数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 113-128

Non linear algebraic actions on $\mathbb{C}^n$

大阪市大 理 枡田 幹也
(Mikiya Masuda)

序

最近、H.Bass, H.Kraftらを中心として、代数的群作用の研究が始められたが、今後、トポロジーと代数幾何の活躍の場として発展していくと期待される。その中心問題に、Linearity予想と呼ばれているものがある。最近、G.Schwarz[4]により反例が構成されたが、$\mathbb{C}^n$の自己同型群の構造、代数幾何のcancellation problemとい問題とも関連していて、興味深いものである。Schwarzの結果は、単に反例を与えたのみならず、実に見事で、また、多くの新しい興味ある問題を提供してくれている。本稿では、Schwarzの仕事の紹介をする。また、最後に、彼の仕事についての著者とPetrie氏との考察を述べる。尚、この方面の解説として、[1],[2]がある。

§1. 準備（用語等）

定義 X : affine algebraic variety (over $\mathbb{C}$)

$\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathbb{C}^N$, $\exists\, p_i : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ $(1 \le i \le k)$ polynomial

s.t. $X = \{ x \in \mathbb{C}^N \mid p_i(x) = 0 \quad (1 \le i \le k) \}$

(注) 代数幾何では、上の X を affine algebraic set と呼び、既約な場合に affine algebraic variety と呼ぶようである。

本稿ではすべて、$\mathbb{C}$ 上で考え、又、affine しか取り扱わないので、上の X を単に algebraic variety と呼ぶことにする。

定義 $X \subset \mathbb{C}^N$, $Y \subset \mathbb{C}^M$ とする。$f : X \to Y$ が regular

$\Leftrightarrow$ $\exists\, p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ s.t. $p|X = f$ であって、p の各成分が、X 上定義された有理関数。

(注) X が algebraic variety の時、p の各成分は多項式にとれる。この時特に f を algebraic と言ったりする。

定義 G が (complex) algebraic group

$\Leftrightarrow$ G が algebraic variety であって、写像 $\begin{matrix} G \times G \to G \\ (x, y) \mapsto xy \end{matrix}$, $\begin{matrix} G \to G \\ x \mapsto x^{-1} \end{matrix}$ が共に regular.

例　$GL_n(\mathbb{C}) = \{(x,t) \in M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid t \det x = 1\}$
ここで、$M_n(\mathbb{C})$ は n 次正方行列全体を表わす。

(注) $GL_n(\mathbb{C})$ は $M_n(\mathbb{C})$ の中で $\det \neq 0$ なものと思うと、algebraic group にはならない。algebraic group と思う時には上のように見る。

定義　X : algebraic variety, G : algebraic group とする。作用 $\varphi : G \times X \to X$ が regular の時 φ を algebraic action, X を algebraic G variety と呼ぶ。

定義　regular な準同型 : $G \to GL_n(\mathbb{C})$ を (rational) representation 又、表現空間を (rational) G module という。

complex algebraic group は有限群以外はすべて non-compact であるから、その作用というのは、かなり複雑な気がする。しかし、G が reductive ([1] 参照) の場合には、理論が展開できる可能性がある。それは次の理由に基づく。まず、C^∞ category で compact Lie 群の作用の研究が成功した理由の一つに、slice の存在を主張する slice theorem がある。これにより、局所的には bundle と思えて色々なことがわかった。例えば固定点集合が部分多様体になる等。reductive な群というのは、

compact Lie群の複素化として得られる様なもので(実際, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$, 有限群は reductive であるが, それらは SU_n, U_n, 有限群の複素化. これに反して, $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の複素化で reductive ではない), reductive な群の algebraic action は, C^∞ category での compact Lie群の作用に対応するものと思える。 実際この場合, Luna slice theorem と呼ばれるものがあり, 作用の様子を調べる手掛りとなる。 ただし, この slice theorem は algebraic category での話で, トポロジスト(少なくとも筆者)には, わかりにくい。

§2 Linearity 予想

今後 G は reductive complex algebraic group とする。 G の (rational) representation は algebraic action であることに注意する。これを linear action と呼ぶ

Linearity 予想 (上林 1979 [3]). $\mathbb{C}^n$ 上の任意の algebraic G action は (up to conjugate で) linear action.

もう少し詳しく言うと, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ の (regular) algebraic automorphism 全体からなる群とする時, $\mathbb{C}^n$ 上の algebraic action $\varphi : G\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ は, $g\to\varphi(g, \ )$ により, 準同型 $\Phi : G\to\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ を定める。

$GL_n(\mathbb{C})$は、$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$の部分群であるが、上の予想は「$\varphi$が$G$のある表現と、$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$の中でconjugateである」ということである。これは一種の"rigidity"を問うている。

(注1) G: reductiveという仮定がなければ、予想が正しくないことはすぐにわかる。例えば、$G=\mathbb{C}$にとり、$\mathbb{C}^n$上の$\mathbb{C}$作用として平行移動を考えれば、固定点を持たないから、表現とConjugateにはなりえない。

(注2). C^∞ categoryでのLinearity問題には、反例がいくらでもある。例えば固定点を持たない$\mathbb{R}^n$上の$C^\infty G$ actionが構成されている。またそのようなcompact Lie群の特徴付けもなされている。

Linearity予想は次のcancellation problemと関係がある。

<u>Cancellation problem</u>　X: non-singular algebraic varietyとする。

$$X \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \ (\text{variety として}) \ \underset{?}{\Longrightarrow} \ X = \mathbb{C}^{n-m}$$

これは純粋に代数幾何の問題で難問である(らしい)([1]参照)。その原因は、一般に$\mathbb{C}^n$の特徴付けが見つかっていないことによると思われる。このあたり、トポロジーでは$\mathbb{R}^n$の特徴付け(例えば、可縮でendのπ_1が自明 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$とdiffeo ($n \neq 4$))があるのと異なる。これが又、Linearity予想の反例が見つけ

にくかった原因でもある。

<u>主張</u>　Linearity予想 o.k. ならば Cancellation problem o.k.

<証明>　$G=\mathbb{Z}_2$とする。　$X\times\mathbb{C}^m$上に$(x,v)\to(x,-v)$により、G actionを定義する。　固定点集合はX。　一方、Linearity予想が$G=\mathbb{Z}_2$の時正しいとすると、$\mathbb{C}^n=X\times\mathbb{C}^m$上の$G$ actionは、(up to conjugateで) linearであるから、固定点集合はある$\mathbb{C}^k$と同型。　ここで次元を考えれば$X=\mathbb{C}^{m-n}$となる。　$\square$

$G=$有限巡回群、$\mathbb{C}^*$に対しても上と同様の議論が成立するから、このような場合にLinearity予想を示しても十分に意味がある。　また一方、上の主張はLinearity予想を肯定的に解くことは非常に難しいことも意味している。

§3.　<u>Algebraic G vector bundle</u>

Linearity予想の反例の候補があったとしよう。　これが本当に反例となるかどうかをチェックする際、問題点は2つあるように思う。　1つは、作用を持っているalgebraic variety Xが$\mathbb{C}^n$と同型かどうか。　Xが可縮である等、位相的な性質はチェックできるだろうが、前節で述べたように$\mathbb{C}^n$の特徴付

けがないので、varietyとして$\mathbb{C}^n$と同型かどうかの判定は難しい。もう1つは、たとえXが$\mathbb{C}^n$と同型とわかっても、X上のG actionが(up to conjugateで)linear actionでないとどうやって判定すればよいのだろうか。algebraic actionの不変量なるものは、見つかっていない様工夫がいる。これら2つの難点をSchwarzは見事にクリアーしている。彼のアイデアを説明するために以下少し準備をする。

<u>定義</u> $\pi : E \to X$ が <u>algebraic vector bundle</u> とは

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic variety で π : regular

(2) $\exists \{U_i\}$: Zariski open covering of X

$$\exists\ \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n \quad \text{regular iso.}$$

各fiber上 linear

$$\searrow \ \circlearrowright \ \swarrow$$
$$\mathbb{C}^n$$

s.t.

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ より定まる写像

$U_i \cap U_j \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ が regular.

<u>定義</u> $\pi : E \to X$ が <u>algebraic G vector bundle</u>

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic G variety, π : G map

(2) 作用を忘れると $\pi : E \to X$ は algebraic vector bundle

(3) $^\forall g \in G$: $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(gx)$ は linear

<u>定義</u> algebraic G vector bundle $\pi : E \to X$ と $\pi' : E' \to X$ が<u>同型</u>

$\Leftrightarrow$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\exists\psi"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & E' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
ψ は各 fiber 上 linear な algebraic G iso.

さて、V, W を (rational) G module とする。

<u>記号</u> (1) V 上の algebraic G vector bundle で $0 \in V$ 上の fiber が W となるもの全体の同型類を $VEC_G(V, W)$ と書く。

(2) trivial G vector bundle $V \times W \to V$ を Θ_W と書く。これは $VEC_G(V, W)$ の元である。

C^∞ category では、V は G 可縮故、V 上のすべての G vector bundle は自明。しかし algebraic category では $G = \{1\}$ の時ですら大問題であった。

<u>定理3.1</u> (Serre予想 [Quillen], [Suslin] 1976).
$$VEC_G(V, W) = \{\Theta_W\} \quad \text{if} \quad G = \{1\}.$$

従って次の問題が自然に生じる。

<u>Equivariant Serre 予想</u> $VEC_G(V, W) = \{\Theta_W\}$ for $\forall G$ reductive

これに関して次のことが知られていた。

<u>定理3.2</u> (Bass-Haboush 1987) $VEC_G(V,W)$の任意の元は stable には自明。つまり、$\forall E \in VEC_G(V,W)$ に対し、$\exists Z$: G module s.t. $E \oplus \Theta_Z = \Theta_{W\times Z}$。

定理3.1と3.2をながめれば、Equivariant Serre予想に反例があるとは思いにくい。これについては次節で述べるとして、以下の命題は、上の予想の反例は、Linearity予想の反例を供給することを教えてくれる。$E \in VEC_G(V,W)$はG作用の他に、$\mathbb{C}^*$がfiber上のscalar multiplicationとして作用している。これら2つの作用は可換より、Eは$G\times\mathbb{C}^*$ varietyと見なせる。定理3.1より、作用を忘れるとEはある$\mathbb{C}^n$と同型であることに注意する。

<u>命題</u> (Kraft) $E \ncong \Theta_W \Rightarrow E$上の$G\times\mathbb{C}^*$ actionはlinearizeされない。

(注) 上の命題は一般化される。例えば$\mathbb{C}^*$は$\mathbb{Z}_k$ ($k\geq 2$)で置き換えられる。

§4. <u>Schwarz の結果</u>

G module V の coordinate ring $\mathcal{O}(V)$ (この場合は polynomial ring) には、G が自然に作用している。それの固定点集合 $\mathcal{O}(V)^G$ (つまり <u>invariant polynomial</u>) は、Hilbert により有限生成となることが知られている (G: reductive が必要!)。従って、$\mathcal{O}(V)^G = \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_s]/I$ (I: ideal) と書けるが、この I が定める algebraic variety を V の <u>algebraic quotient</u> と言い、$V/\!/G$ と書く。幾何学的には、V の中の G orbit で Zariski closed なものからなる集合と思ってよい。

<u>例</u> $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ に $\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}^n$ 上自明、$\mathbb{C}^m$ 上 scalar multiplication として作用しているとすると、$(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)/\!/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^n$.

$VEC_G(V, W)$ を調べる際 (又、Linearity 予想を証明しようとする際)、invariant polynomial が多い (つまり、algebraic quotient が小さい) 場合から取り組むのが筋らしい。$V/\!/G$ の次元の小さい方から考える。$\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 0$ の時、容易に Equiv. Serre 予想が正しいことがわかる。しかし、$\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 1$ の時、豪的なことが起こる。

<u>定理 4.1</u> (Schwarz [4]).　$\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 1$ とする。

(1)　$VEC_G(V, W) \xleftrightarrow{\text{全単射}} \mathbb{C}^r$　$(r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

(実際には、$VEC_G(V, W)$ に群構造が入り $\mathbb{C}^r$ と同型)。

(2) $VEC_G(V, W)$ の元は C^{ω} の category ではすべて自明。

(注) $\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G \geq 2$ の時、$VEC_G(V, W)$ は"無限次元"になり得る。

Schwarz は $r > 0$ となり得ることを例証している。それを述べるために記号を準備する。

<u>記号</u> (1) $\overset{O_2}{\overset{\shortparallel}{O_2(\mathbb{C})}}$;　$A = \begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix}$　$(g \in \mathbb{C}^*)$　と $B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ で生成された群。　$(O_2 \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2)$

(2) V_ℓ ;　2次元 O_2 module で

A 作用は　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow A^\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,　B 作用は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

で与えられるもの。

<u>定理 4.2</u> (Schwarz [4]).

(1) $VEC_{O_2}(V_1, V_m) \xleftrightarrow{\text{全単射}} \mathbb{C}^{m-1}$。

(2) $E \oplus \textcircled{H}_{\mathbb{C}}$,　$E \oplus \textcircled{H}_{V_1}$　は自明。

(3) E は $\mathbb{C}^* (\subset O_2)$ vector bundle としては自明。

(注) $VEC_{O_2}(V_2, V_m)$ の場合も同様の結果を得ている。
その他、$SL_2(\mathbb{C})$, $SO_3(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ のある場合に、r の具体的計算結果が述べられている。また彼は、任意の classical group, spin group G に対して、ある適当な V, W をとれば $VEC_G(V,W) \neq \{\Theta_W\}$ となり得ると主張している。

定理 4.2 (1) の対応は以下のように与えられる。
$(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ に対し、多項式 $f(t) = 1 + a_1 t + \cdots + a_{m-1} t^{m-1}$ を対応させる。$\rho : V_1 \to V_1/\!/O_2$ を projection とする。実際、$V_1/\!/O_2 = \mathbb{C}$ となり ρ は $(a, b) \to ab$ で与えられる。

$$U = \rho^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$$

$$U_f = \rho^{-1}(\mathbb{C} - \{t \in \mathbb{C} \mid f(t) = 0\})$$ とおく。

これらは V の Zariski open set で O_2 不変。又、$f(0) = 1 \neq 0$ より $U \cup U_f = V$。$U \times V_m$ と $U_f \times V_m$ を共通部分 $(U \cap U_f) \times V_m$ 上次の Φ_f ではり合わせる:

$$\begin{array}{ccc}
U \times V_m & & U_f \times V_m \\
\cup & & \cup \\
(U \cap U_f) \times V_m & \xrightarrow{\Phi_f} & (U \cap U_f) \times V_m \\
\Psi & & \Psi \\
\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M_f(a,b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

ここで、

$$M_f(a,b) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f+1 & a^{2m} t^{-m}(f-1) \\ b^{2m} t^{-m}(f-1) & f+1 \end{pmatrix} \qquad (t = ab).$$

t^{-m} の項があるから $M_f(a,b)$ は U 上定義され、$\det M_f(a,b)=f$ より $U\cap U_f$ 上可逆であることに注意。何故このような行列が出てくるかは Schwarz の原論文 [4] を参照されたい。上の Φ_f ではり合わせたものが求める $VEC_{O_2}(V_1, V_m)$ の元である。以後これを $E(f)$ と書く。

(注) 正確には $E(f)$ が algebraic G variety となることを示さねばならないが、これは一般論よりわかる(らしい)。

§5 見直し

この節で Schwarz の結果の見直しについて述べる。これは筆者と T. Petrie 氏の共同研究である。定理 4.2 (2) によると $E(f)$ は $V_1\times V_m\times\mathbb{C}$ の中に実現できる。では $E(f)$ はどのように記述されるのだろうか。これが我々の研究の出発点であった。答えは次の通り。

$$\begin{array}{ccc} E(f) = & \{(a,b,x,y,z)\in V_1\times V_m\times\mathbb{C} \mid f(ab)z = a^m y + b^m x\} \\ \downarrow & \downarrow \\ V_1 & \ni (a,b) \end{array}$$

各点 (a,b) 上の fiber は $V_m\times\mathbb{C}$ の中の 2 次元部分空間を定めている。又、上の定義多項式は O_2 不変故 $E(f)$ は O_2 variety。これが前節のものと一致することは局所自明性をみればわかる。

実際それは次で与えられる。

$$\begin{array}{ccccc} U \times V_m & \longrightarrow & E(f) & \subset & V_1 \times V_m \times \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M_f(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \right. & & \left. a^m y + b^m x \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} U_f \times V_m & \longrightarrow & E(f) & \subset & V_1 \times V_m \times \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \right. & & \left. (A^m Y + B^m X)/f \right) \end{array}$$

これにより、はり合わせ写像が§4のものであることが見てとれる。

上の $E(f)$ の記述は前節のそれと比べると簡明である。このことは、Schwarzの見方（vector bundleをはり合わせとして捉える）と異なる見方があることを示唆していると思われる。実際

$$\mathbf{F}(f) : Ⓗ_{V_m \times \mathbb{C}} \longrightarrow Ⓗ_{\mathbb{C}}$$

を各 (a,b) のfiber上

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (b^m, a^m, -f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定義すると、全射となりkernelが $E(f)$ となる。つまりshort exact sequence

$$0 \longrightarrow E(f) \longrightarrow Ⓗ_{V_m \times \mathbb{C}} \xrightarrow{F(f)} Ⓗ_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

を得る。この見方はいくつかよい点がある。例えば、

この exact sequence が split することに注意すれば（一般論からもわかるが、具体的に splitting を構成することができる）、$E(f)\oplus \textcircled{H}_{\mathbb{C}} = \textcircled{H}_{V_m\times\mathbb{C}}$ を得る。これは定理 4.2 (2) の前半部を示している。又、splitting の事実より次を得る。

<u>補題</u> $E(f)$ と $E(h)$ が同型ならば、その同型写像は $\textcircled{H}_{V_m\times\mathbb{C}}$ の同型写像に拡張する。

この補題は有用である。$\textcircled{H}_{V_m\times\mathbb{C}}$ の同型写像は次の3つの性質をみたす：

(1) V_1 の座標 (a,b) の polynomial を成分とする3次の行列。

(2) O_2 作用に関する equivariance の条件をみたす。

(3) $\det = \text{const}\ (\neq 0)$

<証> (1) は同型写像が algebraic ということより。(2) は明らか。(3) は $^\forall(a,b)$ において $\det \neq 0$ であるが、$\det$ は a, b の polynomial より定数以外あり得ない。 ▨

これらのことを用いると、$E(f)$ を $E(h)$ にうつす $\textcircled{H}_{V_m\times\mathbb{C}}$ の同型写像があったとすると $f=h$ が初等的に示せる。

以上、一つの例に話を限ったが、定理 3.2 を用いれば、上の見方は一般化できる。

参考文献.

[1] H. Bass, Algebraic group actions on affine spaces, Contemp. Math. 43 (1985), 1-23.

[2] H. Kraft, Algebraic automorphisms of affine space, Progress in Math. 80 Birkhäuser Verlag 1989, 81-105.

[3] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic actions on affine space, J. Alg. 60 (1979), 439-451.

[4] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions, C.R. Acad. Sci. Paris (to appear).