数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 14-28

Floer ホモロジーと多様体の分解

東京都立大学 理学部　吉田朋好

§1. Gauge theory in 3-dimension

M を向きづけられた閉3-多様体で $H_*(M,\mathbb{Z}) \cong H_*(S^3,\mathbb{Z})$ とする。$P = M \times SU(2)$ を M 上の principal $SU(2)$ バンドルとし θ を P 上の自明な接続とする。

P のなめらかな接続の全体はアフィン空間となる。これを $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(P)$ とかくと $\mathcal{A} \cong \Omega^1(M)$ の $su(2)$ である。ただし $su(2)$ は $SU(2)$ のリー環をあらわす。$\Omega^1(M)$ の $su(2)$ に（M に Riemann 計量を与えて）L^2_1-inner product を入れ完備化する。これは無限次元多様体である。

$\mathcal{G} = C^\infty(M, SU(2))$ を Gauge 群とよぶ。$\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ に作用する。$g \in \mathcal{G}$, $A \in \mathcal{A}$ に対し $gA = gdg^{-1} + gAg^{-1}$ である。$R \subset \mathcal{A}$ を可約な接続からなる部分空間とする。$R = \{A \in \mathcal{A} \mid \mathcal{G}_A = \{g \in \mathcal{G} \mid gA = A\} \neq \{\pm 1\}\}$.
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} - R$, $\mathcal{B}^* = (\mathcal{A}^*)/\mathcal{G}$ とおく。$\mathcal{B}^*$ は L^2_1

-理論を用いて無限次元多様体になる。

$*: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{3-p}(M)$ を Hodge star 作用素とする

$a, b \in \Omega^1(M) \otimes su(2)$ に

$$(a, b)_{L^2} = -\int_M tr(a \wedge *b)$$

により内積を入れる。これにより $\mathcal{B}^*$ は無限次元 Riemann 多様体になる。

$\mathcal{A}^*$ 上の Chern-Simons functional f を

$$f(A) = \int_M tr\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right)$$

で定義する。$g \in \mathcal{G}$ に対し $f(gA) = f(A) + c\, deg(g)$ (c は constant) となる。$deg(g)$ は $g: M \to SU(2)$ の写像度。これにより f は

$$f: \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{R}/c\mathbb{Z}$$

を与える。

$A \in \mathcal{A}^*$ の曲率は $F_A = dA + A \wedge A \in \Omega^2(M) \otimes su(2)$ で与えられる。$A \longrightarrow -*F_A$ は $\mathcal{A}^*$ 上の $\mathcal{G}$-同変なベクトル場を定義し、これは $\mathcal{B}^*$ 上のベクトル場を与える。このベクトル場は f の gradient (勾配) ベクトル場である。

f の臨界点は $grad_A f = -*F_A = 0$ となる接続

の $\mathcal{G}$-同値類 $[A]$ で、これらはいわゆる flat 接続と呼ばれるものであり ホロノミー表現をとることにより

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), SU(2)) / \mathrm{ad}\, SU(2)$$

の自明表現以外のものと1対1に対応する。

接続 A に対し 微分作用素 D_A を

$$D_A : (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(M) \otimes su(2) \longrightarrow (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(M) \otimes su(2)$$

を

$$D_A(a, b) = (*d_A a + d_A b,\quad d_A^* a)$$

$(a \in \Omega^1(M) \otimes su(2),\quad b \in \Omega^0(M) \otimes su(2))$

と定義する (これは非有界作用素だから 定義域のとり方には注意する。)

D_A は自己共役 Fredholm 作用素となり、A が flat 接続のとき D_A は本質的に f の臨界点 $[A]$ における f の Hessian とみなすことができる。

flat 接続 A が非退化とは $\mathrm{Ker}\, D_A = \{0\}$ であることと定義する。

A_0 と A_1 が f の2つの非退化な flat 接続 ~~[illegible]~~ であるとき A_0 と A_1 の次数 (mod 8) の差、

$d([A_1]) - d([A_0]) \pmod 8$ を次のように定義する。$\{A_t\}_{0\le t\le 1}$ を A_0 と A_1 を結ぶ $\mathcal{A}^*$ の path とする。$\{D_{A_t}\}_{0\le t\le 1}$ は D_{A_0} と D_{A_1} を結ぶ自己共役 Fredholm 作用素の path となる。$\{D_{A_t}\}_{0\le t\le 1}$ の固有値は t とともに変化するが、固有値を t の関数としてグラフでかいたとき、このグラフと t-軸との (topological な) 交点数を $\{D_{A_t}\}$ の spectral flow と呼び $SF(\{A_t\})$ であらわす。M を明示するためにこれを $SF(M, \{A_t\})$ とかくことにする。

$$d([A_1]) - d([A_0]) = SF(M, \{A_t\}) \mod 8.$$

と定義する。これは A_0 と A_1 を結ぶ path $\{A_t\}$ のとり方にはよらない。

Floer ホモロジーは $f : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{R}/c\mathbb{Z}$ のモース理論から得られるホモロジー理論で、flat 接続の集合を生成元とする自由加群 (mod 8 graded) に境界準同型写像 ∂ を定義して得られる。

本稿では flat 接続 A に対し mod 8 次数 $d([A])$ を計算するための一つの方法として上記の spectral flow $SF(M, \{A_t\})$ に対する分解公式を与える。

§2. シリンダーでの計算

Σを向きづけられた連結閉曲面とする。Riemann計量を一つ固定し、又、$\mathrm{genus}(\Sigma) \geqq 2$ とする。$\mathbb{R}$を実数直線とし $\mathbb{R}$の座標を s であらわす

$a \in \Omega^1(\Sigma \times \mathbb{R}) \otimes su(2)$ は $a(s) = p(s) + q(s)\, ds$, $p(s),\ q(s) \in \Omega^1(\Sigma) \otimes su(2)$ とかくことができる。そこで $(a, b) \in (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ を

$$(a(s),\ b(s)) = (p(s),\ q(s),\ b(s))$$

とかき $(\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ の元の1パラメーター族とみなす

Bを $\Sigma \times SU(2)$ 上の flat 接続、1を $\mathbb{R} \times SU(2)$ 上の自明な接続とし $A = B \times 1$ を $(\Sigma \times \mathbb{R}) \times SU(2)$ 上の積により定義される接続とする。

§1の作用素 $D_A : (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(\Sigma \times \mathbb{R}) \otimes su(2) \circlearrowleft$ は上記の記法により

$$D_A \begin{bmatrix} p(s) \\ q(s) \\ b(s) \end{bmatrix} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial s} - D_B \right) \begin{bmatrix} p(s) \\ q(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

とかくことができる。

ただし、σ, D_B は $(\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ 上の作用

素で、それぞれ

$$\sigma = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0 & d_B & *d_B \\ d_B^* & 0 & 0 \\ -*d_B & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

D_B は $(\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ 上の自己共役 Fredholm 作用素で、関係式 $\sigma D_B + D_B \sigma = 0$, $\sigma^2 = -1$ が成り立つ。$\{\mu\}$, $\{\psi_\mu\}$ を D_B の固有値、固有関数とする。$\{\psi_\mu\}$ は $(\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ の L^2-正規直交系を与える。又、$\mathrm{Ker}\, D_B$ は

$$\mathcal{H}_B = \{ \omega \in \Omega^1(\Sigma) \otimes su(2) \mid d_B \omega = d_B^* \omega = 0 \}$$

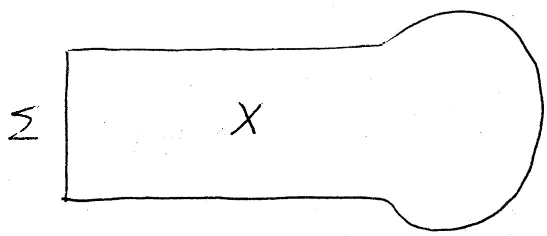
と同一視される。$\mathcal{H}_B$ は $(6g-6)$ 次元実ベクトル空間で、次により定義される二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ により非退化 symplectic ベクトル空間となる：

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = - \int_\Sigma \mathrm{tr}(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

$\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_B$.

§3. global 境界条件をもつ Fredholm 作用素

X を compact 向きづけられた 3 次元 Riemann 多様体とし、$\partial X = \Sigma$ は連結閉曲面 (genus $\geqq 2$) とする。



$\partial X = \Sigma$ の近くで X は $\Sigma \times [0, 1]$ $(\Sigma \times \{0\} = \Sigma)$ と isometric であるとし、又、Σ は $-\partial X$ として向きづける。

B を $\Sigma \times SU(2)$ 上の既約な flat 接続とする。A を $X \times SU(2)$ 上のなめらかな接続で $\Sigma \times [0, 1] \times SU(2)$ 上では $B \times 1$ に等しいものと仮定する。

D_A を $(\Omega^1 \oplus \Omega^0)(X) \otimes su(2)$ 上の §1 で定義された微分作用素とする。

$(\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma) \otimes su(2)$ の任意の部分空間 W に対し

$$\Omega(X, W) = \{\psi \in (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(X) \otimes su(2) \mid \psi|\partial X \in W\}$$

とおく。

又. $P_+, P_- \subset (\Omega^1 \oplus \Omega^0 \oplus \Omega^0)(\Sigma)$ の $su(2)$ を各々

$P_+ = \{\psi_\mu\}_{\mu>0}$ ではられる部分空間

$P_- = \{\psi_\mu\}_{\mu<0}$ 〃

とおく。

Definition 3.1. 次の作用素を定義する。

(1) $\mathcal{E}_A : \Omega(X, P_+ \oplus \mathcal{H}_B) \to (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(X)$ の $su(2)$

$\mathcal{E}_A$ は D_A の closure

(2) $\mathcal{E}_A^* : \Omega(X, P_+) \longrightarrow (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(X)$ の $su(2)$

$\mathcal{E}_A^*$ は D_A の closure

(3) L を $\mathcal{H}_B$ の Lagrangian (すなわち $\dim L = 3g-3$, $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = 0$ for $\forall \omega_1, \omega_2 \in L$) とし.

$\mathcal{F}_A(L) : \Omega(X, P_+ \oplus L) \longrightarrow (\Omega^1 \oplus \Omega^0)(X)$ の $su(2)$

$\mathcal{F}_A(L)$ は D_A の closure

ここで定義域はすべて L^2_1-completion したものとし. 値域は L^2-completion をとり, closure はこれらの norm でとる。

次の命題が成り立つ。

Proposition 3.1

(1) $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_A^*$ は Fredholm 作用素で互いに他の共役.

(2) $\mathcal{F}_A(L)$ は自己共役 Fredholm 作用素.

Proposition 3.2

$$\text{Index of } \mathcal{E}_A = 3g-3.$$

命題 3.2 により $\dim. \operatorname{Ker} \mathcal{E}_A \geqq 3g-3$ である。

Definition 3.2

$$\pi_A : \operatorname{Ker} \mathcal{E}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B$$

を

$$\pi_A(\psi) = \omega \qquad \text{for } \psi \in \operatorname{Ker} \mathcal{E}_A ,$$

(ここに $\psi | \partial X = \omega + \psi_+$, $\omega \in \mathcal{H}_B$, $\psi_+ \in \mathcal{P}_+$)

とおく。

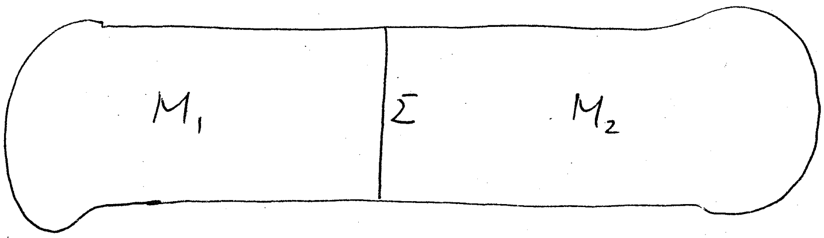
次の命題が成り立つ.

Proposition 3.3

$L_A = \pi_A(\operatorname{Ker} \mathcal{E}_A) \subset \mathcal{H}_B$ とおくと. L_A は $\mathcal{H}_B$ の Lagrangian となる。

§4. 多様体の分解

M を向きづけられた閉 Riemann 3-多様体とし $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2 = \Sigma$ で, M_1, M_2 は M の codimension 0 部分多様体, Σ は連結な向きづけ可能曲面 (genus $g \geqq 2$) とする。



Σ の近くで M は $\Sigma \times [-1, 1]$ ($\Sigma \times \{0\} = \Sigma$) に isometric, $\Sigma \times [-1, 0] \subset M_1$, $\Sigma \times [0, 1] \subset M_2$ とする。又, Σ は ∂M_1 として向きづける。

A を $M \times SU(2)$ 上のなめらかな接続で, $\Sigma \times [-1, 1] \times SU(2)$ 上 $A = B \times 1$ となるものとする。ただし, B は $\Sigma \times SU(2)$ の既約な flat 接続である。

Definition 4.1. $i = 1, 2$ に対し

(1) $\mathcal{E}_A^i = \mathcal{E}_A$ in Definition 3.1 (1) ただし, $X = -M_1$ ($i=1$) 又は $X = M_2$ ($i=2$)

(2) $\mathcal{E}_A^{i*} = \mathcal{E}_A^*$ in Definition 3.1 (2) ただし, $X = -M_1$

$(i=1)$ 又は $X=M_2$ $(i=2)$

(3) Lagrangian $L \subset \mathcal{H}_B$ に対し $\mathcal{F}_A^i(L) = \mathcal{F}_A(L)$ in Definition 3.7 (3) ただし $X=-M_1$ $(i=1)$, 又は $X=M_2$ $(i=2)$

とおく。

命題 3.3 から $L^i = \mathrm{Im}\{\pi_A^i : \mathrm{Ker}\,\mathcal{E}_A^i \longrightarrow \mathcal{H}_B\}$ は $\mathcal{H}_B$ の Lagrangian である $(i=1,2)$。故に $*L^i = \{*\omega \mid \omega \in L^i\}$ も又 $\mathcal{H}_B$ の Lagrangian になる $(i=1,2)$.

Definition 4.2. $i=1,2$ に対し

$$\mathcal{F}_A^i = \mathcal{F}_A^i(*L^i)$$

とおく.

§5. 分解に associate した不変量

M を向きづけられた 3 次元ホモロジー球面, 又, $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \Sigma$ を §4 のような M の分解とする。

A_0, A_1 を $M \times SU(2)$ 上の既約な flat ~~接続~~ 接続で非退化とする. $\{A_t\}_{0\le t\le 1}$ を A_0 と A_1 を結ぶ $\mathcal{A}^*$

の path で. 各 t に対し $A_t \mid \Sigma \times [-1,1] \times SU(2)$ は $B_t \times 1$ (B_t は $\Sigma \times SU(2)$ 上の既約な flat 接続) に等しいものとする。(注) はじめに A_0, A_1 がこの条件をみたせば このような $\{A_t\}$ は必ず存在する。

このとき §4 により $0 \le t \le 1$ に対し作用素の族

$$\{D_{A_t}\}_{0\le t\le 1}, \quad \{\mathcal{E}^i_{A_t}\}_{0\le t\le 1}, \quad \{\mathcal{J}^i_{A_t}\}_{0\le t\le 1}$$

が定義される。

Definition 5.1. $i = 1, 2$ に対し

$\{\mathcal{J}^i_{A_t}\}_{0\le t\le 1}$ は自己共役 Fredholm 作用素の path で §1 と同様に spectral flow が定義される。

$$SF(M_i, \{A_t\}) \equiv \text{spectral flow of } \{\mathcal{J}^i_{A_t}\}_{0\le t\le 1}$$

とおく。($i = 1, 2$)

各 t に対し $\mathcal{H}_{B_t}$ は $(6g-6)$ 次元非退化 symplectic ベクトル空間である。$\mathbb{V}$ を $(6g-6)$-次元非退化ベクトル空間とし, これを一つ fix して.

$$\Theta_t : \mathcal{H}_{B_t} \longrightarrow \mathbb{V}$$

を $\{\mathcal{H}_{B_t}\}_{0\le t\le 1}$ の自明化とする。$i = 1, 2$ に対し, $L^i_t = \pi^i_t(\operatorname{Ker} \mathcal{E}^i_{A_t})$ は $\mathcal{H}_{B_t}$ の Lagrangian で. $\Theta_t(L^i_t)$

を同じ文字 L_t^1 とかくことにする。このようにして、Lagrangian 対の path $\{(L_t^1, L_t^2)\}_{0\le t\le 1}$ が得られる。

$$\mathcal{L} = \{ V \text{ の Lagrangian グラスマン多様体} \}$$

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L} \times \mathcal{L}$$

とおく。

$$\mathcal{L}^2_{(k)} = \{ (L^1, L^2) \in \mathcal{L}^2 \mid \dim L^1 \cap L^2 \geqq k \}$$

とする。

Proposition 5.1

$$\pi_1(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2_{(1)}) \cong \mathbb{Z}$$

$\pi_1(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2_{(1)})$ の生成元 γ_0 を一つ fix する（これは M と Σ の向きづけから canonical に決められる。）

$\{A_t\}_{0\le t\le 1}$ に対し $p(t) = \{(L_t^1, L_t^2)\}_{0\le t\le 1}$ とおきこの homotopy class $[p(t)] \in \pi_1(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2_{(1)})$ に対し、

$$[p(t)] = \partial(\{A_t\})\, \gamma_0 \quad , \quad \partial(\{A_t\}) \in \mathbb{Z}$$

とする。このようにして、不変量 $\partial(\{A_t\})$ が得られる。

§6 分解定理

Mを向きづけられた3次元ホモロジー球面，$M = M_1 \cup M_2$，$M_1 \cap M_2 = \Sigma$ を§5で与えられた分解とする。A_0, A_1 を $M \times SU(2)$ 上の既約な flat 接続で非退化とする。$\{A_t\}_{0 \le t \le 1}$ を A_0 と A_1 を結ぶ $\mathcal{A}^*$ の path で§5の条件をみたすものとする。このとき，§5で与えられた様に，$\{A_t\}_{0 \le t \le 1}$ と分解 $M = M_1 \cup M_2$ に associate した不変量 $SF(M_i, \{A_t\})$ $(i = 1, 2)$，$\gamma(\{A_t\})$ がある。

Theorem

$$SF(M, \{A_t\}) = SF(M_1, \{A_t\}) + SF(M_2, \{A_t\}) + \gamma(\{A_t\})$$

証明は長いので省略する。

応用としては，Floer ホモロジーの Euler 標数と Casson 不変量との関係がこれで明確になり，又，Floer ホモロジーの計算についての手段が得られる。

References

[1] A. Floer : An instanton-invariant for 3-manifolds Commun. Math. Phys. 118 (1988) 215-240

[2] C.H. Taubes. Casson's invariant and gauge theory preprint. Harvard Univ 1988.

[3]. T. Yoshida. Floer Homology and Splittings of Manifolds, Preprint. 1989. Tokyo Metropolitan Univ.