数理解析研究所講究録
第721巻 1990年 44-52

2次元正則局所環のArtin指標

東大理　加藤和也

古典的な，代数体の整数環の分岐理論も，高次元の可換環に拡張したい。そもそも，代数体の整数環に関するいろいろの精妙な理論は，すべて，$\mathbb{Z}$上有限生成な可換環に，何らかの姿で拡張され，さまざまな高次元の$\mathbb{Z}$上有限生成な可換環が登場する数論的代数幾何が，そのようにして深まっていくと期待される。しかしながら，実際に分岐理論を拡張しようとすると，これは試みた人にはよくわかるのであるが，困難がひどく，SerreのCorps Locauxにでてくるような分岐理論の精妙な内容，ψ関数，φ関数，上つき分岐群……等を高次元の環に拡張することは非常に難しいと思われる。一方では，古典的な分岐理論の中の重要な対象であるArtin指標の理論が，そのまま高次元に拡張できるはずだという，Serreの美しい予想（[2]）がある。また，類体論は高次元の環に拡張できるので，古典的な類体論と分岐理論の関係も，高次元に拡張されるべきであるという気がする。

本稿では，このSerreの予想の2次元の場合の解決法と，そ

の，類体論の2次元版との関係を述べる．

Serreの予想は次のとおりである．

Aを正則局所環，GをAの自己同型からなる有限群とし

$$A^G = \{a \in A \ ; \ \sigma(a) = a \quad \forall \sigma \in G\}$$

とおき，次の(i)−(iii)を仮定する．

(i) A^G はネーター環である．（これは大変弱い条件で，ふつうみたされている．）

(ii) m_A をAの極大idealとすると

$$A^G/(m_A \cap A^G) \xrightarrow{\cong} A/m_A .$$

(iii) $\sigma \in G \setminus \{1\}$ に対し

$$I_\sigma = \text{Aのイデアル}\ (\sigma(a) - a \ ; \ a \in A)$$

とおくと，任意の $\sigma \in G \setminus \{1\}$ に対して A加群 A/I_σ は長さ有限である．

この時，関数 $a_G : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ を，$\sigma \in G \setminus \{1\}$ の時

$$a_G(\sigma) = -\,\mathrm{length}_A(A/I_\sigma), \qquad a_G(1) = -\sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} a_G(\sigma)$$

と定義する。

Serreの予想：a_G はGのある表現の指標である。

$\dim(A) = 1$ つまりAが離散付値環のとき，((iii)はこのとき(i)(ii)の条件のもと自動的にみたされる)，これは古典的なArtinの定理であり，a_G を指標とするGの表現はArtin表現と呼ばれる。(Serre Corps Locaux §6 .)

定理．Serreの予想は $\dim(A)=2$ の時正しい．

この定理は，大きい部分が，斉藤秀司氏斉藤毅氏によって解決されていた。

以下証明方法をのべますが，時間的余裕が（筆者の怠慢のため）なくなり，少し短縮した書き方になることをおわびします．

詳しいことは筆者の論文

$\mathcal{D}$-modules, class field theory and ramification on higher dimensional schemes II （準備中）

に書きます．

§ 方法．

定理の証明は，古典的な $\dim(A)=1$ の場合の証明に平行した形にできるので，今 $\dim(A)=1$ の場合の証明を思いおこしてみる。

a_G が表現の指標であることをいうには，G の任意の表現 ρ について，ρ の指標 χ_ρ と a_G の内積

$$\frac{1}{\#(G)}\sum_{\sigma\in G}\chi_\rho(\sigma^{-1})\,a_G(\sigma)$$

（この数は $\mathrm{art}_G(\rho)$ と書かれ ρ の Artin conductor と呼ばれる）が，0以上の整数になることを

いえばよい．このうち，0以上の有理数であることが容易に言えるので，結局 $\mathrm{art}_G(\rho)$ が整数であることをいえばよい．

次に Brauer の理論により，ρ は，G の部分群の1次の表現からの誘導表現の，整数係数の形式的1次結合の形に書けるので，結局 ρ は G のある部分群 H の1次の表現 ρ' からの誘導表現であるとしてよい．

（ここまでの事情は，$\dim(A)$ が何であっても同じである．）

$\dim(A)=1$ の場合，A^H, A^G も離散付値環であり，

$$\mathrm{art}_G(\rho) = \mathrm{art}_H(\rho') + d(A^H/A^G)$$

ここに $d(A^H/A^G)$ は，A^H の A^G 上の different ideal を A^H の極大 ideal の r 乗としたときの r，

という公式が存在する。よって，$\mathrm{art}_G(\rho)\in\mathbb{Z}$ を示すには $\mathrm{art}_H(\rho')\in\mathbb{Z}$ を示せば十分であり，こうして ρ が1次の表現である場合に帰着された。

ρ が1次の表現の時は，$\mathrm{art}_G(\rho)\in\mathbb{Z}$ は類体論的方法で示される。つまり $\mathrm{art}_G(\rho)$ の類体論的な意味を知ることによりそれが整数であることがわかるのである。

実際もし A/m_A が有限体であれば，A^G の完備化を B とおくと，B の局所類体論により全射準同型

$$B^\times \twoheadrightarrow G^{ab} = G/[G,G]$$

が存在し,

$$\mathrm{art}_G(\rho) = \max\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n \geqq 0,$$
$$B^\times \to G^{ab} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times \text{ が } \mathrm{Ker}(B^\times \to (B/m_B^n)^\times) \text{ を}$$
$$\text{零化する}\}$$

となることが局所類体論でわかっており, $\mathrm{art}_G(\rho) \in \mathbb{Z}$ となる。A/m_A が有限体でない場合にも「類体論的方法」(例えば Serre の剰余体が閉体である場合の局所類体論 [3] に帰着される)で $\mathrm{art}_G(\rho) \in \mathbb{Z}$ が示せるのである。

さて, この方法を $\dim(A)$ が任意の場合に拡張しようとすると, まず式(*)を拡張しなければならない。ここには, different $d(A^H/A^G)$ という整数を, 高次元の場合に定義する必要がまずあるのである。A^H や A^G がもはや正則局所環と限らないという点も, $\dim(A)=1$ の場合とちがっていて, いやな感じがする。

しかしながら, これらの問題はすでに Bloch [1] によって少なくとも $\dim(A)=2$ の場合には解決されているのである。[1] は,「分岐理論を高次元化する」という形の書かれ方になっていないので, にわかには 式(*)が [1] に $\dim = 2$ の場合に示されている("different" $d(\ /\ )$ の定義とともに)ことは見にくいのであるが, よく見ると [1] の §6 の "projection formula" が (*) を含むものになっている。Bloch の理論の

紹介は大変なので，本稿ではそれをおこなわない．

ともかくこうして，dim＝2の時，dim＝1の場合と同じ理由により，ρが1次の表現の場合に問題が帰着できる。そして，ρが1次の表現の時は，再び（2次元）類体論的方法により，dim＝2の場合も証明ができるのである。ここは少し詳しく述べることにしたい。

このように証明が古典的な場合と平行しており，古くからの代数的整数論の方法や結果の蓄積が，そのまま高次元において再生産されて，高次元の環の整数論を豊かにすることができる，と信じてすすむのがよいように思われるのである。

§. ρが1次の表現の場合

$\dim(A)=2$，ρは1次の表現とし，さらにA/m_Aが有限体であるとする。（A/m_Aが有限体でない場合にも，$\dim(A)=1$の時のように「類体論的」方法がやはり使えるのであるが，2次元類体論がそのまま役立つ，A/m_Aが有限体の場合に，話を限ることにする。）この時$\mathrm{art}_G(\rho)$はある因子の交点数と一致し，それゆえ整数であるといえるのである。（この因子が2次元類体論に関係する。

可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathrm{Spec}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & \mathrm{Spec}(A^G) \end{array}$$

で，X，Y：正則，f，g：proper birational，f^{-1}(閉点)，g^{-1}(閉点) がそれぞれ，被約化すると simple normal crossing divisor になるものをとる。すると，記号は下で説明することにして，Y上の因子の交点数

$$(\underline{sw}(\rho),\ \ \underline{sw}(\rho)+K_Y+E)$$

は，XやYを blow up するごとに増加するかまたは変わらず，どんどん blow up していくとそのうち一定となって，$\rho=1$ なら0に，$\rho\neq 1$ なら $\mathrm{art}_G(\rho)-1$ に一致することになることが示せるのである。したがって $\mathrm{art}_G(\rho)\in\mathbb{Z}$ である。

ここで　$E=g^{-1}$(閉点)の被約化，K_Y はYの標準因子，

$$\underline{sw}(\rho)=\sum_{\mathfrak{p}\,:\,E\text{の生成点}} sw_{\mathfrak{p}}(\rho)\cdot\mathfrak{p},$$

ここに $sw_{\mathfrak{p}}(\rho)$ は次の，2次元類体論に関係した整数である。

xを，$\mathfrak{p}$ の閉包 $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ の閉点とする。完備化 $\hat{\mathcal{O}}_{Y,x}$ の，$\mathfrak{p}$ の上にある唯一の素 ideal での局所環を完備化して，これをBとおき（Bは完備離散付値環でBの剰余体は標数pの局所体，正確には $\hat{\mathcal{O}}_{\overline{\{\mathfrak{p}\}},x}$ の分数体，となる），Bの分数体を $K_{x,\mathfrak{p}}$ とおくと，$K_{x,\mathfrak{p}}$ はいわゆる2次元局所体である.（有限体を剰余体

とする完備離散付値体を剰余体とする完備離散付値体を，2次元局所体という.）2次元局所体では2次元局所類体論が成立して　標準準同型

$$K_2(K_{x,\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{x,\mathfrak{p}}^{ab}/K_{x,\mathfrak{p}})$$

（$K_{x,\mathfrak{p}}^{ab}$ は $K_{x,\mathfrak{p}}$ の最大アーベル拡大）が存在し，これは全射準同型

$$K_2(K_{x,\mathfrak{p}}) \longrightarrow G^{ab}$$

を導く．$K_2(K_{x,\mathfrak{p}})$ の部分群 $U^n K_2(K_{x,\mathfrak{p}})$ $(n \geq 1)$ を，symbol

$$\{ \mathrm{Ker}(B^\times \longrightarrow (B/m_B^n)^\times),\ K_{x,\mathfrak{p}}^\times \}$$

の生成する部分と定義する。この時

$$sw_{\mathfrak{p}}(\rho) \underset{\mathrm{def}}{=} \max\{ n \in \mathbb{Z} ;\ n \geq 0,\ K_2(K_{x,\mathfrak{p}}) \to G^{ab} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times \text{ が } U^{n+1}K_2(K_{x,\mathfrak{p}}) \text{ を零化する} \}$$

で，これは x のとり方によらない。

以上が2次元の場合の証明法であるが，反省点として ρ が1次の表現，A/m_A が有限体の時，$\mathrm{art}_G(\rho)$ の類体論的表示が，"十分 blow up してのち" に得られるものであり，blow up しなくても類体論的記述がえられるのではないかという問題が残る。

$\dim(A) \geq 3$ の場合も，同様の証明の plan だけは作れるのであるが，いろいろ困難があって Serre の予想の3次元以上の場合は，今は示せない.

なお，夢としては，Artin指標ばかりでなく，分岐にまつわ

る local constant の理論も，高次元の環に拡張されるべきであるけれども，大変難しそうである。

文献

[1] Bloch, S, Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, Proc. Symp. Pure Math. AMS 46 Part II 1987 421-450.

[2] Serre, J.-P., Sur la rationalité des représentations d'Artin, Ann. of Math. 72, 1960, 406-420.

[3] Serre, J.-P., Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, Bull. Soc. Math. France 89, 1961, 105-154.