

# Intersection forms of 4-manifolds with homology 3-sphere boundaries

東大理 太田 啓史 (Hiroshi Ohta)

要旨  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3 球面を境界にもつある種の、滑らかな 4 次元多様体の交叉形式を決定する。これは、閉 4 次元多様体の場合の Donaldson の定理の拡張であるとともに、4 次元の境界として 3 次元があらわれることから、3, 4 次元多様体の種々の不変量の相互関係を調べる為の 1 つのステージを与えていとも思える。

<u>目次</u>	§1. 序	4.2. gauge theory setting
	§2. 提示	4.3. Donaldson の方法
	§3. 3, 4 次元多様体の 種々な不変量との関係	4.4. ends of moduli
	§4. 定理の証明	4.5. transversality argument
	4.1. reduction	4.6. 結び
		参考文献

## §1. 序,

1983 ~ 1986年の一連の S. K. Donaldson の仕事 ([2], [3], [4]) から話をす。  $Y$  を連結な、可微分 閉 4次元多様体とする。以下二の条件は必しも必要ではないが、簡単のため、 $Y$  は単連結とする。 $b_2^+(Y)$  を、 $Y$  の交叉形式の正の固有値の個数とする。この時、次がなりたつ。

定理([2])  $b_2^+(Y) = 0$  ならば、 $Y$  の交叉形式は  $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$  に同値。

定理([3], [4])  $Y$  は、spin 多様体とし、 $b_2^+(Y) = 1$  ならば、 $Y$  の交叉形式は、 $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に同値。

定理([3], [4])  $Y$  は、spin 多様体とし、 $b_2^+(Y) = 2$  ならば、 $Y$  の交叉形式は、 $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に同値。

ここで、 $Y$  が単連結 ( $H_1(Y, \mathbb{Z}) = 2$ -torsion なし、 $2$  十分) ならば、 $Y$  が spin であることと、 $Y$  の交叉形式が even type であることは同値である。

本稿の目的は、上の定理を境界付4次元多様体の場合に拡張することである。境界付4次元多様体と、閉多様体の場合とでは、色々異なる点が出てくる。まず、閉の時は、Poincaré duality より交叉形式は  $\mathbb{Z}$  上ユニモジューラであるが、境界があると、ユニモジューラとは限らない。しかし、境界(以下、境界成分は1つとする)が  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー3球面ならば、交叉形式は、 $\mathbb{Z}$  上ユニモジューラとなる。以下、境界は、

$\mathbb{Z}$ -ホモロジー3球面とする。この下であっても、前の定理は元のままの形では拡張できない。

例 1.1 滑らかで単連結な4次元多様体で、境界が Poincaré ホモロジー3球面  $\overline{\Sigma(2,3,5)}$  (—は、次の意味;  $\Sigma(2,3,5)$  は Brieskorn ホモロジー3球面で、algebraic link とは canonical な向きが入っているが、—は、それとは逆の向きを表す) であり、交叉形式が対角化不可能な正定値  $-E_8$  であるものが存在する。(これを  $|-E_8|$  とかく)。

よって、境界条件として、ホモロジーより更に詳しい情報が必要となると思われる。これは  $\pi_1$  であろうと考える。

## §2. 提示

$X$  を単連結4次元多様体で、 $\mathbb{Z}$ -ホモロジー3球面  $S$  を境界にもつものとする。主な結果は次である。

定理 1 ([14])  $X$  を上のような spin 多様体とする。この時、 $b_2^+(X) = 1$  且つ  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  ならば、 $X$  の交叉形式は  $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に同値。

定理 2 ([14])  $X$  を上のような spin 多様体とする。この時、 $b_2^+(X) = 2$  且つ  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  ならば、 $X$  の交叉形式は  $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に同値。

注意 ① §1 の 1 番はじめの定理に相当するものは Taubes により証明されている。([17])。即ち、 $X$  を単連結4次元多様体で、 $\mathbb{Z}$ -ホモロジー3球面を境界にもつものとする。この

時,  $b_2^+(X) = 0$  且つ,  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  ならば,  $X$  の交叉形式は  $\mathbb{Z}$  上  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$  に同値。

② 境界条件  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  は “一般には” おとせない。上の Tautbes の定理に於ては, 先の例 1.1 が反例を与える。実際,  $\pi_1(\Sigma(2,3,5))$  の  $\text{SU}(2)$  表現は自明表現をのぞいて 2 つある。ちなみに,  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3-球面の基本群の  $\text{SU}(2)$  表現は自明表現をのぞくと “偶数個” (discrete でない時も, 適当な意味で数えることによる) であることが知られている。([18]) また, 定理 1, 定理 2 に関しては, 次の例がある。

例 2.1  $K$  を  $K_3$  曲面とする。このとき,  $K$  は次の splitting をもつ。([7])。  $K = K_1 \cup_{\partial} K_2$  で,  $S$  は Brieskorn ホモロジー 3-球面  $\overline{\Sigma(2,3,7)}$  で,  $K_1$  の交叉形式  $= -E_8 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K_2$  の交叉形式  $= -E_8 \oplus 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。一方  $\pi_1(\overline{\Sigma(2,3,7)})$  の  $\text{SU}(2)$  表現は自明表現を除いて 2 つある。([6])

しかし,  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  は, ゆらめることが可能であろうと思われる。これに関しては, 多分述べる。

定理 1, 定理 2 の応用として, 次がえられる。

系 1 (3次元多様体への応用)。

$S$  をホモトピー 3-球面で, 単連結 spin 多様体  $X$  で  $b_2^+(X) = 1$  又は  $b_2^+(X) = 2$  なるものをなめらかにバウンドするものとする。この時,  $S$  の Rohlin 不変量は自明。

## 系2 (4次元多様体への応用)

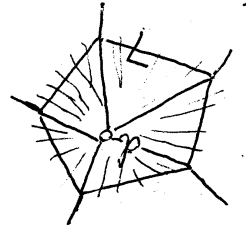
$X_n$  を単連結閉4次元位相多様体で、交叉形式が  $nE_8 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  又は  $nE_8 \oplus 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (但、 $n$  は任意の負整数) なるものとする。この時、 $X_n$  は simplicial triangulation をもたない。

注意 ① 系1 について。A. Casson は、彼の不変量 (Casson's 不変量) を導入することにより、任意のホモトピー3球面の Rohlin 不変量は自明であることを証明した ([1])。系1 は、ある種のホモトピー3球面 (ホモトピー3球面がどれぐらい存在するかわかっていない以上、この表現は適切かどうかわからないが) の Rohlin 不変量が自明であることを、Casson's 不変量を入らずとも、Rohlin 不変量の定義より直接に示せることを主張する。

② 系2 について。Freedman の分類定理 ([9]) により、上のような位相多様体  $X_n$  は、各  $n$  に対し、TOP カテゴリリーにおいて一意に存在する。Casson によれば、(1985, unpublished, See [17]) 非自明な Kirby-Siebenmann 障害をもつ閉4次元位相多様体は、simplicial triangulation をもたない、という。系2 における  $X_n$  の Kirby-Siebenmann 障害は  $n \pmod{2}$  で与えられる。よって、 $n$  が偶数の時は、Kirby-Siebenmann 障害は自明だが、simplicial triangulation をもたない例となる。

系2の証明  $X$ が simplicial triangulation をもったとすると  
 これは、有限個の頂点を除いて PL の頂点は1つであるとし  
 てよい。この時、 $P$ のリンクはホモトピー3球面になり、一方、  
 $X-p$ は PL 巾之、その PL-structure に沿って smoothing できる。  
 すると、 $X-p$ は、なめらかな product end  $L \times \mathbb{R}$  をもつ。これは、  
 定理1, 2 に反する。(17)も参照)。□  
 (smooth product end)

### §3. 3, 4次元多様体の種々な不変量との 関係。



定理1, 2の境界条件  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  に関連して, 3, 4  
 次元多様体の種々の不変量との関係について考えてみる。

まず,  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー3球面  $S^3$  の不変量からいくつか振り返る。

① Casson 不変量  $\lambda$ 。これは、 $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2))^* / \text{SU}(2)$  共役の元の  
 個数を“適当な意味で”数えたものとして定義される。ここ  
 に、\*は、自明表現 (= たゞの可約表現) を除くことを表す。  
 “適当な意味で”とは、一般に表現空間  $\text{Hom}(\pi_1, \text{SU}(2)) / \sim$  は離  
 散的とは限らないので、適当に摂動することにより、“生成  
 元”を見つけ、それを符号付で数えることによる。(詳しくは [1]  
 参照)。この  $\lambda$  は、Rohlin 不変量  $\mu$  の  $\mathbb{Z}$  への持ちあげであるこ  
 とが重要。  $\lambda(S) \equiv \mu(S) \pmod{2}$ 。

② Floer ホモロジー群  $FH_*(S)$ . ( $* \in \mathbb{Z}_8$ ) 詳しくは,  
 [8]を参照。ここで重要なことは, Floerホモロジー群も,  
 $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) \cong$ を介して定義され, しかも Casson 不変量の  
 精密化となっていることである。実際, Taubes [18]によれば,  
 $\lambda(S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_8} (-1)^i \text{rank } FH_i(S)$  である。

注意① Floer ホモロジー群の計算例。まず, Fintushel-Sternが  
 Brieskorn 3球面に関し, 完全に計算法を求めたのが先駆とな  
 り([6])その後, 一般の Seifert fibered 3球面に関しては, まず,  
 [6]をうけつぐ形で, 高倉 ([16])により,  $FH_{\text{odd}} = 0$ が示  
 された。更に古田-Steer ([13])により, Seifert fibred 3  
 球面の Floerホモロジー群の計算法が完全に確立された。また,  
 これらのアプローチとは全く異なる方法で, 古田 [20]により,  
 いくつかの Floer ホモロジー群が計算されている。(例えば, 8の  
 字 knot に沿う Dehn surgery でえられるホモロジー3球面)

② Floer ホモロジー群の拡張。2-ホモロジー3球面以外  
 に対しても, いくつかの Floerホモロジー群の類似物が定義さ  
 れている。まず, レンズ空間に関しては, 古田 ([12])により,  
 また,  $H_1$ に, torsion のないう3-manifolds に関しては, 深谷  
 ([10])により, えられている。(いずれも記号としては,  
 $FH_*$  として書けてしまう, というのは, 冗談である)

さて, この節では, 以上の3次元の不変量( $\pi_1$ の情報の

もりにまかれた) と4次元多様体の交叉形式という不変量が、どのような関係にあるか、考えてみる。まず、次の興味深い現象が出発点となる。

定理 (Fintushel-Stern, 福原-松本幸-坂本) [6], [11].

$a_1, \dots, a_n$  を2以上の自然数で、どの2つも互に素とする。

$\Sigma(a_1, \dots, a_n)$  を, Seifert fibred ホモロジー3球面とし,  $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を, それに対応する Milnor fibre とする。この時,

$$\lambda(\Sigma(a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{8} \text{sign}(V(a_1, \dots, a_n))$$

がなりたつ。□。

Milnor fibre  $V(a_1, \dots, a_n)$  は, 単連結なスピンの4次元多様体で,  $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$  を境界とするものである。

この定理は, (ある種の) ホモロジー3球面の基本群の情報に, それをバウンドするスピン多様体の  $H_2$  とくに交叉形式と関係している, ことを教えてくれる。詳しく言うと, Casson 不変量が, 交叉形式のうち, signature 付き不変量に対応している。そこで, 今我々は4次元多様体の交叉形式自体を決定しようとしている。この時, 次の代数的な事実に注意する。

定理 (Hasse-Minkowski) [15].

$\mathbb{Z}$  上の不定値ユークリッド二次形式は, (1) type, (2) signature (3) rank の3つの不変量で分類される。



よって、我々の定理1,2の場合と、先の[F-M-S]の定理とを比較すると、 $type$ はevenでfixした下で、我々はsignatureのみならずrankまで決めなければならぬ。それには、境界条件として、Casson不変量よりも詳しい不変量が必要かと思われる。それは、Floerホモロジー群であろうと考える。

予想1(定理?) (Donaldson, Taubes, Floer, ...?)

Taubesの定理 ( $b_2^+(X)=0$  の場合, §2注意①参照) において、境界条件  $Hom(\pi_1(S), SU(2)) = \{1\}$  は、 $FH_1(S)=0$  でおきかえられるだろう。

注意③ 向きを入れかえて、 $b_2^- = 0$  とすると、 $FH_4(S)=0$  にかわる。

④ §1.例1.1 において、 $2|E\&| = \overline{\Sigma(2,3,5)}$  であつた。  $\overline{\Sigma(2,3,5)}$  のFloerホモロジー群は、[6] によって求められている;

$$FH_*(\overline{\Sigma(2,3,5)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 1, 5 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これは、予想1に矛盾しない。

更に、我々は、定理1,2に対しても予想をたてる。

予想2

定理1,2において、境界条件は、 $FH_*(S)=0$  でおきかえられる。但、 $*=1$ , と、他いくつか(3 or 7 を含む)のdegreeである。

注意⑤ 先の §2. 例 2.1 において。[6] により、 $\overline{\Sigma(2,3,7)}$  の Floer 群は、

$$FH_*(\overline{\Sigma(2,3,7)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 3, 7 \\ 0 & \text{その他。} \end{cases}$$

予想 2 が予想 1 より多くの Floer 群の vanishing が必要なのは、上の例からもわかるが、実際証明しようとするとき、定理 1, 2 は、Taubes の定理にくらべ、高い次元の component の モジューライ空間を取り扱い、その ends をコントロールする為にはいくつかの Floer 群の vanishing が必要だと思われる。

更に、定理 1, 2 で vanishing の条件が異なるであろうとも考えられる。

さて、この予想は、Floer ホモロジー群が、Casson 不変量の精密化であるという立場からたてたものであるから、当然の帰結として次のようなことが予想より従う。

予想の系  $\Sigma$ -ホモロジー 3 球面  $S$  で、 $\lambda(S) = 0$  かつ  $FH_*(S) \neq 0$  なるものが存在する。

これは、対角化不可能な不定値交又形式をもつ単連結 4 次元多様体で、その境界  $S$  は  $\Sigma$ -ホモロジー 3 球面で  $\lambda(S) = 0$  なるものが存在する。ことによる。

注意⑥ 予想の系の別証。これは河内明夫先生より御指摘頂いた。これは、次の二つのことを用いることによる。

(1) Casson 不変量の和公式。  $\lambda(S_1 \# S_2) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2)$

及び:  $\lambda(\bar{S}) = -\lambda(S)$ . ( $-$  は orientation reverse の意味)

(2) (吉田朋好先生の observation)

$$FH_*(S_1 \# S_2) \supset FH_*(S_1) \oplus FH_*(S_2) \text{ (direct sum)}$$

今,  $S_1, S_2$  を 2 つの  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3 球面 で  $\lambda(S_1) = k_1, \lambda(S_2) = k_2$  とする.  $k_1, k_2 > 0$  とし 2 より. このとき, Taubes により

(§3. ②参照)  $FH_*(S_1) \neq 0, FH_*(S_2) \neq 0$ .  $\Sigma = \mathbb{Z}$ ,  $S := S_1 \# \dots$

$\dots \# S_1 \# S_2 \# \dots \# S_2$  とすると, これは求めるホモロジー 3 球面 である.  $k_1 \neq k_2$  実際, (1) から  $\lambda(S) = 0$ , (2) から,  $FH_*(S) \supset FH_*(S_1) \oplus \dots \oplus FH_*(S_1) \oplus FH_*(S_2) \oplus \dots \oplus FH_*(S_2) \neq 0$ .

## §4. 定理の証明

ここでは, 定理 1 の証明について述べる. 定理 2 は同様の方法で証明できる. ([4] 参照). 証明の方法は, 荒く言えば, Donaldson の方法を open (product end をもつ) 4 次元多様体に拡張したものと, Taubes の解析 (インスタント数 = 1) をインスタント数 2 (or 3) に拡張したものの, の 2 つの組み合わせによる.

### 4.1 reduction

いくつかの代数的な結果を用いることにより, 定理の主張の reduction を行う.

まず, 先にも述べた Hasse-Minkowski の分類定理より, 任意の, even,  $\mathbb{Z}$ -モジュラー不定値な  $\mathbb{Z}$  上の 2 次形式は,

$\cong_{\mathbb{Z}} n E_8 \oplus m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  for  $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists m \geq 0$  とかける。更に次の mod 2 reduction により, rank の評価式がある。

レンマ 1 (mod 2 reduction) [5] or [3].

$(, ): \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}$  を, even  $r = 2m$  二次形式で rank が  $r$  なるものとする。この時, 次の同値がある。

$$\begin{aligned} r \leq 2 &\iff Q_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ &:= (\alpha_1, \alpha_2) \cdot (\alpha_3, \alpha_4) + (\alpha_1, \alpha_3) \cdot (\alpha_2, \alpha_4) + (\alpha_1, \alpha_4) \cdot (\alpha_2, \alpha_3) \\ &\equiv 0 \pmod{2} \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{Z}^r \end{aligned}$$

注意 ① この同値は, より高いランクに対しても同様のものがある。例えば, 定理 2 では,  $r \leq 4 \iff Q_6(\alpha_1, \dots, \alpha_6) \equiv 0 \pmod{2}$  を用いる。

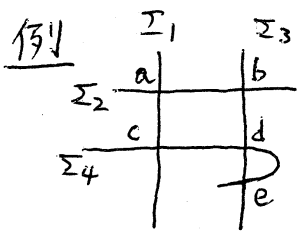
よって, このレンマより,  $Q_4(\alpha_1, \dots, \alpha_4) \equiv 0 \pmod{2}$  を言えば, 二次形式は,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に  $\mathbb{Z}$  上同値となる。

今, 二次形式が,  $X$  の交叉形式

$$(, ): H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}) / \tau_2 \times H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}) / \tau_2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

で与えられている時,  $Q_4(\alpha_1, \dots, \alpha_4) \pmod{2}$  の幾何学的意味は次である。  $\alpha_i \in H_2(X, \partial X; \mathbb{Z})$  ( $i=1, \dots, 4$ ) とする。  $\alpha_i$  を smooth に表現する曲面を  $\Sigma_i$  とする。  $\partial X \neq \emptyset$  中へ, 一般には  $\Sigma_i \neq \emptyset$  であるが, 今,  $\partial X = S$  は  $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3 球面であることから  $H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X; \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{C}P^\infty]$  より,  $\partial \Sigma_i = \emptyset$  にとれる。  
( $\Sigma_i$  の genus は十分大きい)。この時,  $Q_4(\Sigma_1, \dots, \Sigma_4) \pmod{2}$  は, 定義 F1),

レマ 2  $Q_4([\Sigma_1], \dots, [\Sigma_4])$  は, 曲面  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  の configuration number に mod 2 で等しい。ここで,  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  の configuration number とは, 順序を考えない次のような点の組  $\{x_1, x_2\}$  の数のこと。  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$ ,  $x_2 \in \Sigma_k \cap \Sigma_l$ , 但し,  $(i, j, k, l)$  は,  $(1, 2, 3, 4)$  のある置換。



左図のように  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  があるとすると, configuration number は,  $\{a, d\}, \{a, e\}, \{c, b\} \neq \emptyset$  3.

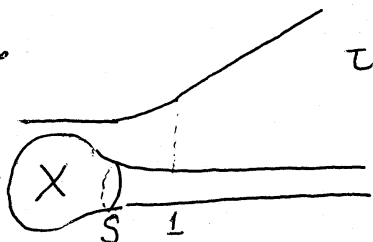
以上より, 示すべきことは,  $\forall x_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$  を smooth に表現する,  $\forall \Sigma_i \subset X$  ( $\partial \Sigma_i = \emptyset$ ) に対し,  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  の configuration number が偶数 ( $Q_4([\Sigma_1], \dots, [\Sigma_4]) \equiv 0 \pmod{2}$ ) であること。

### 4.2 gauge theory setting

上のことを, gauge理論を用いて証明する。その枠組を Taubes [17] に従って準備する。  $M := X \cup_S S \times [0, \infty)$  とおく。  $S$  上に 1 つ Riemann 計量を fix し,  $M$  上の計量としては,  $End(M) = S \times W_{(N \gg 1), \infty}$  上では, 先に入れた  $S$  上の計量と  $(W, \infty)$  上の標準的計量との product 計量になるものを 1 つ fix する。 更に  $\tau: M \rightarrow \mathbb{R}$  なる smooth map で,  $X$  上 zero,  $S \times [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  projection となるものを 1 つ fix。  $P = M \times SU(2) \rightarrow M$  を自明な  $SU(2)$  主束とする。

$\mathcal{A}(P) := \{P \text{ 上の connections } \}$ ,  $End M$  上

では, 自明平坦接続に isomorphic なもの }  $M =$



$A \in \mathcal{E}A(P)$  に対し,  $P(A)$  を

$$P(A) := -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F_A \wedge F_A)$$

で定義する。ここで  $\text{tr}(\cdot)$  は, 標準的な表現で trace をとる。

このとき,  $M$  は非コンパクトだが,  $A \in \mathcal{E}A(P)$  より  $P(A)$  は有限値で well-defined. 更に Chern-Weil 公式から,  $P(A) \in \mathbb{Z}$ . (See [17]).

そこで,  $P(A_0) = k \in \mathbb{Z}$  なり  $A_0 \in \mathcal{E}A(P)$  を 1 つ fix し, 更に  $\delta > 0$  を fix. 考える接続のクラスとして,

$$\mathcal{A}_k(\delta) := \{A_0 + a \mid a \in L^2_{2,loc}(AdP \otimes T^*M), \|a\|_{A_0, \delta} < \infty\}$$

と置く。ここで,  $AdP$  は  $P \rightarrow M$  に  $SU(2)$  の adjoint 表現で同伴する  $su(2)$  束で,

$$\|a\|_{A_0, \delta}^2 := \int_M e^{\tau\delta} \{|\nabla_{A_0}^{(2)} a|^2 + |\nabla_{A_0} a|^2 + |a|^2\}.$$

は, weight  $\delta$  の weighted Sobolev norm を表す。 $\mathcal{A}_k(\delta)$  は, この  $L^2$  Banach 多様体の構造をもつ。次にゲージ群として,

$$\mathcal{G}_k(\delta) := \{g \in L^2_{3,loc}(Aut P) \mid \|\nabla_{A_0} g\|_{A_0, \delta} < \infty\}$$

とする。 $\mathcal{B}_k(\delta) := \mathcal{A}_k(\delta) / \mathcal{G}_k(\delta)$  に商位相を入れるとこれは, 可約接続のゲージ軌道を除いて, 滑らかな Banach 多様体になる。

[17] によれば,  $\mathcal{B}_k(\delta)$  は,  $A_0 \in P^{-1}(\mathcal{E}A(P) \rightarrow k)$  のとり方にはよらない。勿論  $k$  には依存する。

\*を,  $AdP$ -valued forms に作用する  $M$  上の Hodge star operator とする。 $F_+ := \frac{1}{2}(F + *F) : \mathcal{A}_k(\delta) \rightarrow L^2_{1,loc}(AdP \otimes \wedge^2 T^*M)$  を,  $\mathcal{A}_k(\delta)$  の元の曲率の self-dual part を与える写像とする時,

定義  $M_k(\delta) := F_4^{-1}(0)/\mathcal{G}_k(\delta)$  とおいて, これを,  
 $M$  上の anti-self dual 接続のモジュライ空間と呼ぶ。

$M_k(\delta)$  の interior structure に関しては, Taubes の結果 [17] が  
 基本的である。それをまとめておく。

定理 4.2.1  $M$  が不定値交叉形式をもつ時, ある  $\delta_1 > 0$  が存  
 在し, 任意の  $\delta, 0 < \delta < \delta_1$  と,  $M$  上の generic な計量に対し,  
 $M_k(\delta)$  は可約接続のゲージ軌道を含まない。

定理 4.2.2 ある  $\delta_2 > 0$  が存在し, 任意の  $\delta, 0 < \delta < \delta_2$  と,  
 $M$  上の generic な計量に対し,  $M_k(\delta)$  は,

$$\dim M_k(\delta) = 8k - 3(1 - b_1(M) + b_2^+(M))$$

なる次元の有限次元 ( $\mathbb{C}$ -多様体) となる。

定理 4.2.3  $k \geq b_2^+(M)$  ならば,  $M_k(\delta) \neq \emptyset$ 。

そこで,  $\delta > 0$  とし, 上の性質をみたすようにえらんでお  
 き, それを新たに  $\delta$  と fix する。以下この  $\delta$  は省略してかく。  
 我々が証明で用いるものは,  $M_2$  で今  $M$  は不定値交叉。  $M_2$  の中  
 には可約接続が含まれない。更に,

$$\dim M_2 = 8 \times 2 - 3(1 + 1) = 10。$$

### 4.3. Donaldson の方法

$\Sigma_i (i=1, \dots, 4)$  を §4.1 でえらんだ  $X$  内の閉リーマン面とする。

即ち,  $[\Sigma_i] = \alpha_i \in H_2(X, \mathbb{Z}) \cong H_2(X, \mathbb{Z})$ 。

$\mathcal{A}_{\Sigma_i}^* := \{ P|_{\Sigma_i} = \Sigma_i \times S^1(2) \rightarrow \Sigma_i \text{ 上の既約接続の全体} \}$

$\mathcal{G}_{\Sigma_i} := \text{Pl}_{\Sigma_i}$  の automorphisms 全体のなすゲージ群。

$\mathcal{G}_{\Sigma_i, 0} := \Sigma_i$  上のある基点  $x_0$  上のファイバーを fix する automorphisms  
のなす  $\mathcal{G}_{\Sigma_i}$  の正規部分群。

となく、 $\mathcal{G}_{\Sigma_i}$  は  $\mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  に自由に作用しないが、 $\mathcal{G}_{\Sigma_i, 0}$  は、 $\mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  に自由に作用する。

$$\mathcal{B}_{\Sigma_i}^* := \mathcal{A}_{\Sigma_i}^* / \mathcal{G}_{\Sigma_i}, \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{\Sigma_i}^* := \mathcal{A}_{\Sigma_i}^* / \mathcal{G}_{\Sigma_i, 0}$$

となく。この時、次の主ファイブレーションがある。二二二}  $\pm 1$  は、 $A \in \mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  の isotropy 群に対応する。

$$SO(3) \cong SU(2)/\pm 1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\Sigma_i}^* \longrightarrow \mathcal{B}_{\Sigma_i}^*$$

$\mathcal{B}_{\Sigma_i}^*$  上の  $\mathbb{C}$ -直線束  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  を構成する:  $A \in \mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  とする。  $\Sigma_i$  の spin structure を  $(\rightarrow)$  fix し、その  $\pm$  spinor 束を  $W_{i,\pm} \rightarrow \Sigma_i$  とする。  $P$  に同体する  $\Sigma_i$  上の  $\mathbb{C}^2$ -vector 束を  $E_i \rightarrow \Sigma_i$  とする。このとき、  $E_i$  に係数をもつ  $A$  の twist された Dirac 作用素  $\mathcal{D}_{\Sigma_i, A}$

$$\mathcal{D}_{\Sigma_i, A} : \Gamma(W_{i,+} \otimes_{\mathbb{C}} E_i) \longrightarrow \Gamma(W_{i,-} \otimes_{\mathbb{C}} E_i)$$

が定義され、これは elliptic な微分作用素で、Fredholm 作用素。

この determinant index を  $\mathcal{L}_{\Sigma_i, A}$  とおく。

$$\mathcal{L}_{\Sigma_i, A} := \left( \bigwedge^{\max} \text{Ker } \mathcal{D}_{\Sigma_i, A} \right)^* \otimes_{\mathbb{C}} \left( \bigwedge^{\max} \text{Coker } \mathcal{D}_{\Sigma_i, A} \right).$$

これから  $A \in \mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  でパラメタライズされた  $\mathbb{C}$ -直線束

$$\mathcal{L}_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{A}_{\Sigma_i}^* \in K(\mathcal{A}_{\Sigma_i}^*)$$

が得られる。 $\mathcal{G}_{\Sigma_i, 0}$  は  $\mathcal{A}_{\Sigma_i}^*$  に自由に作用するから、 $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  は  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\Sigma_i}^*$  上の bundle におちる。更に  $\pm 1$  は  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  のファイバーに自明に作用するニとが、Atiyah-Singer の family index 定理からわかる。よって結局、 $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  は、



$\mathcal{B}_{\Sigma_i}^*$  上の  $\mathbb{C}$ -直線束におちる。これを改めて  $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \rightarrow \mathcal{B}_{\Sigma_i}^*$  とかく。この時、Donaldson は、 $(\mathcal{L}_{\Sigma_i})$  は、 $\alpha_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$  の代表元  $\Sigma_i$  のとり方、及び、 $\Sigma_i$  上のスピン構造のえらび方には依らないことを示した。

次にこの直線束を、ある種の可約接続上にまでおぼすことを考える。可約接続の軌道の近傍は cone の形をしていいるが、 $\Sigma_i$  まで  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  がのびるための障害は、 $\Sigma_i$  の可約接続が degree 0 の reduction になることである。(これから、可約接続の近傍での  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  の自明化が与えられ、それにより自明に  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  がおぼせる。) つまり、 $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \rightarrow \mathcal{B}_{\Sigma_i}^* \cup \{\text{degree 0 reductions on } \Sigma_i\}$  におぼせる。ここで注意すべきことは、 $\Sigma_i$  上の自明平坦接続は、degree 0 reduction なる可約接続であることである。そこで、制限写像  $r_{\Sigma_i}: M_2 \rightarrow \mathcal{B}_{\Sigma_i}^* \cup \{\text{degree 0 reductions}\}$  に対し、拡張された  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  をいまでも  $r_{\Sigma_i}^* \mathcal{L}_{\Sigma_i} \rightarrow M_2$ 。  $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$  の切断  $s_i$  に対し、 $V_{\Sigma_i}(s_i) := (r_{\Sigma_i}^* s_i)^{-1}(0) \subset M_2$  とおく。この時次の様な transversal な切断  $S_i$  がとれる。

レマ (transversality lemma) ([3], [5], [14])

① 各  $i$  に対し、 $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \rightarrow \mathcal{B}_{\Sigma_i}^* \cup \{\text{degree 0 reductions}\}$  の切断  $s_i$  で、その pull back 切断  $r_{\Sigma_i}^* s_i$  は、余次元 2 の submanifold

$V_{\Sigma_i} \cap M_2$  上 transverse に消えるものが存在する。

② ①の切断は更に、全ての multiple intersection  $V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_p} \cap M_2$  が transverse に存するようにとれる。

③ ①の切断は,  $\Sigma_i$  の自明平坦接続の近傍では消えない。  
 このレマの証明は, 有限次元多様体  $M_2$  に対する Sard の定理  
 による。又 ③は, 自明平坦接続は  $\mathcal{B}_{\Sigma_i}^* \cup \{\text{degree 0 reductions}\}$  の  
 中で孤立(1点)してゐるから, 明に満たすよう  $\Sigma_i$  がとれるので  
 あるが, 後の議論で本質的となる。切断  $\Sigma_i$  をレマのように選  
 ぶ。そこで我々が欲しいモジュライ空間は,  $N_2 := M_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_4}$   
 (切断  $\Sigma_i$  は, レマの様にと, 2 おける何でもよいので任意に fix  
 したものとし,  $\Sigma_i$  は省略してかく) であり, 次元は, transversality  
 より,  $\dim N_2 = \dim M_2 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2$  である。

#### 4.4. Ends of moduli

開多様体上の anti-self dual 接続のモジュライ空間の ends は  
 ある, いくつかの点で曲率が集中してゆくものからなり, これは  
 いわゆる bubble theorem により記述された。しかし, 開多様  
 体  $M = X \cup_S S \times [0, \infty)$  の場合には,  $M$  の end に曲率密度が  
 “逃げてゆく” 接続という新しいタイプの ends が現われてくる。  
 ここでは, 境界条件  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  を本質的に用いるこ  
 とにより, この逃げてゆく接続が“たち”のよい性質をもつもの  
 (粒子のようなふるまいをする) であることを述べる。このこと  
 は, 後で gap theorem という形でまとめられる。即ち,  $M_2$  の ends  
 は, bubble theorem と gap theorem の2つにより記述される。

まず bubble theorem, これは基本的には local theorem 故,

次の形でまとめることができる。(17)も参照)

定理 (bubble theorem)

$M = X \cup_S S \times [0, \infty)$  で、 $P = M \times SU(2) \rightarrow M$  は以前の通りとする。  
 $M$  上の generic な  $C^m$ -リーマン計量に対し次が成立。 $\{[A_j]\} \subset \mathcal{M}_k$   
 $(k \geq 0)$  とする。

(1)  $\exists A$ , anti-self dual 接続 on  $P$ ,  $0 \leq \exists \ell \in \mathbb{Z} \leq k$ ,

$\exists \{x_1, \dots, x_\alpha\} \in M$ , 有限個の  $M$  の点,  $\exists \{h_j\} \in C^\infty(\text{Aut } P|_{M - \{x_1, \dots, x_\alpha\}})$

$\exists \{A_j\}$ ;  $A_j$  の部分列 (index は新しくつけかえて同じ  $j$  で表す),

such that  $\frac{1}{8\pi^2} \int_M |F_{A_j}|^2 = \ell$

$h_j^* A_j \rightarrow A$  on compact domains in  $M - \{x_1, \dots, x_\alpha\}$   
in  $C^m$ -topology.

(2)  $\text{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$  の時, (1) において  $[A_j] \in \mathcal{M}_\ell$  ならば  
 $\{h_j\}$  が与えられる。

(3)  $\text{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$  の時, 且し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\tau \geq n} |F_{A_j}|^2 = 0$$

ならば,  $\exists \delta_1 > 0$ ,  $\exists n < \infty$  として such that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\tau \geq n} e^{\tau \delta} \sum_{p=0}^m |\nabla_A^{(p)} (A - h_j^* A_j)|^2 = 0 \text{ for } \alpha \forall \delta < \delta_1$$

即ち,  $\|\cdot\|_\delta / L < \infty$  として,  $\tau \geq n$  上,  $h_j^* A_j \rightarrow A$ .

更に, この時,  $\ell = k \iff \{x_\alpha\} = \emptyset$  として, この時特に

$h_j^* A_j$  は,  $\mathcal{M}_k$  の中で,  $\|\cdot\|_\delta / L < \infty$  として  $[A_j]$  に収束する。□

注意 ①  $M$  上の generic な計量というのは,  $\text{Eud } M$  での product

計量に存在するものの中で擾動し得られた計量のこと、あらゆる計量の中で擾動したものではない。書き忘れたが、これは §4.2 に於いても同じである。

注意② (2) において、 $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = \{1\}$  が本質的か否かはわからない。

注意③ (3) は、逃げてゆく接続がない時、bubble theorem によつて  $\mathcal{M}_k$  の ends は完全に記述されることを言っている。

そこで、次に問題となるのは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma \supset n} |F_{A_j}|^2 \geq 0$$

なり時である。  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = 1$  と仮定する。

定理 (Gap theorem)  $l \in 0 \leq l < k$  なる整数とある。

$[A_j] \in \mathcal{M}_k$  とする。もし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma \supset n} |F_{A_j}|^2 > l$$

ならば、実は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma \supset n} |F_{A_j}|^2 \geq l+1. \quad \square$$

$[A_j] \in \mathcal{M}_k \neq 1$ ,

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_M |F_{A_j}|^2 = k$$

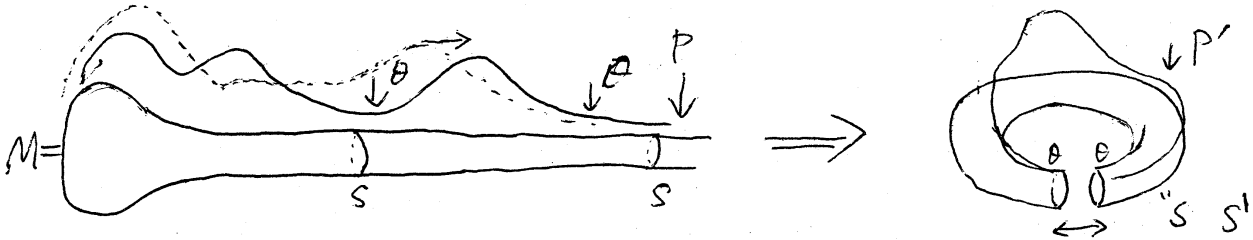
に注意すれば、上の定理より直ちに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma \supset n} |F_{A_j}|^2 = 0 \text{ or } 1 \text{ or } \dots \text{ or } k-1 \text{ or } k.$$

が従う。

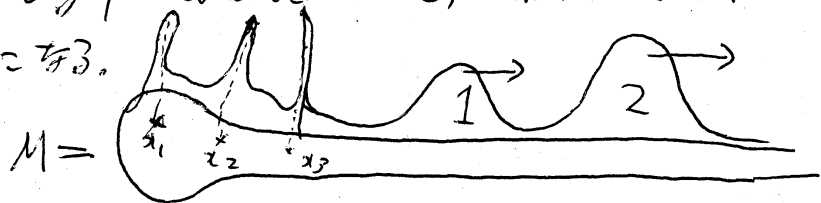
証明のキーとなるのは、Uhlenbeck の  $L^p$ -boundaries [9] と、

Chern-Weil 公式である。荒く言えば、接続の列  $A_j$  が  $\text{End } U$  に  
 進んでゆくとき、曲率密度の"ふもと"のところは、小さくなる。



ゆく。Uhlenbeck の  $L^p$ -boundaries 定理から、これは  $S$  上のあ  
 る平坦接続に近づく。ところが  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) = 1$  かつ、 $S$   
 の平坦接続は自明なもの  $\theta$  しかない。そこで、今、この部分  
 を上の右図のようにはりあわせ、bundle も、接続(とき  $\theta$ ) も  
 はりあわせろ。こうしてえられた bundle  $P' \rightarrow S \times S'$  は、はりあ  
 わせる部分の自明化のちがい ( $\theta$  の固定化群  $\cong \text{SU}(2)$  で twist 故)  
 によりねじれた  $\text{SU}(2)$  束となる。接続ははりあわせたところで  
 少し cut off することから、"ほとんど" anti-self dual なものとな  
 る。よって Chern-Weil の公式から、新しくえられた接続の  
 曲率の積分は  $C_2(P')$  に等しい。よってこの積分値は整数値で  
 現われる。尚一般に  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SU}(2)) \neq 1$  の時は、この積分値は  
 ふもとに現われる平坦接続  $\alpha, \beta$  の Chern-Simons functional  $\int \alpha \wedge \alpha \wedge \alpha$   
 $+ \frac{2}{3} \alpha \wedge \alpha \wedge \alpha$  の差 (mod  $\mathbb{Z}$  まで) になる。

以上 bubble theorem と gap theorem をあわせ、 $M_k$  の ends を模式的  
 にかくと次のようになる。



よって  $M_2$  の ends は次のようなタイプに分類できる。

$\{A_j\} \subset M_2$  とする。

Case (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\tau \geq n} |F_{A_j}|^2 = 2$  .

Case (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\tau \geq n} |F_{A_j}|^2 = 1$  .

Case (2)-a  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\tau \leq n} |F_{A_j}| < \infty$  for  $\forall n < \infty$   
( $\alpha=0$ に対応)

Case (2)-b  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\tau \leq n} |F_{A_j}| = \infty$  for  $\exists n < \infty$

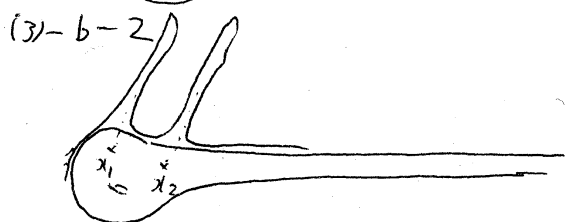
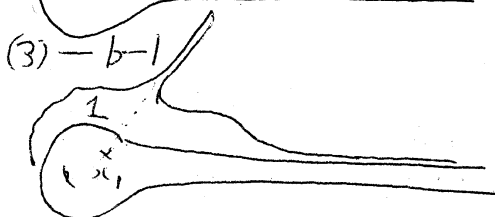
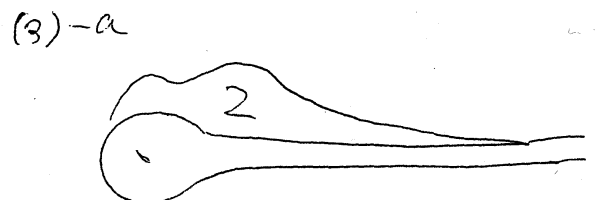
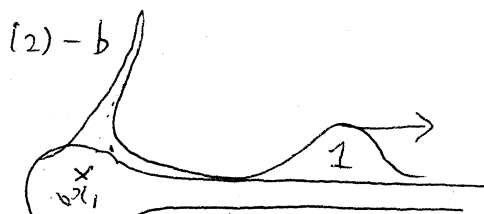
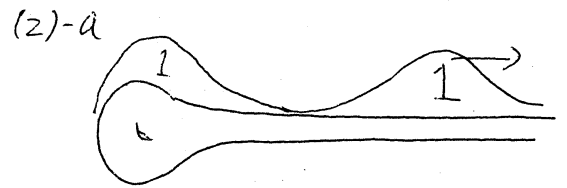
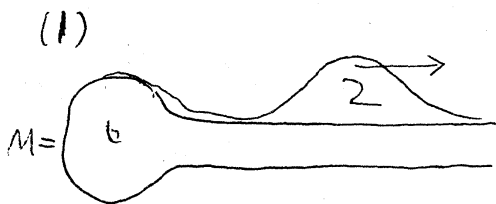
Case (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\tau \geq n} |F_{A_j}|^2 = 0$  .

Case (3)-a  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\tau \leq n} |F_{A_j}| < \infty$  for  $\forall n < \infty$   
( $\alpha=0$ に対応)

Case (3)-b  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\tau \leq n} |F_{A_j}| = \infty$  for  $\exists n < \infty$

Case (3)-b-1 bubble theorem により  $\alpha=1$

Case (3)-b-2 bubble theorem により  $\alpha=2$



注意 bubble theorem (3)より, Case (3)-a の時  $[A_j]$  は  $M_2$  の中で  
ある  $[A] \in M_2$  に収束するので, これは実は end ではない。ま  
た, Case (3)-b-2 では, 曲率の集中点  $\alpha_1, \alpha_2$  は重なって 1  
点に存在する場合もある。

### 4.5 transversality argument

$M_2$  の ends のタイプは §4.4 の如くに記述された。ここで考え  
るのは,  $N_2 = M_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_4}$  (§4.3) である。切断  $S_i$  ( $i=1, \dots, 4$ )  
をうまくえらんでおけば,  $M_2$  の ends のうちいくつかは  $N_2$  の  
ends には現われないようにできる, ということを, §4.3 の trans-  
versality lemma を使って示す。

レマ 1 直線束  $\Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}P^1$  (degree 0 reductions) の切断  $S_i$  で,  
 $N_2$  には, Case (1), (2)-a, (2)-b, (3)-b-1, のタイプの ends が現  
われないようにできる, ものが存在する。

レマ 2  $S_i$  を レマ 1 のようにえらぶ。この時,  $N_2$  の ends に  
は, タイプ (3)-b-2 だけが現われるが, 曲率の集中点  $\alpha_1, \alpha_2$   
は,  $\alpha_1 \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$ ,  $\alpha_2 \in \Sigma_k \cap \Sigma_l$  (但,  $(i, j, k, l)$  は  $(1, 2, 3, 4)$  のあ  
る置換) でなければならぬ。

レマ 1 を示すには, 1) かわる dimension counting という方法  
と, Uhlenbeck の  $L^p$ -boundness がポイントとなる。まず (1) の  
場合,  $X$  上では曲率が 0 に近くなってゆくから,  $X$  上ある平  
坦接続に近づく。  $\pi_1(X) = 1$  故, これは  $X$  上の自明平坦接続で

ある。これを各surface  $\Sigma_i$  に制限すると,  $\Sigma_i$  上自明平坦接続に近づく。しかし, transversality lemma ③から, このような接続は,  $V_{\Sigma_i}$  の中に入らな<sup>い</sup>。よって  $N_2 = M_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_4}$  の中にはあ<sup>ら</sup>わ<sup>れ</sup>な<sup>い</sup>。次に dimension counting の方法で典型的なのは (3)-b-1。逃げ<sup>て</sup>ゆく ends が<sup>な</sup>い<sup>の</sup>で, これは bubble theorem で<sup>記</sup>述<sup>さ</sup>れ, この ends は  $([A], \alpha_i) \in M_1 \times M \subset \overline{M}_2$  に<sup>対</sup>応<sup>す</sup>る。  $\alpha_i$  は高々 2 つの surfaces ( $\Sigma_i, \Sigma_j$  と<sup>す</sup>る) 上<sup>に</sup>しか<sup>な</sup>い。この時, transversality lemma から,  $\dim(M_1 \cap V_{\Sigma_i} \cap V_{\Sigma_j}) = 2 - 2 \times 2 = -2 < 0$ 。よって,  $M_1 \cap V_{\Sigma_i} \cap V_{\Sigma_j} = \emptyset$ 。

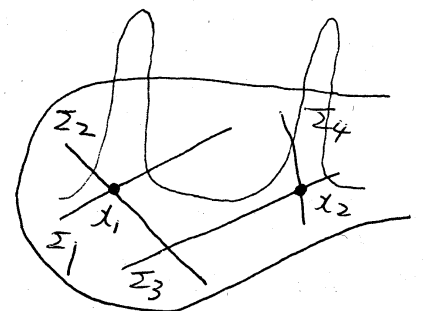
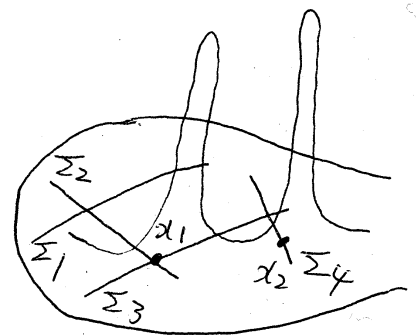
即ち,  $([A], \alpha_i) \in M_1 \times M$  の点<sup>は</sup>  $N_2$  の ends <sup>には</sup>現<sup>れ</sup>な<sup>い</sup>。(2)-a は逃げ<sup>て</sup>ゆくもの<sup>が</sup>あ<sup>る</sup>か, これは 1-インスタント<sup>ン</sup>だ<sup>と</sup>思<sup>え</sup>ば同様に次元を数<sup>え</sup>ることで  $N_2$  <sup>には</sup>現<sup>れ</sup>な<sup>い</sup>ことがわ<sup>か</sup>る。

(2)-b は, 次の Lemma 2 の証明法と同様<sup>な</sup>ので Lemma 2 に<sup>つ</sup>いて

述<sup>べ</sup>る。  $\Sigma_1$  上<sup>に</sup>  $\alpha_1, \alpha_2$  と<sup>す</sup>る。この時,  $\Sigma_1$  上<sup>では</sup>, 接続は<sup>Σ<sub>1</sub>上の</sup>自明平坦接続に近<sup>づ</sup>く。

よって  $V_{\Sigma_1}$  <sup>には</sup>含<sup>ま</sup>れ<sup>な</sup>い。故<sup>に</sup>,  $N_2 = M_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_4}$  <sup>にも</sup>含<sup>ま</sup>れ<sup>な</sup>い。

結局, 各曲面  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  は, 曲率の集中点  $\alpha_1, \alpha_2$  を必ず<sup>1</sup>つは含<sup>ま</sup>ず<sup>け</sup>な<sup>い</sup>。それはとりも直<sup>さ</sup>ず,  $\alpha_1 \in \Sigma_i \cap \Sigma_j, \alpha_2 \in \Sigma_k \cap \Sigma_l$  を意味<sup>す</sup>る。



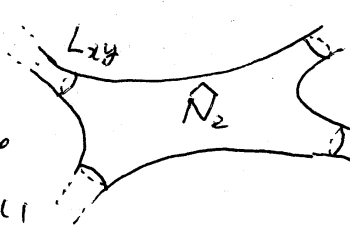


4.6 結び

前節より,  $N_2$  の ends の個数は, 曲面  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  の configuration 数に等しい。よって,  $N_2$  の ends の個数が偶数個であることを示す。まず  $N_2$  の ends の local な形状をしらべる。2点  $x, y \in \Sigma_i$  に対して  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  に曲率が集中し  $(x, y)$  近く end を  $N(x, y)$  とかく。  $N(x, y)$  の local な記述は, 倉西の方法による。多様体  $M$  が閉でなくても, Taubes [17] によれば, generic な weight  $\delta$  をえらべば, deformation complex は Fredholm complex になる。

$$0 \rightarrow L_{k, \delta}^p \Omega^0(\text{Ad} P) \xrightarrow{d_A} L_{k+1, \delta}^p \Omega^1(\text{Ad} P) \xrightarrow{d_A^+} L_{k, \delta}^p \Omega^2(\text{Ad} P) \rightarrow 0$$

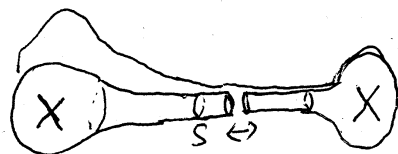
開多様体上の Taubes による Fredholm theory を用い, 結局 bubble end  $N(x, y)$  の local な形は, 閉の時と同様に  $N(x, y) \cong L(x, y) \times \mathbb{R}_+$ ,  $(4 \times y)$  は topological には  $S^1$  の  $(1, 1)$  となる。そこで最後に, 次のようなものを構成すればよい。即ち,  $N_2$  上の  $\mathbb{R}$ -直線束  $\mathcal{L} \rightarrow N_2$  でその 1-st Stiefel-Whitney 類を  $w_1(\mathcal{L})$  とする時,  $w_1(\mathcal{L})$  を  $N_2$  の各 end の  $(1, 1)$   $L(x, y)$  で値をとると常に  $w_1(\mathcal{L})[L(x, y)] \equiv 1 \in \mathbb{Z}_2$  となるものを構成すればよい。実際この時,  $\hat{N}_2$  を  $N_2$  の明な truncation とすると,  $\partial \hat{N}_2 = \cup L(x, y)$ . 故に,  $0 \equiv w_1(\mathcal{L})[\partial \hat{N}_2] = \sum_{x, y} w_1(\mathcal{L})[L(x, y)] \equiv \sum_{i=1}^4 [\Sigma_i]$  が成る。



閉の時,  $\mathcal{L}$  は base の多様体  $M$  のスピン構造を用い,

これを twisted Dirac 作用素の det index 束として定義するが, 今  $M$  が閉だと, Dirac 作用素は Fredholm でなく index 束が定義

されたり。しかし、 $N_2$ には他に“ $2$ のく  $Ends$ ”がないことから  $N_2$ は  
ある閉スピンドメイン上の  $C_2=2$  なる  $SU(2)$  束上  
の接続 (anti-self dual ではない) のモジュライ空  
間の中に homeomorphic にうめ込める。(右図参照。)  $2$  = “ $2$ ” 先の図の  
場合の議論を行えば、所要の  $2$  が構成される。



## References

1. S. Akbulut and J. McCarthy, Casson's invariant for oriented homology 3-spheres — an exposition, preprint (1986)
2. S. K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, J. D. G. 18 (1983), 279–315
3. ———, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, J. D. G. 24 (1986), 275–341.
4. ———, The orientation of Yang-Mills moduli spaces and four-manifold topology, J. D. G. 26 (1987), 397–428.
5. ———, Polynomial invariants for smooth four-manifolds to appear in Topology.
6. R. Fintushel and R. Stern, Instanton homology of Seifert-fibered homology three spheres, to appear in Proc. London Math. Soc.
7. ———, Homotopy  $K3$  surfaces containing  $\Sigma(2,3,7)$ . preprint.
8. A. Floer, An instanton invariant for 3-manifolds, Comm. Math. Phys. 118, (1988) 215–240.

9. M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. D. E. 17 (1982), 357-453.
10. K. Fukaya, Instanton homology for oriented 3-manifolds. preprint (1989).
11. S. Fukuhara, Y. Matsumoto, K. Sakamoto, Casson's invariant of Seifert homology 3-spheres. (1988) Preprint.
12. M. Furuta, An analogue of Floer homology group for lens spaces. Preprint. (1988)
13. M. Furuta and B. Steer, Seifert fibred homology 3-spheres and the Yang-Mills equations on Riemann Surfaces with marked points. preprint.
14. H. Ohta, Intersection forms of 4-manifolds with a homology 3-sphere boundary. Preprint. (1989)
15. J. P. Serre. Cours d'arithmétique, Press. Univ. de France, Paris (1970)
16. T. Takakura, Seifert fibred homology 3-sphere の基本群の表現空間における Morse theory. 東京大学修士論文 (1989).
17. C. H. Taubes, Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. J. D. G. 25 (1987), 363-430.
18. ———, Casson's invariant and gauge theory. Preprint.
19. K. K. Uhlenbeck, Connections with  $L^p$ -bounds on curvature, C. M. P. 83 (1982)
20. T. Yashida, Floer homology and splitting of manifolds. Preprint.

1990, 2. 8.