辺．

$I;\Gamma^0\longrightarrow\mathcal{P}(S)=\{S$のsubset$\}$

$\mu:(\Gamma^0\times\Gamma^0)\setminus D\to\mathbb{Z}$　（ここで$D=\{(x,x)\mid x\in\Gamma^0\}$）

さらにこの(Γ,I,μ)に対し，Γ^0をbasisとするfree $\mathbb{C}[t]$-加群をEとする．また各$s\in S$に対し$\tau_s\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}[t]}(E)$を

$$\underset{(x\in\Gamma^0)}{\tau_s(x)}=\begin{cases}-x & ,\text{if } s\in I(x)\\ t^2x+t\displaystyle\sum_{\substack{y\in\Gamma^0\\ s\in I(y)}}\mu(y,x)y & ,\text{if } s\notin I(x)\end{cases}$$

で定める．このとき$R_t:\mathcal{H}(W)\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}[t]}(E)$，$R(T(s))=\tau_s$が$\mathcal{H}(W)$の表現を定めるとき，$(\Gamma,I,\mu)$を$(W,S)$のW-graphと呼ぶ．

□

（ここでWがワイル群でないときは，Wの分解体の整数環を$\mathbb{Z}$のかわりにおく）

Theorem 2.3. (行者[5] 1981)

$\mathcal{H}(W)$ の任意の絶体既約表現は、ある W-graph によって実現出来る。

□.

W-graph については成瀬[7] に詳しい説明がある。

次の定義は、Def 1.2 の analogy である

Def. 2.4.

$\zeta \in \mathbb{C}$, $\sqrt{\zeta}$ を fix する。$V_t \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W))$ に対して $H(W, \zeta)$-加群 $V_{\sqrt{\zeta}}$ を行列表現 $R_t(T(s))|_{t \to \sqrt{\zeta}}$ $(s \in S)$ で与えられるものとする。（ここで R_t は Def 2.2 のもの）

□.

§3. 岩堀-Hecke algebra と有限 Chevalley 群.

$q = p^r$（素数巾） $G = G(\mathbb{F}_q)$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の non-twisted な有限 Chevalley 群とする。$B = B(\mathbb{F}_q)$ を G の Borel 部分群 W を G のワイル群とする。

（例. $G(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q)$ のとき $B = \left\{ \begin{bmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix} \in G \right\} = \{\text{上三角行列}\} \cap G$
$W = S_n$: n 次対称群）

$1_B{}^G (= 1_{\mathbb{C}B}{}^{\mathbb{C}G}) = \mathbb{C}G(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{C}B} 1_B$ （誘導加群）とおく

Theorem 3.1. (岩堀 1964 [11]).

$q=p^r$ (素数巾) とする. このとき.

$$H(W,q) \cong e(\mathbb{C}G(\mathbb{F}_q))e \quad (\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(1_B{}^G, 1_B{}^G))$$

$$T(w) \longmapsto \frac{1}{|B|}\sum_{y\in BwB} y \qquad ここで\ e=\frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} x \in \mathbb{C}G$$

(ここで $G=\bigcup_{w\in W} BwB$ は Bruhat 分割) □

Proposition 3.2.

次の1対1対応がある

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}W) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W)) \xrightarrow{\sim} \chi_{irr}^{B(\mathbb{F}_q)}$$

$$V_1 \longleftarrow V_t \longmapsto \chi_{V_t}^q$$

ここで $\chi_{V_t}^q$ は $\chi_{V_t}^q|e\mathbb{C}Ge$ が $H(W,q)$ の $V_{\sqrt{q}}$ の指標となるものとする. □

$P_W(q)=\sum_{w\in W} q^{\ell(w)} \left(=\prod_{1\le i\le |S|}\frac{q^{m_i}-1}{q-1} \quad m_i:巾指数\right)$ をPoincare多項式とする. 明らかに $P_W(1)=|W|$.

Lemma 3.3.

$$|G(\mathbb{F}_q)|=\frac{1}{d}(q-1)^{|S|}P_W(q)$$

ここで d は適当な自然数. G が universal なら $d=1$ □

Def. and Lemma 3.4. (指標の直交関係の q-analogue と generic degree)

$V_t, V'_t \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W))$ に対して $\rho_t = \mathrm{trace}\, R_t$, $\rho'_t = \mathrm{trace}\, R'_t$ とする. (R_t, R'_t は Def. 2.2 のもの) このとき $\underline{q = t^2}$ とおくと

$$\frac{\sum_{w \in W} \rho_t(T(w))\, \rho'_t(q^{-l(w)} T(w^{-1}))}{P_W(q)} = \begin{cases} \dfrac{\dim V_t}{d_{V_t}(q)} & , \text{if } V_t \sim V'_t, \\ 0 & , \text{if } V_t \not\sim V'_t. \end{cases}$$

が成り立つ.

ここで $d_{V_t}(q) \in \mathbb{C}[q]$ であって $\dim_{V_t}(1) = \dim V_1 = \dim V_t$ が成り立つ. この d_{V_t} を V_t の generic degree と呼ぶ

□

Theorem 3.5. (Curtis - 岩堀 - Kilmoyer 1971 [2])

$V_t \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W))$, $q = p^r$ (素数巾) とする. このとき

$$\deg \chi_{V_t}^{q} = d_{V_t}(q)$$

が成り立つ

□

§4. ζ が 1 の巾根のときの $H(W, \zeta)$ の表現について.

$V_t \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W))$ に対して $\varphi_{V_t}(q) \in \mathbb{C}[q]$ を $\varphi_{V_t}(q) = (q^{l(w_0)} P_W(q)) / d_{V_t}(q)$ で定義する. ここで $w_0 \in W$ は最長元. このとき Th 1.6 の analogy として次の事が成り立つ.

Theorem 4.1. (Y— 1987 [11])

i) $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ とし ζ を fix する. このとき

$PIrr(H(W,\zeta)) = \{V_\zeta \mid V_t \in Irr(\mathcal{H}(W))$ s.t. $\varphi_{V_t}(\zeta) \neq 0\}$

であって $V_t \not\sim W_t \in Irr(\mathcal{H}(W))$, $\varphi_{V_t}(\zeta) \neq 0 \neq \varphi_{W_t}(\zeta)$ であるならば $V_\zeta \not\sim W_\zeta \in PIrr(\mathcal{H}(W))$

□

ii) (W,S) が既約ならば

$PIrr(H(W,0)) = \{ind, sign\}$

ここで ind, sign は $ind(T(w)) = 0$ $ind(T(w)) = (-1)^{\ell(w)}$ で定義される1次元表現である.

□

注: この定理の主張は、行者先生によって示唆されたものである。Th 1.6 の analogy として $\varphi_{V_t}(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \neq 0)$ となる $V_t \in Irr(\mathcal{H}(W))$ に対する trace R_t を ζ における不足数0の既約指標と呼ぶ事にする. これも行者先生の提案である.

この定理の系として次の Th 4.2 がただちに出てくる. 証明は Cor. 1.7 と全く同じであって V_0 のかわりに1次元表現 $ind: T(w) \mapsto q^{\ell(w)}$ をつかう

Theorem 4.2. (行者-宇野 [4])

i) $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ とする $H(W,\zeta)$ が半単純 $\Longleftrightarrow$ $P_W(\zeta) \neq 0$

ii) (W,S) は既約であるとする. このとき

$H(W,0)$ が半単純 $\Longleftrightarrow$ W が A_1 型 すなわち $W \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ □

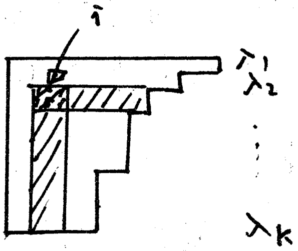
Example (A_{N-1} 型について)

$$D_N = \{N \text{ の分割}\} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \,\middle|\, \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = N \end{array} \right\}$$

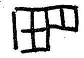
とおく このとき1対1対応

$$\begin{array}{ccccc} D_N & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(\mathbb{C}S_N) & (\xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(S_N))) \\ \lambda & \longmapsto & V^{\lambda}_{1} & \longmapsto & V^{\lambda}_{t} \end{array}$$

が存在するのはよく知られている. $\lambda \in D_N$ に対して Young 図形

$\lambda =$ 

をつくる 升 i に対して図の斜線の部分の升の数を hook length と呼び $h_i(\lambda)$ $(1 \leq i \leq N)$ で表す.

(例 $N = 6$ $\lambda =$  のとき $\{h_i(\lambda) \mid 1 \leq i \leq 5\} = \{5, 4, 2, 1, 2, 1\}$

このとき

$$d_{V^{\lambda}_{t}}(q) = \left(q^{\{0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \dots + (k-1) \cdot \lambda_k\}} \right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{q^i - 1}{q^{h_i(\lambda)} - 1}$$

$$P_{S_N}(q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{q^i - 1}{q - 1}$$

で与えられる. 従って

$$q_{V^{\lambda}_{t}}(q) = q^c \prod_{i=1}^{n} \frac{q^{h_i(\lambda)} - 1}{q - 1}$$

(ここで c は適当な自然数)

ゆえに Th 4.1 は A_{N-1} 型については次の様に書き直せる.

Proposition 4.3.

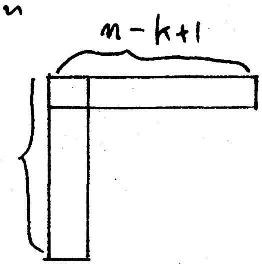
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする. このとき

$PIrr(H(S_N, \sqrt[m]{1})) = \{ V^{\lambda}_{\sqrt[2m]{1}} \mid \lambda \in D_N,\ h_i(\lambda) \notin m\mathbb{Z}\ (1 \leq i \leq N) \}$. □

§5 $H(S_n, \zeta)$ ($\zeta = \sqrt[n]{1}$ 又は $\sqrt[n-1]{1}$) について.

$H(S_n, q)$ の表現に関しては, Wenzl [10] でも論じてある. Hoefsmit [ ] の場合は seminormal form の q-analogue であったが Wenzl の場合は orthogonal form の q-analogue として q が 1 の巾根でないときの $H(S_n, q)$ の既約表現を構成している. もちろん 両者はほとんど同じである. 又, Wenzl は q が 1 の巾根のとき (k,l)-diagram という概念を使って $H(S_n, q)$ の既約表現を構成している. (全ての既約表現を構成しているわけではない). 以下 記号 $H_n(q)$ $(= H(S_n, q))$, Λ_n $(= D_n)$, $\Lambda_n^{(k,l)}$ $(= \{(k,l)\text{-diagrams}\} \subset \Lambda_n)$, π_λ, $\pi_\lambda^{(k,l)}$, e_i $(= T(s_i))$ 等は Wenzl [10] のものとする.

(i) $1 \leq k \leq n$

$\lambda_k :=$ 

$\lambda_k \in \Lambda_n$

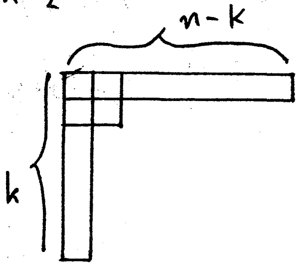
$\rho_1 := \mathrm{ind}$

$\rho_k := \pi_{\lambda_k}^{(k,n)}$ $(2 \leq k \leq n-2)$

$\rho_{n-1} := \mathrm{sgn}$

$\Lambda_H := \{ \lambda_g \mid 2 \leq g \leq n-1 \}$

(ii) $1 \le k \le n-2$

$\tilde{\lambda}_k :=$ 

$\tilde{\lambda}_k \in \Lambda_n$

$\tilde{\rho}_1 := \mathrm{ind}$

$\tilde{\rho}_k := \pi^{(k,n-1)}_{\tilde{\lambda}_k} \quad (2 \le k \le n-2)$

$\tilde{\rho}_{n-2} := \mathrm{sgn}$

Proposition 5.1.

(i) $H_n(\sqrt[n]{1})$ の既約表現の完全代表系は

$\{\rho_k \ (1 \le k \le n-1),\ \pi_\lambda \ (\lambda \in \Lambda_n \setminus \Lambda_H)\}$ である. (ここで $\pi_\lambda \sim V^{\lambda}_{\sqrt[2n]{1}}$)

(ii) $H_n(\sqrt[n-1]{1})$ の既約表現の完全代表系は

$\{\tilde{\rho}_k \mid (1 \le k \le n-2)\} \cup \{V^{\lambda}_{\sqrt[2(n-1)]{1}} \mid \lambda \in \Lambda_n,\ \varphi_{V^{\lambda}_t}(\sqrt[n-1]{1}) \neq 0\}$

である.

□

Def. 5.2.

$(n_1, n_2, \dots, n_r)$ を正の整数列とする. 全行列環の直和 $\bigoplus_{k=1}^{r} M(2n_k + \sum_{|k-j|=1} n_j, \mathbb{C})$ の subalgebra $A(n_1, \dots, n_r)$ を次で定義する

$$A(n_1, \dots, n_r) = \left\{ \dotplus \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_k & y_{k,k-1} & y_{k,k+1} & z_k \\ & x_{k-1} & 0 & -y_{k-1,k} \\ & & x_{k+1} & y_{k+1,k} \\ 0 & & & x_k \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}n_k \\ \}n_{k-1} \\ \}n_{k+1} \\ \}n_k \end{array} \right\}$$

同じ記号のところは同じ小行列

□

Theorem 5.3. $(n \geqq 4)$ algebra として次の同型がある.

(i) $$H_n({}^n\Gamma) \cong \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_n \setminus \Lambda_H} M(\deg V^\lambda_t, \mathbb{C})\right) \oplus A(\deg \rho_1, \cdots, \deg \rho_{n-1})$$

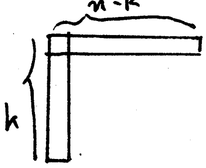
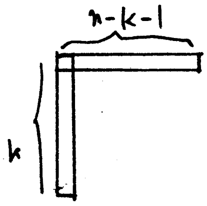
(ii) $$H_n({}^{n-1}\Gamma) \cong \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda_n \\ \varphi_{V^\lambda_t}({}^{n-1}\Gamma) \neq 0}} M(\deg V^\lambda_t, \mathbb{C})\right) \oplus A(\deg \tilde{\rho}_1, \cdots, \deg \tilde{\rho}_{n-2})$$

□

$H_n({}^n\Gamma)$ について. もう少し具体的に述べる ($H_n({}^{n-1}\Gamma)$ についても同じ事が分っている.) $H_n({}^n\Gamma) = \langle 1, e_1, \cdots, e_{n-1} \rangle$ であった $H_n({}^n\Gamma)$ の既約でない主直既約な表現

$$\underset{1 \leq k \leq n-1}{P_k} : H_n({}^n\Gamma) \longrightarrow M\Big(2n_k + \sum_{|j-k| \leq 1} n_j, \mathbb{C}\Big)$$

は次で定義される.

$\lambda'_k :=$  $\in \Lambda_{n-1}$, $\lambda''_k :=$  $\in \Lambda_{n-2}$ とおく

$$\underset{1 \leq i \leq n-2}{P_k(e_i)} := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \rho_k(e_i) & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \rho_{k-1}(e_i) & 0 & 0 \\ \hline & & \rho_{k+1}(e_i) & 0 \\ \hline & 0 & & \rho_k(e_i) \end{array}\right] & \begin{array}{l} \} V_{\lambda'_k} \\ \} V_{\lambda'_{k-1}} \\ \} V_{\lambda'_{k+1}} \\ \} V_{\lambda'_k} \end{array} \end{array}$$

$$
P_k(e_{n-1}) := \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & -1 & 0 \\
\cline{3-8}
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & \multicolumn{2}{c}{0} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{5-8}
 & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
V_{\lambda''_{k-1}} \\ V_{\lambda''_{k}} \\ V_{\lambda''_{k-2}} \\ V_{\lambda''_{k-1}} \\ V_{\lambda''_{k}} \\ V_{\lambda''_{k+1}} \\ V_{\lambda''_{k-1}} \\ V_{\lambda''_{k}}
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} V_{\lambda'_k} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} V_{\lambda'_{k-1}} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} V_{\lambda'_{k+1}} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} V_{\lambda'_k}
\end{array}
$$

このとき Th 5.3 (ii) の同型は

$$
\Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_n \setminus \Lambda_H} \pi_\lambda \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{1 \le k \le n-1} P_k \Big)
$$

で与えられる.

参考文献

[1]. N. Iwahori, On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10 (1964), 215-216

[2] C.W. Curtis, N. Iwahori and R. Kilmoyer, Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with BN-pairs, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), 81-116.

[3] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), 165-184.

[4] A. Gyoja and K. Uno, On the semisimplicity of Hecke algebras

J. Math. Soc. Japan, Vol. 41, No1, (1989) 75-79

[5] A. Gyoja, On the existence of a W-graph for an irreducible representation of a Coxeter group, J. Algebra 86 (1984), 422-438.

[6] P.N. Hoefsmit, Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type, Ph.D Thesis, University of British Columbia (1974)

[7] H. Naruse, Classical group の Weyl 群と Hecke 環の表現について 東京大学 修士論文 (1980)

[8] R. Dipper and G.D. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3)52 (1986) 20-52

[9] R. Dipper and G. D. James, Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 54 (1987) 57-82.

[10] H. Wenzl, Representation of Hecke algebras and subfactors Inv. Math. (1988)

[11] H. Yamane, Irreducible projective modules of the Hecke algebras of a finite Coxeter group, to appear in J. Algebra.

[12] G. Lustig, Quantum groups at roots of 1, preprint.

最後にこの場をかりてこの研究集会の主宰者であり、また筆者が高知大学在学中から多大にお世話になっている室政和先生に感謝の意を表しておきます。