数理解析研究所講究録
第 721 巻 1990 年 32-43

C l a s s　F o r m a t i o n の高次元化

東工大理　小屋　良祐 (Yoshihiro Koya)

0. 序

本稿の目的は、2次元局所体の類体論が Class formation のの公理系を構成することにより証明される過程の概略を述べることにある。

まず最小限必要な定義と、ここで別証明を与えようとする、2次元局所体の同型定理を簡単に述べる。詳しくは、加藤 [2] および [3] を参考していただきたい。

定義(2次元局所体). 体 K が2次元局所体であるとは、K が完備な離散賦値体であり、剰余体として「通常の意味での」局所体を持つことである。ここで、「通常の意味での」局所体とは、有限体を剰余体に持つ完備な離散賦値体のことを意味する。

定理(2次元局所類体論の同型定理). K を2次元局所体とし、L を K の有限次ガロア拡大体とすれば、

$$\Psi_K: K_2(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

なる準同型写像が存在して、これは

$$K_2(K)/N_{L/K}K_2(L) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$$

なる同型写像を誘導する。

注意. 上述の定義にしろ定理にしろ、本稿で必要であるのは2次元の局所体の場合のみであるので、特に限定した形で述べたが、一般の非負整数 N に対して、N- 次元局所体が加藤 *[2]* および *[3]* において定義され、また同型定理もより一般の形で N- 次元局所体に対して証明されている。

最後になったが、なぜ我々の class fromation 公理系が複体係数のコホモロジーの言葉で記述されていることについて触れなければならない。だれしも、例えば、通常の G- 加群について2次元の局所体についても、類体論の同型定理が証明できれば、それが最良の選択と認めるであろう。そして、もっとも自然な $\mathrm{Gal}(L/K)$- 加群の候補は $K_2(L)$ であるように思われるが、この場合良く知られているように、

$$K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)} \simeq K_2(K).$$

は成り立たない。さらに、L/K が巡回拡大であったとしても、

$$\widehat{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K)\ , K_2(L)) = 0$$

が成立することすら期待できないのである。本稿の定式化が、最良のものでないにしろ単に、群の作用する加群を考えただけでは駄目であると言っても良いと思う。

1.Class Formation の公理系

G を profinite group、$A^\bullet$ を有界な G 加群の複体であって、$n \geq 0$ なる任意の n に対して $A^n = 0$ なる条件を満たすものであるとする。このとき、profinite group G と G 加群の複体 $A^\bullet$ の対 (G, A) を formation と呼び、さらに以下に掲げる公理を満足するときに、対 (G, A) を class formation と呼ぶことにする。

公理１.

H を G の任意の開部分群、q を $q \geq 2$ なる任意の整数とすれば、

$$\mathsf{H}^q(H\ , A^\bullet) = 0,$$

が成り立つ。

公理２.

H を G の任意の開部分群とするとき、

$$\mathsf{H}^q(H\ , A^\bullet) = 0,$$

が成り立つ。(Hilebert の定理９０の類似)

公理３.

H を G の任意の開部分群とするとき、各 H に対して次のような同型写像 $\mathrm{inv}\, H$ が存在する。:

$$\mathrm{inv}\, H \colon \mathsf{H}^2(H\ , A^\bullet) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

公理４.

U および V を G の開部分群とし、これらの間には $V \subset U$ かつ $[U{:}V] = n$ なる関係があるとする。このとき次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{H}^2(U\ , A^\bullet) & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathsf{H}^2(U\ , A^\bullet) \\
{\scriptstyle \mathrm{inv}\, V}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{inv}\, U}\downarrow \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{array}$$

2. Modified Hypercohomology について

まず、我々の class formation の公理系は複体係数の hypercohomology の言葉で記述されているので、それにみあうよう様な Tate のコホモロジー群に対応するものを構成しなくてはならない。 その後、それらのコホモロジー群の簡単な性質を述べる。以下、特に断わらない限り、G は有限群とし、$A^\bullet$ は次数正の項が全て 0 であるような、有界な G- 加群の複体であるものとする。

一般に次のような完全系列が存在し、次の条件を満たす。:

$$\cdots \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots$$

(1) 各々の項 X^n は有限個の基底を持つ自由 $\mathbb{Z}[G]$- 加群である。
(2) 次の完全系列

$$\cdots \longrightarrow X^{-n} \longrightarrow X^{-(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は、実は G-module $\mathbb{Z}$ の射影的分解である。

この様な完全系列を G の complete resolution と呼ぶことにする。（詳しいことは、例えば [1, Chap. XII, §3] を参照のこと。）このとき、G- 加群 M に対して複体

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X^1, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X^0, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X^{-1}, M) \longrightarrow \cdots$$

のコホモロジーをとれば、それが Tate のコホモロジー $\widehat{H}^*(G\ ,M)$ である。

上のように複体

$$\cdots \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots.$$

をとれば、任意の有界な G- 加群の複体 $A^\bullet$ に対して、次のような、2重複体 $Y^{i,j}$ を構成することができる。

$$Y^{i,j} = \mathrm{Hom}_G(X^{-i}, A^j),$$

ここで、微分写像の符号は、何等かの形で決めておく。この2重複体 $Y^{i,j}$ に付随する（シングルな）複体のコホモロジー群を $\widetilde{\mathrm{H}}^q(G\ ,A^\bullet)$ と書いて、これを G の $A^\bullet$ を係数とする modified hypercohomology と呼ぶことにする。

次の命題は、定義から容易に導かれるものである。:

命題１．１． もし $A^\bullet$ が通常の G- 加群と一致するのであれば、その *modified hypercohomology* は *Tate* の群のコホモロジーと一致する。

他にも、Tate のコホモロジー群と類似な性質を持っている。例えば、

命題１．２.
(1)

$$\widetilde{\mathsf{H}}^0(G\,,A^\bullet) \simeq \mathrm{Coker}(\mathcal{H}^0(A^\bullet) \xrightarrow{N_G} \mathsf{H}^0(G\,,A^\bullet)),$$

ただし N_G *は群の hypercohomology のノルム写像である。*
(2) $q \geq 1$ なる任意の整数に対して、

$$\widetilde{\mathsf{H}}^q(G\,,A^\bullet) \simeq \mathsf{H}^q(G\,,A^\bullet).$$

証明．いま

$$X_1^\bullet = (\cdots \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots),$$
$$X_2^\bullet = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots)$$

とおく。これより、次のような複体の完全系列を得る。：

$$0 \longrightarrow X_2^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_1^\bullet \longrightarrow 0.$$

各 $X^\bullet$ は自由な有限生成の $\mathbb{Z}[G]$- 加群であるので、次のような複体の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G^\bullet(X_1^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G^\bullet(X^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G^\bullet(X_2^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow 0.$$

各項のコホモロジーをとって得られる長い完全系列より命題は容易に導かれる。
証明終

次の定理は、他のコホモロジー論と同様にして証明できる。

定理１．３. $A^\bullet$、$B^\bullet$、$C^\bullet$ 等を有界で正の項が全て０になっているような複体であるとする。さらに、これらが G- 加群の複体の triangle

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1].$$

を成しているならば、

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\mathsf{H}}^{q-1}(G\,,C^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathsf{H}}^q(G\,,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathsf{H}}^q(G\,,B^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathsf{H}}^q(G\,,C^\bullet) \longrightarrow \cdots.$$

なる長完全系列を得る。

命題１．４. $A^\bullet$ は有界な G- 加群の複体であり、正の項が全て０になっているとする。このとき、次のようなスペクトル系列が存在する。

$$\widehat{H}^p(G\,,\mathcal{H}^q(A^\bullet)) \Longrightarrow \widetilde{\mathsf{H}}^{p+q}(G\,,A^\bullet).$$

証明．この節の最初に見たように、$\widetilde{\mathsf{H}}^n(G\,,A^\bullet)$ は２重複体 $Y^{i,j} = \mathrm{Hom}_G(X^{-i}, A^j)$ のコホモロジー群である。ところが、[1, Chap. XV, §6] によれば、求めるスペクトル系

列として、この2重複体のスペクトル系列をとればよいことがわかる。なお、スペクトル系列の収束性については、[1, Chap. XV, §5, Case D^k] より保証される。

証明終

系１．５． 複体 $A^\bullet$ は前の命題の仮定を満たし、さらに第０項と第 (-1) 項を除いては全て０であるとする。すると、次のような完全系列を得る。

$$\cdots \longrightarrow \widehat{H}^{n+1}(G, \mathcal{H}^{-1}(A^\bullet)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^n(G, A^\bullet) \longrightarrow \widehat{H}^n(G, \mathcal{H}^0(A^\bullet))$$
$$\longrightarrow \widehat{H}^{n+2}(G, \mathcal{H}^{-1}(A^\bullet)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(G, A^\bullet) \longrightarrow \cdots.$$

このほかに、カップ積の存在等の事実も知られている。ほとんど、ほかのコホモロジー論と同じである。詳しいことは、小屋 [4] を参考のこと。

２．Tate－Nakayamaの定理の一般化

ここでは、次の定理を証明する。次の定理は、Tate-Nakayama の定理を若干一般化したものであり、係数の複体 $A^\bullet$ が通常の G- 加群であるときには、これは、従来の Tate-Nakayama の定理に他ならない。

定理２．１． G を有限群、$A^\bullet$ を G- 加群の複体であり第０項と第 (-1) 項を除いては、全て０になっている様なものであるとする。a を $\widetilde{\mathrm{H}}^2(G, A^\bullet)$ の元とし、さらに G の各 p-Sylow 部分群 G_p に対して、

(1) $\widetilde{\mathrm{H}}^1(G_p, A^\bullet) = 0$.

(2) $\widetilde{\mathrm{H}}^2(G_p, A^\bullet)$ は $\mathrm{Res}_{G/G_p}(a)$ で生成され、その位数は $|G_p|$ と等しい。

そうすると、すべての $q \in \mathbb{Z}$ と任意の G の部分群 H に対して、

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q(H, A^\bullet) \simeq \widehat{H}^{q-2}(H, \mathbb{Z}).$$

が成り立つ。

これを証明するために、いくつかの補題を証明しなければならない。

補題２．２． G を有限群、$A^\bullet$ を G- 加群の複体で第０項と第 (-1) 項を除いては全て０であるようなものとする。さらに、各 p-Sylow 部分群 G_p に対して、$\widetilde{\mathrm{H}}^n(G_p, A^\bullet) = 0$ かつ $\widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(G_p, A^\bullet) = 0$ なる条件が満たされているなら、全ての整数 q と全ての G の部分群 H に対して

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q(H, A^\bullet) = 0$$

が成り立つ。

証明． 系 1.5 と補題の仮定から、

$$\widehat{H}^{n-1}(G_p, \mathcal{H}^0(A^\bullet)) \longrightarrow \widehat{H}^{n+1}(G_p, \mathcal{H}^{-1}(A^\bullet))$$

は全射であり、

$$\widehat{H}^n(G_p, \mathcal{H}^0(A^\bullet)) \longrightarrow \widehat{H}^{n+2}(G_p, \mathcal{H}^{-1}(A^\bullet))$$

は全単射、

$$\widehat{H}^{n+1}(G_p\ ,\mathcal{H}^0(A^\bullet)) \longrightarrow \widehat{H}^{n+3}(G_p\ ,\mathcal{H}^{-1}(A^\bullet))$$

は単射である。[9, Chap. IX, §7, Théorèm 12] より各 $m \in \mathbb{Z}$ と全ての G の部分群 H に対して、

$$\widehat{H}^{m-2}(H\ ,\mathcal{H}^0(A^\bullet)) \longrightarrow \widehat{H}^{m}(H\ ,\mathcal{H}^{-1}(A^\bullet)).$$

は同型写像である。再び、系 1.5 を用いれば全ての $q \in \mathbb{Z}$ と G の全ての部分群 H に対して、

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q(H\ ,A^\bullet) = 0.$$

が成り立つ。

証明終

補題２．３． 複体 $A^\bullet$ を

$$A^\bullet = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots),$$

なるようなものとし、複体 $B^\bullet$ を

$$B^\bullet = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B^{-1} \xrightarrow{d_B} B^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots),$$

をなるようなものとする。さらに、$f^\bullet$ を複体 $A^\bullet$ から複体 $B^\bullet$ への複体の射とする。このとき、ある整数 n が存在して、

$$f^n\colon \widetilde{\mathrm{H}}^n(G\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^n(G\ ,B^\bullet)$$

は全射。

$$f^{n+1}\colon \widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(G\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(G\ ,B^\bullet)$$

は全単射。

$$f^{n+2}\colon \widetilde{\mathrm{H}}^{n+2}(G\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^{n+2}(G\ ,B^\bullet)$$

は単射であると仮定すれば、任意の整数 q に対して、

$$f^q\colon \widetilde{\mathrm{H}}^q(G\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^q(G\ ,B^\bullet)$$

は同型写像である。

証明． 補題の仮定と定理 1.3 より

$$\widetilde{\mathrm{H}}^n(G\ ,C(f^\bullet)) = 0,$$

かつ、

$$\widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(G\ ,C(f^\bullet)) = 0,$$

である。ここで、$C(f^\bullet)$ は $f^\bullet$ の mapping cone である。すると補題2.2 と定理1.3 とから

$$f^q : \widetilde{\mathrm{H}}^q(G\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^q(G\ ,B^\bullet)$$

が同型写像であることが分かる。

証明終

定理２．１の証明

カップ積のペアリングから、次のような双線形写像を得る。

$$\widetilde{\mathrm{H}}^p(H\ ,\mathbb{Z}) \times \widetilde{\mathrm{H}}^2(H\ ,A^\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^{p+2}(H\ ,A^\bullet).$$

ここで、次のような性質を持つ複体 $I^\bullet$ が構成できる。:

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q(H\ ,I^\bullet) \simeq \widetilde{\mathrm{H}}^{q+2}(H\ ,A^\bullet),$$

この様な複体の存在と、上の同型写像がカップ積と可換である事に注意すれば、

$$\widehat{H}^q(H\ ,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{\mathrm{H}}^q(H\ ,I^\bullet).$$

を証明すれば十分である。しかし α_p なる $\widetilde{\mathrm{H}}^0(G_p\ ,I^\bullet)$ の元は $\mathrm{Res}_{G/G_p}(a)$ に対応しており、それは

$$\otimes\alpha_p : \mathbb{Z} \longrightarrow I^\bullet,$$

を誘導するので、補題2.3 と定理の仮定から、望む結果を得ることができる。

証明終

3. Class Formationからの若干の帰結

この節では、class formation の公理系と今まで調べたことから、何が分かるかを述べる。

$\Gamma(G,*)$
を G- 加群のカテゴリーからアーベル群のカテゴリーへの関手で $\Gamma(G,M) = M^G$ と定義されるものとする。また $\mathsf{R}\Gamma(G,*)$ はその関手の導来関手とする。

命題3．1． G を *profinite group*、$A^\bullet$ を 2 項のみから成る G- 加群の複体で、第 0 項と第 (-1) 項を除いてはすべて 0 であるようなものとする。*foramtion* $(G,A^\bullet)$ が *class formation* の公理を満たすならば、G の任意の正規開部分群 H に対して、複体 $\tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))$ と有限群 G/H のペアは定理 *2.1* の仮定を満たす。

証明． まず、次のような G/H- 加群の triangle が存在することに注意する。

$$\tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet)) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^2(H\ ,A^\bullet)[-2] \longrightarrow \tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))[1].$$

この triangle より、

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^q(G/H\ ,\tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))) &\longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^q(G/H\ ,\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))\\ \longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^q(G/H\ ,\mathsf{H}^2(H\ ,A^\bullet)[-2]) &\longrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

なる長完全系列を得る。公理 1 と公理 2 とから、

$$\widehat{\mathsf{H}}^1(G/H\ ,\tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))) \simeq \widehat{\mathsf{H}}^1(G/H\ ,\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet)) = 0,$$

であり、完全系列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^2(G/H\ ,\tau_{\leq 0}(\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))) &\longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^2(G/H\ ,\mathsf{R}\Gamma(H,A^\bullet))\\ &\longrightarrow \widehat{\mathsf{H}}^2(G/H\ ,\mathsf{H}^2(H\ ,A^\bullet)[-2]).\end{aligned}$$

を得る。これらの事実と、公理 3 と公理 4 とから、命題が得られる。

証明終

つぎの定理も、上の命題から得ることができる。

定理3．2． G、H、$A^\bullet$ などは命題 *3.1* の通りとする。すると次のような、同型写像を得る。

$$(G/H)^{ab} \simeq \mathrm{Coker}\left(\mathsf{H}^0(H\ ,A^\bullet) \overset{N_{G/H}}{\longrightarrow} \mathsf{H}^0(G\ ,A^\bullet)\right).$$

古典的な理論との関係

(1) F_q を有限体とする。$G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathsf{F}}_q/\mathsf{F}_q)$、$A^\bullet = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathsf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$ 等のようにおけば、ペア $(G,A^\bullet)$ は class formation の公理系を満たす。この事から、0- 次元局所体の類体論の同型定理を得ることができる。

(2) F を通常の意味での局所体、G は F の絶対ガロア群とする。$A^\bullet$ を $\mathbb{G}_m$ とすれば、$(G, A^\bullet)$ も我々の class formation の公理系を満たす。やはり、これも今までの我々の方法を使うことで、局所類体論を得ることができる。

(3) K を代数体とする。また、G はそれの絶対ガロア群であるとする。複体 $A^\bullet$ を第0項にイデール類群が来るような複体で、残りの項が全て0になっているようなものであるとすれば、$(G, A^\bullet)$ は我々の意味での class formation のの公理系を満たす。

以上述べた通り、我々の class formation は従来のそれを完全に包含していることが分かる。次の節で、2次元の局所体類体論の同型定理を我々の意味での class formation による定式化のもとに証明してみる。

4．2次元局所類体論の同型定理の証明

この節では、加藤 [3] の証明を class formation を用いて証明してみる。即ち、次の定理を証明する。

定理4．1． K を2次元局所体、L を K の有限次ガロア拡大体とする。すると、次の同型写像が存在する。

$$K_2(K)/N_{L/K}K_2(L) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)^{ab}.$$

そのために、次の定理を証明する。

定理4．2． K は上述のとおりとする。複体 $\mathbb{Z}(2)[2]$ と *profinite group* $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ のなす *formation* は *class formation* の公理系を満たす。

まず、Lichtenbaum の複体 $\mathbb{Z}(2)$ を証明に用いるので、簡単にその説明をする。[5] において Lichtenbaum は複体 $\mathbb{Z}(n)$ の存在を予想し、さらに下に掲げるようないくつかの期待される性質を指摘した。ここで、X は正則 noether スキームとする。

(0) $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$ であり $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{G}_m[-1]$ である。
(1) $\mathbb{Z}(n)$ は $[1, n]$ の外では非輪状である。
(2) $\alpha\colon X_{\acute{e}t} \longrightarrow X_{Zar}$ を site の間の自然な射とすると、

$$\mathbf{R}^{n+1}\alpha_*\mathbb{Z}(n) = 0$$

が成り立つ。
(3-1) 任意の正の整数 m で X 上で inversible となるようなものをとると、次の triangle が存在する。

$$\mathbb{Z}(n) \xrightarrow{m} \mathbb{Z}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}(n)[1],$$

ここで、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n) = \mu_m^{\otimes n}$ であり $\mu_m^{\otimes}$ は、1の m 乗根の層である。
(3-2) X が標数 $p > 0$ のスキームならば、triangle

$$\mathbb{Z}(n) \xrightarrow{p^m} \mathbb{Z}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}(n)[1]$$

が、任意の m に対して存在する。ここで、$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(n) \quad = \quad \nu_m(n)[-n]$ であり、$\nu_m(n)[-n]$ は全ての対数的微分で生成される de Rham-Witt 複体 $W_m\Omega_X^n$ の additive subsheaf である。(cf. [8]).

(4)$m, n \geq 0$ なる整数に対して、product map

$$\mathbb{Z}(n) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbb{Z}(m) \longrightarrow \mathbb{Z}(n+m)$$

が存在する。

(5) α は (2) に現われるものと同じものとする。すると、

$$\mathbb{R}^n\alpha_*\mathbb{Z}(n) = \mathcal{K}_n^M$$

であり、ここで $\mathcal{K}_n^M$ は Milnor K- 群の X_{Zar} 上での層である。

[6] と [7] において、Lichtenbaum は $\mathbb{Z}(2)$ が少なくとも体のスペクトラムに対しては存在して、上に記した諸性質を満たすことを示した。詳しいことについては、[5][6] や [7] を参照のこと。

さて、定理 4.2 の証明に戻る。[6] と [7] のなかで、Lichtenbaum は公理 2 は全ての体に対して成り立つことを示している。公理 1 と公理 2 については、斎藤氏が [8] のなかで証明している。従って、公理 3 が成り立つかどうかだけを証明すれば良いが、そのために、次の命題 4.3 と命題 4.4 を証明する。

命題４．３． K を 2 次元局所体とし、L をそれの有限次ガロア拡大体とする。また、ℓ は K の標数とは異なる素数とすれば、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2))(\ell) & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbb{H}^4(L, \mathbb{Z}(2))(\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{[L:K]} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

ここで、図式の縦の写像は inv により誘導されたものである。

証明． n を任意の自然数とする。motivic cohomology の Kummer theory より

$$0 \longrightarrow H^3(K, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \longrightarrow \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

なる長完全系列を得る。これと、[2, §5, Theorem 1, Cor. 2.] にある図式の可換性とから、命題が出る。

証明終

命題４．４． K や L は上の命題のとおりとする。さらに、p は K の標数と等しい素数であるとする。個のとき次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2))(p) & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbb{H}^4(L, \mathbb{Z}(2))(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{[L:K]} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

図式中の縦の写像は inv から誘導されたものである。

証明．n を任意の自然数とする。[7, §1] により次のような、完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow H^1(K, \nu_m(2)) \longrightarrow \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{p^m} \mathbb{H}^4(K, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

従って、次の図式の可換性が示されればよい。

$$\begin{tikzcd} H^1(K, \nu_m(2)) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d] & H^1(L, \nu_m(2)) \arrow[d] \\ \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "{[L:K]}"] & \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

しかし、それは [3, §3, Proposition 1, (2)] のなかで証明されている。

証明終

定理 4.1 の証明の完結

定理 4.2 と命題 3.1 より有限群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ と $\mathrm{Gal}(L/K)$- 加群の複体 $\tau_{\leq 0}(\mathbb{R}\Gamma(H, \mathbb{Z}(2)[2]))$ は定理 2.1 の仮定を満たしていることが分かる。従って、

$$\widetilde{\mathbb{H}}^0(L/K, \tau_{\leq 0}(\mathbb{R}\Gamma(H, \mathbb{Z}(2)[2]))) = \mathrm{Gal}(L/K)^{ab}.$$

を得るが、$\widetilde{\mathbb{H}}^0(L/K, \tau_{\leq 0}(\mathbb{R}\Gamma(H, \mathbb{Z}(2)[2])))$ が $K_2(K)/N_{L/K}K_2(L)$ と同型になってしまう。従って、定理の証明を得る。

証明終

References

[1] Cartan, H.-Eilenberg, S.: *Homological Algebra,* Princeton Univ. Press

[2] Kato, K.: *Generalization of local class field theory by using K-groups I,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 27, (1979), 303-376.

[3] Kato, K.: *Generalization of local class field theory by using K-groups II,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 27, (1980), 603-683.

[4] Koya, Y.: *A generalization of class formation by using hypercohomology* , to appear in Invent. math.

[5] Lichtenbaum, S.: *Values of zeta functions at non-negative integers,* in "Number Theory", Lecture Note in Math. 1068, (1984), 127-138, Springer.

[6] Lichtenbaum, S.: *The construction of weight-two arithmetic cohomology,* Invent. Math., 88, (1987), 183-215.

[7] Lichtenbaum, S.: *New results on weight-two motivic cohomology,* preprint, (1988).

[8] Saito, S.: *Arithmetic duality on two-dimensional henselian rings,* preprint, (1988).

[9] Serre, J.-P.: *Corps Locaux,* Hermann, Paris.