数理解析研究所講究録
第718巻 1990年 265-277

Exponentials of certain completions of the unitary form of a Kac-Moody algebra

愛媛大・理　須藤　清一
(Kiyokazu Suto)

§0. 序　$\mathfrak{g}$ を，対称化可能な Cartan 行列を持つ複素 Kac-Moody 環，$\mathfrak{k}$ をその unitary 実形とする．

[3] の中で我々は，$\mathfrak{g}$ の随伴表現及び dominant integral な最高 weight を持つ既約表現の標準的な完備化における C^m-vectors の空間を自然な形で定義し，その簡単な特徴付けを与えた．この特徴付けを用いると，各 C^m-vectors の空間に自然に位相が入り，$\mathfrak{g}$ の作用が連続に拡張される．

随伴表現の場合の各 C^m-vectors の空間における $\mathfrak{g}$ 及び $\mathfrak{k}$ の閉包をそれぞれ $\mathfrak{g}_m$, $\mathfrak{k}_m$ とする．

本報告では，k_2 の C^1-vectors への作用が exponentiable であり $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\mathfrak{k}_{m+2}$ の exponentials が C^m-vectors の空間を不変にすることを示す．これは [3] で得られた，$m = \omega$ に対する結果，即ち，$\mathfrak{k}_\omega$ の exponentials が C^k-vectors の空間 ($k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$) を全て不変にする，を拡張するものである．

<u>§1. 記号と準備</u>　本節の内容に関しては，詳しくは [1] 及び [3] を参照されたい．

A を対称化可能な一般型 Cartan 行列とする．$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ を A を Cartan 行列に持つ実 Kac-Moody 環，$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ の Cartan 部分環とする．すると，$\mathfrak{g} = \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ は A を Cartan 行列とする複素 Kac-Moody 環，$\mathfrak{h} = \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になる．

Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系，Δ_+ を正 root の全体，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \Sigma_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^{\alpha}$ を root 空間分解とする．

$\mathfrak{n}_{\pm} = \Sigma_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ とおく．分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ に関する $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{n}_{\pm}$, $\mathfrak{h}$ の上への射影をそれぞれ $P_{\pm}$, P_0 とする．

A を対称化可能としたから $\mathfrak{g}$ 上には standard invariant form $(\cdot|\cdot)$ が存在する．$(\cdot|\cdot)$ の $\mathfrak{h}$ への制限は非退化なので，$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ の上への線型全単射 ν が

$$(h_1|h_2) = \nu(h_1)(h_2) \qquad \text{for } h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$$

によって定まる．

$\mathfrak{g}$ 上の反線型反同型 $\mathfrak{g} \ni x \longrightarrow x^* \in \mathfrak{g}$ で

$$h^* = h \quad \text{for } h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}, \quad (\mathfrak{g}^{\alpha})^* = \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad \text{for } \alpha \in \Delta$$

$$(x^*)^* = x \quad \text{for } x \in \mathfrak{g}$$

を満たすものが存在する．すると unitary 実形 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ x + x^* = 0\}$$

と定義される．

$\mathfrak{g}$ 上の Hermitian form $(\cdot|\cdot)_0$ を

$$(x|y)_0 = (x|y^*) \quad \text{for } x, y \in \mathfrak{g}$$

と定める．$(\cdot|\cdot)$ の不変性により，$(\cdot|\cdot)_0$ は contravariant である．即ち

$$((\mathrm{ad}\ x)y|z)_0 = (y|(\mathrm{ad}\ x^*)z)_0 \quad \text{for } \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

が成立つ．この性質により root 空間分解が $(\cdot|\cdot)_0$ に関する直交分解であることがわかる．特に $(\cdot|\cdot)_0$ は $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{k})$-不変で $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_\pm$ は互いに直交する．更に [2] によれば，$(\cdot|\cdot)_0$ は $\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ 上では正定値である．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最高 weight に持つ既約最高 weight 表現を $(\pi_\lambda, L(\lambda))$ とする．もし $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ ならば $L(\lambda)$ 上には非退化な contravariant Hermitian form $(\cdot|\cdot)_\lambda$ が存在する．更に λ が dominant integral ならば $(\cdot|\cdot)_\lambda$ は正定値である[2, Th.1]．

$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ の基底 $\{h_i\}_i$ を

$$(h_i|h_j)_0 = \delta_{ij} \text{ or } -\delta_{ij} \quad \forall i, j$$

を満たすようにとる．$\mathfrak{h}$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_1$ で $\{h_i\}$ を正規直交基底とするものをとり，次によって $\mathfrak{g}$ 全体に拡張する．

$$(x|y)_1 = (P_-(x)|P_-(y))_0 + (P_0(x)|P_0(y))_1 + (P_+(x)|P_+(y))_0$$

$$\text{for } x, y \in \mathfrak{g}.$$

すると次の様な $\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 T が存在する．

(1) T は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して unitary かつ self-adjoint．従って involutive．

(2) $(x|y)_0 = (x|Ty)_1$ for $x, y \in \mathfrak{g}$．

(3) $1 - T \leqq 2P_0$．

以下では，(π, V) を随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$，または dominant integral な最高 weight $\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ をもつ最高 weight 表現 $(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ とする．$(\cdot|\cdot)_\pi$ を上で導入した V 上の内積とする．即ち，$\pi = \mathrm{ad}$ ならば $(\cdot|\cdot)_\pi = (\cdot|\cdot)_1$ であり，$\pi = \pi_\Lambda$ ならば $(\cdot|\cdot)_\pi = (\cdot|\cdot)_\Lambda$ である．

(π, V) の weight の全体を $P(\pi)$，weight μ の weight 空間を V_μ とし，$\underline{V} = \prod_{\mu\in P(\pi)} V_\mu$ とおく．$\mathfrak{g}$ の作用は $\underline{V}$ まで自然に拡張されるが，拡張された表現も π と書く．

$H(\pi)$ を V の $(\cdot|\cdot)_\pi$ に関する完備化とする．すると $H(\pi)$ は次の様にして $\underline{V}$ の部分空間と看做される．

$$H(\pi) = \{(v_\mu)_{\mu\in P(\pi)} \in \underline{V};\ \textstyle\sum_{\mu\in P(\pi)} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty\}.$$

<u>§2. C^m-vectors</u>　以下 $h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ を strictly dominant:

$$\alpha(h_0) > 0 \qquad \forall\alpha \in \Delta_+$$

なる元として固定する．[2, Prop.3.1] と同様の方法で次の

命題を得る.

<u>命題2.1</u> [3, Prop.2.1]. i) $\exists C_1 > 0$ s.t. $\forall x, y \in \mathfrak{g}$

$$\|[x,y]\|_1 \leqq C_1(\|[h_0,x]\|_1\|y\|_1+\|x\|_1\|[h_0,y]\|_1),$$

ii) $\exists C_{1,\Lambda} > 0$ s.t. $\forall x \in \mathfrak{g}$, $v \in L(\Lambda)$

$$\|\pi_\Lambda(x)v\|_\Lambda \leqq C_{1,\Lambda}(\|x\|_1\|v\|_\Lambda+\|[h_0,x]\|_1\|v\|_\Lambda+\|x\|_1\|\pi_\Lambda(h_0)v\|_\Lambda.$$

これから帰納的に

<u>命題2.2</u> [3, Cor.2.3]. $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{g}$, $v \in L(\Lambda)$ とする.

i)

$$\|[x_1,\ldots,[x_{m-1},x_m]\ldots]\|_1 \leqq (m-1)!C_1^{m-1} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_m \geqq 0\\ p_1+\ldots+p_m=m-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j!}\|(\mathrm{ad}\ h_0)^{p_j}x_j\|_1.$$

ii)

$$\|\pi_\Lambda(x_1)\ldots\pi_\Lambda(x_m)v\|_\Lambda \leqq (m+1)!C_{1,\Lambda}^{m} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_m,q \geqq 0\\ p_1+\ldots+p_m+q \leqq m}} \left\{\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j!}\|(\mathrm{ad}\ h_0)^{p_j}x_j\|_1\right\} \times \frac{1}{q!}\|\pi_\Lambda(h_0)^{q}v\|_\Lambda.$$

C^m-vectors の空間を次の様に定義する.

<u>定義2.3</u>

$$H_0(\pi) = H(\pi),$$

$$H_m(\pi) = \{v \in H_{m-1}(\pi);\ \pi(x)v \in H_{m-1}(\pi) \quad \forall x \in \mathfrak{g}\},$$

$$H_\infty(\pi) = \cap_{m \geqq 0} H_m(\pi).$$

命題2.2 によって次は明らか.

<u>命題2.4</u> [3, Th.2.2].

$$H_m(\pi) = \{v \in \underline{V};\ \pi(h_0)^m v \in H(\pi)\}$$

$$\forall m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

そこで, $H_m(\pi)$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_{\pi,m}$ を

$$(u|v)_{\pi,m} = \sum_{j=0}^{m} (\pi(h_0)^j u | \pi(h_0)^j v)_\pi \qquad \text{for } u,\ v \in H_m(\pi)$$

によって定義すると $H_m(\pi)$ は Hilbert 空間になる. $H_\infty(\pi)$ 上には射影極限位相を考える. 命題2.1 によって $\mathfrak{g}$ の作用は次の様に連続に拡張される.

<u>命題2.5</u> [3, Prop.3.2]. $m = 0, 1, 2, \ldots$ とする. $\mathfrak{g}$ の V への作用は連続な双線型写像

$$H_{m+1}(\mathrm{ad}) \times H_{m+1}(\pi) \ni (x,\ v) \longrightarrow \pi(x)v \in H_m(\pi)$$

に拡張される. 特に $H_\infty(\mathrm{ad})$ は位相 Lie 環であり, $H_\infty(\pi)$ に連続に作用する.

明らかに $\mathfrak{g} \ni x \longrightarrow x^* \in \mathfrak{g}$ は $H_m(\mathrm{ad})$ 上の involutive antilinear isometory に拡張される．そこで

$$\mathfrak{k}_m = H_m^u(\mathrm{ad}) = \{x \in H_m(\mathrm{ad});\ x + x^* = 0\}$$

とおく．$\mathfrak{k}_m$ は $\mathfrak{k}$ の $H_m(\mathrm{ad})$ における閉包と一致する．

§3. Negative space　inclusion $H_m(\pi) \hookrightarrow H(\pi)$ は連続だから，$v \in H(\pi)$ に対して，$F_v \in H_m(\pi)^*$ が

$$F_v(u) = (u|v)_\pi \quad \text{for } u \in H_m(\pi)$$

によって定義できる．この F_v の norm を $\|v\|_{\pi,-m}$ とし，$\|\cdot\|_{\pi,-m}$ による $H(\pi)$ の完備化を $H_{-m}(\pi)$ とする．$H_{-m}(\pi)$ は $\underline{V}$ の部分空間と看做せる：

$$H_{-m}(\pi) = \{(v_\mu) \in \underline{V};\ \sum_\mu (\sum_{j=0}^m \mu(h_0)^{2j})^{-1} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty\}.$$

また定義によって，$(\cdot|\cdot)_p$ は $H_m(\pi)$ と $H_{-m}(\pi)$ の非退化な pairing を与える．

$x \in H_{m+1}(\mathrm{ad})$ とする．命題2.5 により $\mathrm{ad}\ x^*$ は $H_{m+1}(\mathrm{ad})$ から $H_m(\mathrm{ad})$ の中への連続写像．一方 §1 の作用素 T は $H_m(\mathrm{ad})$ 上の可逆有界作用素に一意に拡張される．従って任意の $y \in H_{-m}(\mathrm{ad})$ に対して

$$H_{m+1}(\mathrm{ad}) \ni z \longrightarrow ((T\circ(\mathrm{ad}\ x^*)\circ T)z|y)_1$$

は $H_{m+1}(\mathrm{ad})^*$ の元を定める．よって $H_{-m-1}(\mathrm{ad})$ の元 w が一意に存在して

$$(z|w)_1 = ((T\circ(\mathrm{ad}\ x^*)\circ T)z|y)_1 \qquad \forall z \in H_{m+1}(\mathrm{ad}).$$

そこで $(\mathrm{ad}\ x)y = w$ とおく．

同様に $H_{m+1}(\mathrm{ad})$ の元の $H_{-m}(\pi_\Lambda)$ への作用を

$$(u|\pi_\Lambda(x)v)_\Lambda = (\pi_\Lambda(x^*)u|v)_\Lambda$$

$$\text{for } x \in H_{m+1}(\mathrm{ad}),\ u \in H_{m+1}(\pi_\Lambda),\ v \in H_{-m}(\pi_\Lambda)$$

によって定義する．

定義によって線型写像 $\pi(x):\ H_{m+1}(\pi) \longrightarrow H_m(\pi)$ の norm と $\pi(x):\ H_{-m}(\pi) \longrightarrow H_{-m-1}(\pi)$ の norm は一致する．

§4. Exponentials of $\mathfrak{k}_m$'s

$m = 0, 1, 2, \ldots$ とする．

$H_m(\pi)$ 上の norm $|\cdot|_{\pi,m}$ を

$$|v|_{\pi,m} = \sum_{j=0}^{m} \|\pi(h_0)^j v\|_\pi \qquad \text{for } v \in H_m(\pi)$$

によって定める．すると

$$\|v\|_{\pi,m} \leqq |v|_{\pi,m} \leqq \sqrt{m+1}\,\|v\|_{\pi,m}$$

$$\forall v \in H_m(\pi)$$

だから $|\cdot|_{\pi,m}$ は $\|\cdot\|_{\pi,m}$ と同値な norm である．この norm で $H_{m+1}(\pi)$ 上の $\mathfrak{k}_{m+1}$ の作用を評価すると次の補題を得る．

<u>補題4.1.</u> $x \in \mathfrak{k}_{m+1}$ とする．

i)

$$|(1-(\mathrm{ad}\ x))y|_{\mathrm{ad},m} \geqq (1-C_1 2^{m+1}|x|_{\mathrm{ad},m+1})|y|_{\mathrm{ad},m}$$

$$\forall y \in H_{m+1}(ad).$$

ii)

$$|(1-\pi_\Lambda(x))v|_{\Lambda,m} \geqq (1-C_{1,\Lambda}2^{m+2}|x|_{ad,m+1})|v|_{\Lambda,m}$$

$$\forall v \in H_{m+1}(\Lambda).$$

ただし，$H_k(\Lambda) = H_k(\pi_\Lambda)$，$|\cdot|_{\Lambda,k} = |\cdot|_{\pi_\Lambda,k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

一方 negative space への作用に関しては次の様な評価を得る.

<u>補題4.2.</u> $\exists c_m(\pi), c'_m(\pi) > 0$ s.t. $\forall x \in k_{m+1}$, $v \in H_{-(m-1)}(\pi)$

$$\|(1+\pi(x))v\|_{\pi,-m} \geqq c_m(\pi)(1-c'_m(\pi)\|x\|_{ad,m+1})\|v\|_{\pi,-m}.$$

$x \in k_{m+2}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ とする. 定義によって

$1+\varepsilon\pi(x)$: $H_{-m}(\pi) \longrightarrow H_{-m-1}(\pi)$ が単射

$\Longleftrightarrow$ $(1-\varepsilon\pi(x))H_{m+1}(\pi)$ が dense in $H_m(\pi)$.

従って補題4.2 により $|\varepsilon|$ が十分小さければ $(1-\varepsilon\pi(x))H_{m+1}(\pi)$ は $H_m(\pi)$ で稠密である. これと補題4.1 を合せて

<u>補題4.3.</u> $x \in k_{m+2}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ とする. $|\varepsilon|$ が十分小さけ

ればH$_m(\pi)$上の有界作用素$R_\pi(x;\varepsilon)$で

$$R_\pi(x;\varepsilon)(1-\varepsilon\pi(x))v = v \qquad \forall v \in H_{m+1}(\pi)$$

となるものが一意に存在する．更に

$$|R_\pi(x;\varepsilon)|_{op,m} \leqq (1-C|\varepsilon x|_{ad,m+1})^{-1}.$$

ただし，$|\cdot|_{op,m}$は$|\cdot|_{\pi,m}$に関する作用素normで，$C = C_1 2^{m+1}$ (if π = ad), or $C_{1,\Lambda}2^{m+2}$ (if $\pi = \pi_\Lambda$)．

これにより[4, Chap IX]のcriterionが適用できて次の定理を得る．

<u>定理4.4.</u>　$m = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in k_{m+2}$とする．$H_m(\pi)$上の有界作用素からなる1-径数群$e^{t\pi(x)} = \exp(t\pi(x))$, $t \in R$でその無限小生成作用素が$\pi(x)$: $H_{m+1}(\pi) \longrightarrow H_m(\pi)$の閉包であるようなものが一意に存在する．更に

$$|e^{\pi(x)}|_{op,m} \leqq \exp(C|x|_{ad,m+1}).$$

もちろん，$m < m'$のとき$x \in \mathfrak{k}_{m'+2}$に対して$H_m(\pi)$上の$e^{\pi(x)}$と$H_{m'}(\pi)$上の$e^{\pi(x)}$は$H_{m'}(\pi)$上では一致する．従って上の定理は，言葉をかえていえば，$H(\pi)$上で定義された$x \in \mathfrak{k}_{m+2}$のexponential $e^{\pi(x)}$が部分空間$H_1(\pi)$, $H_2(\pi)$, ..., $H_m(\pi)$を全て不変にすることを主張している．

さて$x, y \in \mathfrak{k}_{m+3}$, $v \in H_{m+1}(\pi)$とすると定理4.1によ

り

$$\frac{1}{\delta}\{e^{(t+\delta)\pi(x)}e^{(t+\delta)\pi(y)}v-e^{t\pi(x)}e^{\pi(y)v}\}$$

$$= e^{(t+\delta)\pi(x)}\{\frac{1}{\delta}(e^{(t+\delta)\pi(y)}v-e^{t\pi(y)}v)-\pi(y)e^{t\pi(y)}v\}$$

$$+\ e^{(t+\delta)\pi(x)}\pi(y)e^{t\pi(y)}v+\frac{1}{\delta}\{e^{(t+\delta)\pi(x)}\}\ e^{\pi(y)v}$$

$$\longrightarrow e^{t\pi(x)}\pi(x+y)e^{t\pi(y)v} \quad (\delta \longrightarrow 0) \quad \text{in } H_m(\pi).$$

<u>補題4.5.</u> $\forall x,\ y \in \mathfrak{k}_{m+3},\ v \in H_{m+1}(\pi)$ に対して

$$\frac{d}{dt}e^{t\pi(x)}e^{t\pi(y)}v = e^{t\pi(x)}\pi(x+y)e^{t\pi(y)}v$$

$$\text{in } H_m(\pi).$$

従って

$$e^{\pi(x)}e^{\pi(y)}v-v = \int_0^1 e^{t\pi(x)}\pi(x+y)e^{t\pi(y)}v\ dt$$

$$\text{in } H_m(\pi).$$

C を補題4.3 の通りとすると

$$|e^{\pi(x)}e^{\pi(y)}v-v|_{\pi,m}$$

$$\leqq \int_0^1 e^{Ct|x|_{ad,m+1}}C|x+y|_{ad,m+1}e^{2Ct|y|_{ad,m+2}}|v|_{\pi,m+1}\ dt.$$

結局次の命題を得る.

<u>命題4.6.</u> $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x,\ y \in \mathfrak{k}_{m+3},\ v \in$ $H_{m+1}(\pi)$ とすると

$$|e^{\pi(x)}e^{\pi(y)}v-v|_{\pi,m}$$

$$\leqq Ce^{C(|x|_{ad,m+1}+2|y|_{ad,m+1})}|x+y|_{ad,m+1}|v|_{\pi,m+1}.$$

特に $\exp: \mathfrak{k}_{m+3} \ni x \longrightarrow e^{\pi(x)} \in B_s(H_m(\pi))$ は，$\mathfrak{k}_{m+3}$ の $|\cdot|_{ad,m+2}$ について有界な任意の部分集合上で，$|\cdot|_{ad,m+1}$ について一様連続．ただし $B_s(H_m(\pi))$ は $H_m(\pi)$ 上の有界作用素全体に強位相を考えたもの．

この連続性によって [3, §5] で与えた exponentials の満たす交換関係が次の様に拡張される．まず連続性によって

<u>命題4.7</u>(cf. [3, Prop.5.4]) $\forall x \in \mathfrak{k}_4,\ y \in H_1(ad)$

$$e^{\pi(x)}\pi(y)e^{-\pi(x)} = \pi(e^{(ad\ x)}y).$$

従って，二つの一径数群 $e^{\pi(x)}e^{t\pi(y)}\cdot e^{-\pi(x)}$ と $\exp(t\pi(e^{(ad\ x)}y))$ $(x \in \mathfrak{k}_4,\ y \in \mathfrak{k}_2)$ が同じ無限小生成作用素を持つことになり，結局次を得る．

<u>命題4.8</u>(cf. [3, Prop.5.5]) $\forall x \in \mathfrak{k}_4,\ y \in \mathfrak{k}_2$

$$e^{\pi(x)}e^{\pi(y)}e^{-\pi(x)} = \exp\pi(e^{(ad\ x)}y).$$

参考文献

[1] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1983.

[2] V. G. Kac and D. H. Peterson, Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem, Invent. Math., 76 (1984), 1-14.

[3] K. Suto, Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 633-659.

[4] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.