数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 103-112

Homotopy commutativity of the loop space of a finite CW-complex

信大理　可知　偉行 (Hideyuki Kachi)

1. 基点をもつ位相空間 Y において，基点を基点にうつす連続写像 $\mu : Y \times Y \to Y$ が与えられ，対角写像 $\Delta : Y \to Y \times Y$ と基点への定値写像 $0 ; Y \to Y$ に対して，二つの合成写像 $\mu(1_Y \times 0)\Delta$ と $\mu(0 \times 1_Y)\Delta$ が共に恒等写像 $1_Y : Y \to Y$ にホモトープのとき，$Y = (Y, \mu)$ を積 μ をもつホップ空間 (H-空間) と呼ぶ。

さらに，成分の順序を交換する同相写像 $T : Y \times Y \to Y \times Y$ に対して，合成写像 μT が μ にホモトープのとき，Y は μ に関してホモトピー可換であるという。

コンパクト，連結リー群 G は，その積により Hー空間とみなすことができるが，荒木-James-Thomas [1] により，G がホモトピー可換であるためには，G が可換群，すなわち，トーラス群であることが必要十分条件であることが示され，さらに一般に，連結有限 CW 複体がホモトピー可換なホップ

空間ならば，それはトーラスのホモトピー型をもつことが，Hubbuck [4] により証明された。

基点をもつCW複体Xの閉道空間 $\Omega X=\{\omega: I\to X,\ \omega(0)=\omega(1)=*\}$ に対して，閉道積 $\mu:\Omega X\times\Omega X\to\Omega X$，$\mu(\omega_1,\omega_2)=\omega_1\cdot\omega_2$ を

$$(\omega_1\cdot\omega_2)(t)=\begin{cases}\omega_1(2t) & 0\le t\le 1/2\\ \omega_2(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

で定義する。 このとき，$(\Omega X,\mu)$ はホモトピー結合的ホップ空間である。

我々は，2-cells 又は 3-cells をもつCW複体Xについて，閉道積に関する閉道空間ΩXのホモトピー可換性について研究する。

交換子写像$\varphi:\Omega X\times\Omega X\to\Omega X$ を

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=(\omega_1\cdot\omega_2)\cdot(\omega_1^{-1}\cdot\omega_2^{-1})$$

で定義する。 $\varphi|_{\Omega X\vee\Omega X}\simeq *$ であることより，$\varphi\simeq\bar\varphi\cdot p$ をみたす写像 $\bar\varphi:\Omega X\wedge\Omega X\to\Omega X$ が誘導される。但し，$p:\Omega X\times\Omega X\to\Omega X\wedge\Omega X$ は自然な射影である。

次の補題は明らかである。

補 題 1.1. ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow$ $\varphi\simeq *$

$\Leftrightarrow$ $\bar\varphi\simeq *$

定義 1.2. 写像 $f:\Sigma A\to X$，$g:\Sigma B\to X$ の Whitehead 積 $[f,g]$ を次により定義する。

$$[f, g] = \Omega_0^{-1}(\overline{\varphi}(\Omega_0 f \wedge \Omega_0 g))$$

但し，$\Omega_0 : Map_*(\Sigma Z, X) \longrightarrow Map_*(Z, \Omega X)$ である。

補 題 1.3. 次は同値である（参 [2], [7]）

(i) ΩX はホモトピー可換である。

(ii) 任意の CW 複体 A, B と任意の写像 $f : \Sigma A \to X$, $g : \Sigma B \to X$ に対して，Whitehead 積 $[f, g]$ は自明である。

(iii) (ii) の条件のもと，$\Psi|_{\Sigma A \times *} \simeq f$, $\Psi|_{* \times \Sigma B} \simeq g$ をみたす写像 $\Psi ; \Sigma A \times \Sigma B \to X$ が存在する。（このような写像 Ψ を type (f, g) の写像という）

(iv) $d : \Sigma\Omega X \to X$ を $1_{\Omega X} : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ の随伴写像とするとき，type (d, d) の写像 $\Psi ; \Sigma\Omega X \times \Sigma\Omega X \to X$ が存在する。

2.

X がホップ空間ならば，閉道空間 ΩX はホモトピー可換であることは良く知られており，逆は一般に成り立たない。それの例として，

例 1. $\Omega CP(3)$ はホモトピー可換である（[7]）

例 2. X を $CP(2)$ に包体を接着して，6 次元以上のホモトピー群を消した空間とするとき，X はホップ空間でないが，ΩX はホモトピー可換である（[3]）

球面 S^n に対しては，S^n がホップ空間であることと，ΩS^n が

ホモトピー可換であることは同値であるが，一般の形として

命 題 2.1. Aを弧状連結CW複体とし，$X=\Sigma A$とする。Xは可縮でないとする。このとき

$$\Omega X \text{ がホモトピー可換} \Longleftrightarrow X \simeq S^3 \text{ 又は } S^7.$$

証明. ΩXがホモトピー可換とすると，命題1.3.により，恒等写像 $1_X : \Sigma A = X \to X$ の Whitehead 積 $[1_X, 1_X] = 0$，即ち type $(1_X, 1_X)$ の写像が存在する。従ってXはホップ空間であり，かつ co H-空間であるから，West [8] により求める結果をえる。

命題 2.2. $X = S^n/\mathbb{Z}_m$ をレンズ空間とする。$(n \geqq 2)$

$$\Omega X \text{ がホモトピー可換である} \Longleftrightarrow n = 3 \text{ 又は } 7.$$

証明 被覆空間 $\mathbb{Z}_m \to S^n \xrightarrow{p} X$ を考え，被覆変換群，$p^{-1}(*)$ 基本群 $\pi_1(X)$ を同一視する。$S^n \supset \mathbb{Z}_m \ni a$ に対して，$l_a : I \longrightarrow S^n$ で，$l_a(0) = *$，$l_a(1) = a$ となる path l_a を各 $a \in \mathbb{Z}_m$ に対応して，固定しておく。

$q : \mathbb{Z}_m \to \Omega X$ を $q(a) = p \cdot l_a$ で定義すると，q はH-写像である。さらにホモトピー同値写像

$$\varphi : \Omega S^n \times \mathbb{Z}_m \longrightarrow \Omega X \qquad \varphi(\tilde{\omega}, a) = (p \cdot \tilde{\omega}) \cdot (p\, l_a)$$

がえられ，これは H-写像である。従って ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow \Omega S^n \times \mathbb{Z}_m$ はホモトピー可換 $\Leftrightarrow n = 3, 7$.

3. $k \geqq 2$ とし，$\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$ の mapping cone を $X = S^k \cup_\alpha e^n$ とおく。このとき次のことが成り立つ.

命題 3.1. ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow$ X は可縮である。

以下4つの場合に分けて証明する。

(1) $\alpha = 0$ のとき，$X = S^k \vee S^n$ で，包含写像 $i_1 : S^k \to X$，$i_2 : S^n \longrightarrow X$ に対して Whitehead 積 $[i_1, i_2] \in \pi_{n+k-1}(X)$ は自明でない。従って補題 1.3 により ΩX はホモトピー可換でない。

(2) $\alpha = s\iota_k$ $(s \neq 0, 1)$，$\iota_k \in \pi_k(S^k) \cong \mathbb{Z}$ のとき，X は suspension 型であるから命題 2.1 により ΩX はホモトピー可換でない。特に $L' = S^{k-1} \cup_s e^k$，$X = \Sigma L'$ とおくとき，Whitehead 積 $[1_X, 1_X] \in \pi(\Sigma(L' \wedge L'), X)$ は自明でない。

(3) α が有限位数のとき，$n-1 > k$ が成り立つ。包体 e^n の characteristic map を $\bar{\alpha} : (V^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, S^k)$ で表わし，α の位数を t_α とする。包含写像 $j : X \to (X, S^k)$ に対して，$j_*(\gamma) = t_\alpha \bar{\alpha}$ をみたす $\gamma \in \pi_n(X)$ が存在する。

$i : S^k \to X$ を包含写像とするとき，Whitehead 積 $[i_* \iota_k, \gamma] \in \pi_{n+k-1}(X)$ は infinite order である。

(4). α が infinite order のとき，k ; even，$n = 2k$ である.

このとき次のことが成り立つ。

補題 3.2. 包含写像 $i ; S^k \to X$ に対して，Whitehead 積

$[i, i] = 0$ ならば，Hopf不変量 $H(\alpha) = \pm 1, \pm 2$ である。

従って，$H(\alpha) \neq \pm 1, \pm 2$ ならば，X はホモトピー可換でない。

α が $H(\alpha) = \pm 1$ をみたすならば，$(k, n) = (2, 4), (4, 8)$ 又は $(8, 16)$ である。

$k = 2$, $H(\alpha) = \pm 1$ のとき，X は複素射影平面 $CP(2)$ とホモトピー同値であり，$\pi_q(X)$ に自明でないWhitehead積をもつ。

$k = 4, 8$ かつ $H(\alpha) = \pm 1$ のとき，$\eta_k \in \pi_{k+1}(S^k)$ に対して，$[\eta_k, \iota_k] \neq 0$，$\alpha \cdot \eta_{2k-1} \neq [\eta_k, \iota_k]$ in $\pi_{2k}(S^k)$．従って完全列

$$\pi_{2k}(S^{2k-1}) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_{2k}(S^k) \xrightarrow{i_*} \pi_{2k}(X)$$

において，$[\eta_k, \iota_k] \notin \ker . i_*$．即ち $[i\eta_k, i] \neq 0$ in $\pi_{2k}(X)$．以上により，α が $H(\alpha) = \pm 1$ ならば ΩX はホモトピー可換でない。

次に $H(\alpha) = \pm 2$ をみたすとき i.e. $\alpha = \pm [\iota_k, \iota_k] \in \pi_{2k-1}(S^k)$ の場合について考える。

X，$\Sigma\Omega X$ の $\mathbb{Z}_2$-係数cohomology群は次のようなadditive baseをもつ

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \{ e_k, \ e_{2k} \}, \quad e_k^2 = 0$$

$$H^*(\Sigma\Omega X; \mathbb{Z}_2) = \{ x_k, y_{2k-1}, x_{2k}, y_{3k-3}, y_{3k-2}, \cdots\cdots \}$$

但し $\deg e_s = s$，$\deg x_s = s$，$\deg y_s = s$．

$d: \Sigma\Omega X \to X$ を $1_{\Omega X}: \Omega X \to \Omega X$ の随伴写像とするとき

$$d^*(e_k) = x_k, \quad d^*(e_{2k}) = x_{2k}$$

が成り立つ。

補題1.3により，ΩX がホモトピー可換ならば，type(α, α) である写像 $\Psi: \Sigma\Omega X \times \Sigma\Omega X \to X$ が存在する。このとき

$$0 = \Psi^*(e_k \cdot e_{2k}) = \Psi^*(e_k) \cdot \Psi^*(e_{2k})$$
$$= x_k \otimes x_{2k} + x_{2k} \otimes x_k$$
$$\neq 0$$

従って ΩX はホモトピー可換ではない。

4. 次の形をもつCW複体 X について，ΩX の可換性を考える。

(4.1) $X = S^k \cup_\alpha e^n \cup_\beta e^{n+m}$

但し $\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$，$\beta \in \pi_{n+m-1}(S^k \cup_\alpha e^n)$.

補題4.1 (4.1)の X に対して，$2 \leq k \leq n$，$m \geq 2$，かつ $\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$ は有限位数又は0とする。もし $m \neq k$ ならば，ΩX はホモトピー可換でない。

証明　完全列

$$\pi_{n+k-1}(S^{n+m-1}) \xrightarrow{\beta_*} \pi_{n+k-1}(S^k \cup_\alpha e^n) \xrightarrow{i_*} \pi_{n+k-1}(X)$$

において，$\pi_{n+k-1}(S^{n+m-1})$ は有限又は自明である。

一方補題3.1の証明の(1)(3)により，$\pi_{n+k-1}(S^k \cup_\alpha e^n)$ は無限位数のWhitehead積を含む。従って上の完全列とWhitehead積

の自然性により，$\pi_{n+k-1}(X)$は自明でないWhitehead積をもつ。

系 4.2. $X=(S^k\vee S^n)\cup_\beta e^{n+k}$ とする。このとき

ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow \{k,n\}\subset\{3,7\}$ かつ $\beta=[i_1,i_2]$

証明 $\beta\neq[i_1,i_2]\Rightarrow \Omega X$ はhomotopy可換でない.

$\beta=[i_1,i_2]\Leftrightarrow X\simeq S^k\times S^n$.

命題 4.3. (4.1)のXに対して，$3\leq k=n-1$，$m\geq 1$，$\alpha=s\iota_k$ $(s\neq 0.1)$ とし，$m\neq k$ ならば，ΩX はホモトピー可換でない。

証明 (i) $m\leq k-2$ ならばXはsuspension型である。

(ii) $m=k-1$ 又は $m=k+1$ のとき； pをsと素な素数とする。pによるXの局所化を考えると，$(S^k\cup_s e^{k+1})_p\simeq *$ であるから，$X_p\simeq S_p^{2k}$ 又は S_p^{2k+2} である. ΩX_p はホモトピー可換でないから ΩX もそうである。

(iii) $m\geq k+2$ のとき； $L=S^k\cup_s e^{k+1}$ とおき，$j:L\to X$ を包含写像とする。命題3.1の証明(2)とWhitehead積の自然性，及び，$j_*:\pi(\Sigma(L'\wedge L'),L)\longrightarrow\pi(\Sigma(L'\wedge L'),X)$ が単射であることよりWhitehead積 $[j,j]$は自明でない。

注：(1) $m=k$，sが奇数のときΩXはホモトピー可換でない。

(2) $s=1$ のときは $X\simeq S^{k+1+m}$

命題4.4. (4.1) の X において, $n=2k$, k: even, $m\geq 2$, α は無限位数であるとき, 次の各々の場合に ΩX はホモトピー可換ではない。

(i) Hopf不変量 $H(\alpha)\neq\pm 1, \pm 2$

(ii) $k=2$, $H(\alpha)=\pm 1$, $m\geqq 7$.

(iii) $k=4, 8$ かつ $H(\alpha)=\pm 1$.

(iv) $H(\alpha)=\pm 2$, $m\neq k$.

証明 (i) は補題3.2による。(ii) (iii) は命題3.1 (4) の前半の証明による。(iv) は命題3.1 (4) の後半の証明と同様に.

次元 k, n, $n+k$ に cell をもつ CW 複体について, 特に E を S^k-bundle over S^n ($k\geqq 2$) とするとき, bundle の特性写像と bundle のホモトピー完全列等をつかうことにより, 次の結果がえられる。

命題4.5. E を S^n 上 S^k-bundle とする ($k\geqq 2$). k 又は n は偶数で $(k, n)\neq(3, 4)$ とする

$$\Omega E \text{ がホモトピー可換} \Longleftrightarrow E\simeq CP(3)$$

これに関連して, 最近の岩瀬-三村 [5] の結果として,

" k, n, $n+k$ に cell を各1つもつ Poincaré complex E に対して ΩE がホモトピー可換 $\Rightarrow \{g, n\}\subset\{1, 3, 7\}$ 又は $(g, n)=(1, 2)$,

(2,4), (3,4) 又は (3,5)"

References

[1] S. Araki, I.M. James and E. Thomas, Homotopy abelian Lie groups, Bull. A.M.S. 66(1960) 324–326

[2] M. Arkowitz, The generalized Whitehead product, Pacific J. Math. 12(1962) 7–23

[3] I. Berstein and T. Ganea, Homotopical nilpotency, Ill. J. Math. 5(1961) 99–130

[4] J.R. Hubbuck, On homotopy commutative H-space, Topology 8(1969) 119–126

[5] N. Iwase and M. Mimura, Generalized Whitehead spaces with few cells. to appear

[6] H. Kachi, Homotopy commutativity of the loop spaces of a finite CW-complex, Hiroshima Math. J (1990)

[7] J. Stasheff, On homotopy abelian H-spaces, Proc. Camb. Phil. Soc. 57(1961) 734–745

[8] R.W. West, H-spaces which are co H-spaces, Proc. A.M.S. 31 (1972) 580–582