数理解析研究所講究録
第721巻 1990年 62-79

Dedekind和と平方剰余記号

東大・数養　伊藤　博　(Hiroshi Ito)

第1節でDedekind和一般についてEisenstein cohomologyの立場から復習した後，第2節以降で表題の関係について述べる．

§1. Dedekind和.

Dedekind和とEisenstein級数の間のよく知られた関係を復習することから始める．自然数Nをひとつとり，Nを法とする主合同部分群 $\Gamma = \Gamma(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ を考える．$\mathbb{H}$で上半平面を表わし，$\mathbb{H}$上のΓに関する重さ2の正則保型形式の全体を$G_2(\Gamma)$とする．$G_2(\Gamma)$の元$f(z)$について，$\mathbb{H}$上の正則微分形式$f(z)dz$はΓ-不変になるから，$A \in \Gamma$に対して$\mathbb{C}$の元

$$\int_{z_0}^{Az_0} f(z)\,dz \quad (z_0 \in \mathbb{H},\ \text{積分は}\ z_0\ \text{に依らない})$$

を対応させる写像は$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) = H^1(\Gamma; \mathbb{C})$の元を与える．このようにして同型

(1) $$G_2(\Gamma) \cong H^1(\Gamma; \mathbb{C})$$

が得られる．ところでよく知られているように $G_2(\Gamma)$ は cusp 形式の空間 $S_2(\Gamma)$ と Eisenstein 級数の空間 $\mathcal{E}_2(\Gamma)$ の直和に分解される：

$$G_2(\Gamma)=S_2(\Gamma)\oplus\mathcal{E}_2(\Gamma).$$

したがってこれに対応する分解

$$(2)\qquad H^1(\Gamma;\mathbb{C})=H^1_{cusp}(\Gamma;\mathbb{C})\oplus H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$$

が考えられる．この $H^1(\Gamma;\mathbb{C})$ の分解は，次の条件で特徴付けられている：

$$H^1_{cusp}(\Gamma;\mathbb{C})=\{\psi\in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C});\ \psi(A)=0 \text{ if } \mathrm{tr}\,A=\pm 2\},$$

$H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$ は Hecke 作用素の作用で閉じている．

ここで，上の Hecke 作用素の作用とは，通常の $G_2(\Gamma)$ に作用する Hecke 作用素を同型 (1) を通じて $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ に作用させたものである．

さて，Dedekind 和が関係するのは，$H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ の Eisenstein part $H^1_{eis}(\Gamma,\mathbb{C})$ である．いま $\underline{u}=(u_1,u_2)\in(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^2-\{\underline{o}\}$ $(\underline{o}=(0,0))$ に対して，$\wp_{\underline{u}}(z)$ で $\mathbb{C}$ の格子 $\mathbb{Z}z+\mathbb{Z}$ に関する Weierstraß の $\wp$-関数の u_1z+u_2 での値を表わすと，$\mathcal{E}_2(\Gamma)$ は $\mathbb{C}$ 上これらの $\wp_{\underline{u}}(z)$ で張られ，したがって，

$$\gamma_{\underline{u}}(A)=\frac{1}{\pi^2}\int_{z_0}^{Az_0}\wp_{\underline{u}}(z)dz\quad(z_0\in\mathbb{H}),\ A\in\Gamma$$

とすれば，$H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$ は $\gamma_{\underline{u}}$ たちで張られる．$x\in\mathbb{C}$ と $m=0,1,2,\cdots$ について

$$C_m(x) = \pi^{-m} \sum_{w \in \mathbb{Z}}{}' (w+x)^{-m} |w+x|^{-s} \Big|_{s=0}$$

とおく（$\sum$ の右上のダッシュは $w+x=0$ なる w は除くことを意味する）．そして $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して

$$\varphi_{\underline{u}}(A) = \begin{cases} -\dfrac{a+d}{c} C_0(u_1) C_2(u_2) - \dfrac{1}{c} \displaystyle\sum_{r \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}} C_1\left(\dfrac{a(r+u_1)}{c} + u_2\right) C_1\left(\dfrac{r+u_1}{c}\right), & c \neq 0 \\ -\dfrac{b}{d} C_0(u_1) C_2(u_2), & c = 0 \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$\gamma_{\underline{u}}(A) = \varphi_{\underline{u}}(A) - \varphi_{\underline{0}}(A), \quad A \in \Gamma$$

となる（例えば，Meyer - Sczech [MS] 参照）．$x \notin \mathbb{Z}$ なら

$$C_0(x) = 0, \quad C_1(x) = \cot(\pi x), \quad C_2(x) = (\sin(\pi x))^{-2},$$

$x \in \mathbb{Z}$ なら

$$C_0(x) = -1, \quad C_1(x) = 0, \quad C_2(x) = \frac{1}{3}$$

である．$\varphi_{\underline{0}}(A)$ に表われる和

$$s(a,c) = \frac{1}{c} \sum_{r=1}^{|c|-1} \cot\left(\pi \frac{ar}{c}\right) \cot\left(\pi \frac{r}{c}\right)$$

が，もっとも基本的な Dedekind 和である．$3c\,s(a,c) \in \mathbb{Z}$ で，$a, c > 0$，$(2,c) = 1$ なら

$$3c\,s(a,c) \equiv c + 1 - 2\left(\frac{a}{c}\right) \pmod 8$$

となることが知られている．§2 の結果は，この合同式の類似であると思ってもよい．

Cohomology 群の分解 (2) は，もっと一般な状況における

Harderの結果の特別な場合と見ることができる. Gを有限次代数体k上定義された半単純代数群でk-rankが1であるものとし, $G(k_\infty)$ ($k_\infty = k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$) の極大compact部分群$K$をひとつとって $X = G(k_\infty)/K$ とおく. Γを$G(k)$の数論的部分群とし, 簡単のためΓは位数有限の元をもたないとする. このとき, 一般論により,

(3) $$H^i(\Gamma; \mathbb{C}) \cong H^i(\Gamma\backslash X; \mathbb{C}) \quad (\forall i \geq 0).$$

いま$\overline{\Gamma\backslash X}$で$\Gamma\backslash X$のBorel-Serreのcompact化と呼ばれるものを表わす. 包含写像 $\Gamma\backslash X \hookrightarrow \overline{\Gamma\backslash X}$ はhomotopy同値であり, したがって $H^i(\Gamma\backslash X; \mathbb{C}) = H^i(\overline{\Gamma\backslash X}; \mathbb{C})$ と同一視することができる. $\overline{\Gamma\backslash X}$の境界を$\partial(\overline{\Gamma\backslash X})$として, 制限写像

$$r: H^i(\Gamma\backslash X; \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(\partial(\overline{\Gamma\backslash X}); \mathbb{C})$$

の核を $H^i_!(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$ とかく. Harderは,

$$H^i(\Gamma\backslash X; \mathbb{C}) = H^i_!(\Gamma\backslash X; \mathbb{C}) \oplus H^i_{inf}(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$$

となる部分空間 $H^i_{inf}(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$ がEisenstein級数の理論を使って標準的に定義できることを示した. その際, この部分空間の任意の元(微分形式の類)は, $\Gamma\backslash X$に自然に入るRiemann多様体としての構造に関して調和的な微分形式で代表されることがわかる. ところで$H^i_!(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$は, $\Gamma\backslash X$のcompactな台をもつcohomology群の$H^i(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$での像に一致し, したがってHodge理論により$H^i_!(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$の元も調和微分形

式で代表される．よって，結局 $H^i(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ の任意の元は $\Gamma\backslash X$ 上の調和微分形式により代表されることになる．これを示すことが Harder の研究のひとつの動機であった．上で「$\Gamma\backslash X$ 上の微分形式」と言っていたところを「X 上の微分形式で Γ-不変なもの」と言い換えれば，Γ が位数有限の元をもつときでも同様の結果が成り立つ：$H^i(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ には別に，ある仕方で定義される空間 $H^i_{cusp}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$，$H^i_{eis}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ があるが，(2) の状況およびすぐ次に述べる状況では，

$$H^i_{cusp}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C}) = H^i_{!}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C}),$$
$$H^i_{eis}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C}) = H^i_{inf}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$$

となっている．同型 (3) により，上で考えた $H^1(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ の部分空間に対応する空間を $H^1(\Gamma;\mathbb{C})$ の中で考えることができる．これらの空間に対しても，同様な記法を用いる．この記法は (2) で用いた記法と整合性をもつ．以上については，Harder [H] とその文献にある彼の論文，および Borel [B] 参照．

$G = SL_2$，k を虚2次体，$\mathcal{O}$ を k の整数環とし，Γ を $G(\mathcal{O})$ の合同部分群（つまり，ある ideal $\mathfrak{a}$ $(\subset \mathcal{O})$ に関する主合同部分群を含む $G(\mathcal{O})$ の部分群）とする．上に述べた一般論から

$$(3') \qquad H^1(\Gamma;\mathbb{C}) = H^1_{cusp}(\Gamma;\mathbb{C}) \oplus H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$$

と分解されている.[注1)] Cusp part は難しく, 次元についても一般的な公式はない ($SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ について, $\dim H^1_{cusp}(\Gamma;\mathbb{C}) = \dim S_2(\Gamma)$ がよくわかるのと対照的である). しかし, Eisenstein part は, Dedekind 和の類似物を用いることによりかなり具体的に記述することができる. これは, $X = SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$ 上の Γ-不変な調和微分形式の系列でそれらの代表する $H^1_{eis}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ の類が $H^1_{eis}(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ を張るようなものが具体的にかけて, さらにそれらの周期 (Γ の各元に関する) が計算できるからである (Weselmann [Wes], [I]). 例えば, $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ で $\Gamma = SL_2(\mathcal{O})$ なら, $H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$ は h_k-次元 (h_k は k の類数) で次のような $\Phi_L \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C})$ たちで張られる.

L を $\mathbb{C}$ 内の格子で $\mathcal{O}$ による虚数乗法をもつものとし, $x \in \mathbb{C}$ と $m=1,2$ について

$$E_m(x) = \sum_{w\in L}{}' (w+x)^{-m} |w+x|^{-s} \Big|_{s=0}$$

とする. また

$$I(x) = x - \bar{x}$$

とする. このとき, $\Phi_L : \Gamma = SL_2(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\Phi_L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} E_2(0)\, I\left(\frac{a+d}{c}\right) - \frac{1}{c}\sum_{r\in L/cL} E_1\left(\frac{ar}{c}\right) E_1\left(\frac{r}{c}\right), & c \neq 0 \\ E_2(0)\, I\left(\frac{b}{d}\right), & c = 0 \end{cases}$$

で定義する．これは，X上のあるΓ-不変な微分形式の周期を計算することにより得られるもので，このことから$\Phi_L \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})$ がわかる（Sczech [S]は，関数$E_m(x)$の性質（加法公式など）のみを使って，$\Phi_L \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})$ を直接に証明している．Φ_L は彼が最初に定義したものである）．$x \notin L$ならば，

$$E_2(x) - E_2(0) = \wp(x),$$
$$E_1(x) = \zeta(x) - xE_2(0) - \bar{x}\cdot(\text{定数})$$

（$\wp(x)$, $\zeta(x)$ は L に関するWeierstraßの関数）

で，（定数）は，右辺がLについて周期的になるものとして一意的に定まるものである．これからもわかるように，Φ_L の値のalgebraicity, integralityなどは，楕円関数に関する虚数乗法論を使って調べることができる．例えば $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ とするとき，$g_2, g_3 \in H =$（kの絶対類体）ならば，$\Phi_L(A)$もHに入る（$A \in \Gamma$）．

$H^1(\Gamma; \mathbb{C})$ については，整数論的に色々と面白いことがある（$H^1(\Gamma; \mathbb{C}) \cong H^1(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$を考えることは，$X$上の$\Gamma$に関するある型のベクトル値の保型形式を考えるのと同じこと（Weil [W] 参照）だから，これは当然と言ってよいだろうが）．$H^1_{cusp}(\Gamma; \mathbb{C})$ については，Elstrodt - Grunewald - Mennicke [EGM] や Cremona [C] に，k上の楕円曲線との関係についての実験

結果と予想が述べられている．$H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$とある種のL-関数の特殊値の関係については，[Wes]，[I] 参照．この関係はすでに Harder [H] によりもっと一般化されている．次節で述べることは，$H^1_{eis}(\Gamma;\mathbb{C})$の別の整数論的側面である．

§2．平方剰余記号．

kで判別式Dの虚2次体を表わし，5ページ下から5行目以下で導入された記号を用いる．$SL_2(\mathcal{O})$ の主合同部分群 $\Gamma(8)$ から $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への写像χを

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)\right), & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases}$$

で定める．但し $\left(\frac{c}{a}\right)$ はkの平方剰余記号である．Kubota [K] により指摘されたように，χは群準同型を与え，この事実は$\left(\frac{c}{a}\right)$の相互法則と本質的に同値である．次の定理は Sczech [S] により予想されたものである．

<u>定理1.</u> $H^1_{eis}(\Gamma(8);\mathbb{C})$ の元 Φ で $\mathbb{Z}$ に値をとり

$$\Phi(A) \bmod 2 = \chi(A), \qquad A \in \Gamma(8)$$

となるものが存在する．

証明は，次に述べる定理の証明と基本的に同じであるので

省略する．以下

$$D \equiv 1 \pmod 8$$

とする．このとき，次をみたす準同型 $\tilde{\chi}: SL_2(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ が一意的に存在して，$\tilde{\chi} | \Gamma(8) = 4\chi$ である：

- $\tilde{\chi}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = 0$，
- $c \equiv 1 \pmod 2$ なら，

$$\tilde{\chi}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2\left(1 - \left(\frac{2a}{c}\right)\right) + tr\left(\frac{(a+d)c}{\sqrt{D}}\right) + 2\varepsilon.$$

但し，

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & c \equiv \pm 1 \pmod 4, \\ \pm 1, & c \equiv \pm\sqrt{D} \pmod 4. \end{cases}$$

この $\tilde{\chi}$ は $X = SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$ 上のある theta 関数の $SL_2(\mathcal{O})$ に関する multiplier として現れる（第3節参照）．次は Sczech [S2] により予想された．

<u>定理2.</u> $D \equiv 1 \pmod 8$ とし，$\mathcal{O}L = L$ なる格子 L に関する Weierstraß の関数 $\wp(x)$ と $\mathbb{C}/L$ の原始4-分点 ψ について

$$(4) \qquad (\wp(\psi) - \wp(2\psi))^2 = 144\,|D|$$

が成り立つとする．このとき，$F = \mathbb{Q}(j(L))$ とすると，

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\Phi_L(SL_2(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}_F,$$

$$E_2(0) \in \mathcal{O}_F, \quad (E_2(0), 2) = 1$$

で，任意の $A\in SL_2(\mathcal{O})$ について，

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\Phi_L(A)\equiv E_2(0)\,\tilde{\chi}(A)\pmod{8\mathcal{O}_F}$$

が成り立つ．

上の条件 (4) の左辺は ψ のとり方に依存せず L のみで定まる量である．証明についての細かい点は [I 2] を参照．以下概略のみを記す．証明は容易に次に帰着される：

(5) $$E_2(0)^{-1}\sum_{r\in L/cL}E_1\left(\frac{ar}{c}\right)E_1\left(\frac{r}{c}\right)\equiv |c|^2+1-2\left(\frac{a}{c}\right)\pmod{8}.$$

但し，

$$a,c\in\mathcal{O},\quad (2a,c)=1$$

とし，また "mod 8" は，$\{(\text{左辺})-(\text{右辺})\}/8$ が 2-integral であるという少し広義の合同を表わすこととする（以下 2 の巾を法とする合同は同様に解する）．(5) は $\mathcal{O}L=L$ なる任意の L について成り立つ（このような任意の L について，適当に $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ をとってLを λL で置きかえれば (4) が満たされるようにでき，またこの置きかえで (5) の左辺は不変である）．(5) の証明には 2 つポイントがあり，その第 1 はいわゆる Gauss の補題を次の形に変形することである．

補題 1. Kを有限次代数体，$c\in\mathcal{O}_K$，$(2,c)=1$ とし，$\mathcal{O}_K/c\,\mathcal{O}_K$ から K の代数的閉包 $\overline{K}$ への写像 f が次をみたす

とする：任意の $x\in\mathcal{O}_K/c\mathcal{O}_K$ について，

$$f(-x)=-f(x)\ ,$$

$$(6)\qquad f(x)\equiv 1 \pmod 2 \quad \text{if} \quad x\neq 0 .$$

このとき，任意の $a\in\mathcal{O}_K$，$(a,c)=1$ について，

$$\sum_{r\in\mathcal{O}_K/c\mathcal{O}_K} f(ar)f(r)\equiv |N_{K/\mathbb{Q}}(c)|+1-2\left(\frac{a}{c}\right) \pmod 8 .$$

但し，$\left(\frac{a}{c}\right)$ は K の平方剰余記号を表わす．

上を $K=k$，$f(x)=E_2(0)^{-1/2}E_1(x\alpha)$（$\mathbb{C}/L$ の原始 c-分点 α をひとつとる）として使えば (5) を得る．この $f(x)$ が (6) をみたすことは次による（これが (5) の証明の第2番目のポイントである）．

<u>補題2</u>．$\mathbb{C}/L$ の奇数分点 $\alpha\neq 0$ について，

$$E_2(0)^{-1/2}E_1(\alpha)\equiv 1 \pmod 2 .$$

この補題の証明は技巧的である．ひとつのポイントは，

$$\wp(2\varphi)^{-1}\wp(\alpha)\equiv 1 \pmod 4$$

を示すことである（φ は定理2と同じ）．これは，Fueter [F] に書いてあることも用いれば示せる．

補題1は，Kが1の原始 p（素数）乗根を含むとき，K の p 乗剰余記号に関するものに一般化することができ，それを

用いて，定理1の類似を準同型

$$\chi : \Gamma(3) \longrightarrow \{1, \zeta, \zeta^2\},$$

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\frac{c}{a}\right)_3, & c \neq 0 \\ 1, & c = 0 \end{cases}$$

について考えることができる．但し，$\zeta = e^{2\pi i/3}$，$\Gamma(3) \subset SL_2(\mathbb{Z}[\zeta])$，また $\left(\frac{c}{a}\right)_3$ は $\mathbb{Q}(\zeta)$ の3乗剰余記号（[I 3]）．

§3．補足（theta 関数）．

前節の準同型 $\tilde{\chi} : SL_2(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ と $X = SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$ 上のある theta 関数の関係について説明し，Sczech [S3] にある予想が未解決であることを記しておく．記号は前節のものを続けて用い，$D \equiv 1 \pmod 8$ とする．岩沢分解により，$SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$ の各類は，

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{v} & \\ & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{C},\ v > 0)$$

の形の元で一意的に代表される．そこでこの元で代表される類と (z, v) を対応させて，

$$X = \{(z, v) ;\ z \in \mathbb{C},\ v > 0\}$$

と同一視する．X の点を一般に $\tau = (z, v)$ とかき，

$$\vartheta(\tau) = \sqrt{v} \sum_{\mu \in \mathcal{O} + \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi|\mu|^2 v}{|\sqrt{D}|} + \pi i \, \mathrm{tr}\left(\frac{\mu^2 z + \mu}{\sqrt{D}}\right)\right)$$

とおく．[注2)] これについて，

$$\vartheta(A\tau) = e^{\frac{\pi i}{4}\tilde{\chi}(A)} \cdot \vartheta(\tau), \quad A \in SL_2(\mathcal{O})$$

で，さらに $\vartheta(\tau)$ は X 上で値0をとらない（[S3]）．X は単連結ゆえ，X上の連続関数 $\log\vartheta(\tau)$ を考えることができて，任意の $A \in SL_2(\mathcal{O})$ について，

$$\varphi(A) := \frac{4}{\pi i}\left[\log\vartheta(A\tau) - \log\vartheta(\tau)\right]$$

は定数で$\mathbb{Z}$の元となる．$\varphi \in H^1(SL_2(\mathcal{O}), \mathbb{Z})$ で，

$$\varphi(A) \bmod 8 = \tilde{\chi}(A), \quad A \in SL_2(\mathcal{O}).$$

したがって，$\mathcal{O}L = L$ なる$\mathbb{C}$の格子Lが定理2の条件をみたせば，

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{D}}\Phi_L(A) \equiv E_2(0)\,\varphi(A) \pmod{8\mathcal{O}_F}, \quad A \in SL_2(\mathcal{O}).$$

となる．さて，いま(3′)に従って，φを $\varphi = \varphi_c + \varphi_e$ と分解する．準同型 φ_c, φ_e の値は，$\mathbb{Q}$に入るが，$\mathbb{Z}$に入るとは限らない．

<u>予想</u>（[S3]）．$\varphi(A) \equiv \varphi_e(A) \pmod{8\mathbb{Z}_2}, \quad A \in SL_2(\mathcal{O}).$

上で$\mathbb{Z}_2$は2進整数環を表わす．定理2を用いると，この予想が成立するためのひとつの十分条件を，あるL-関数の特殊値に関する条件として述べることができる．最後に，このことについて記す．いま，$\eta(z)$を Dedekind の η-関数とし，

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\,|D|^{1/4}} \cdot \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)^4}{\eta(1+\sqrt{D})^2}$$

とすると，$L = \mathcal{O}\omega$ は定理2の条件をみたす（[S2]，[I2] 参照）．また，$\{\Phi_L^\sigma \,;\, \sigma \in Gal(H/k)\}$ は $H^1_{eis}(SL_2(\mathcal{O});\mathbb{C})$ の基底になる．但し，H は k の絶対類体．以下 $G = Gal(H/k)$，$\Phi = \Phi_L$ とかく．そこで，

$$(8) \qquad \varphi_e = \sum_{\sigma\in G} c_\sigma \Phi^\sigma \qquad (c_\sigma \in \mathbb{C})$$

とかく．すぐ後で見るように $c_\sigma \in H$ となる．$\mathcal{O} + \frac{1}{2}$ のノルム最小の元が $\pm\frac{1}{2}$ であることから，$v \to \infty$ のとき，

$$\vartheta(\tau) \sim 2\sqrt{v}\, \exp\left(-\frac{\pi v}{2|\sqrt{D}|} + \pi i\, tr\left(\frac{z}{4\sqrt{D}}\right)\right).$$

これから容易に，

$$(8') \qquad \varphi_e\begin{pmatrix}1 & b\\ & 1\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}1 & b\\ & 1\end{pmatrix} = tr\left(\frac{b}{\sqrt{D}}\right), \quad b \in \mathcal{O}.$$

式(8)から

$$tr\left(\frac{b}{\sqrt{D}}\right) = \sum_{\sigma\in G} c_\sigma E_2(0)^\sigma I(b), \quad b \in \mathcal{O}.$$

とくに $b = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ として，次を得る：

$$(9) \qquad 1 = \sum_\sigma c_\sigma E_2(0)^\sigma \sqrt{D}.$$

一方 (7) から，各 $\sigma \in G$ について，

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\Phi^\sigma(A) \equiv E_2(0)^\sigma \varphi(A) \pmod{8\mathcal{O}_H}, \quad A \in SL_2(\mathcal{O}).$$

したがって，c_σ $(\sigma \in G)$ たちがすべて 2-integral ならば，

$$\varphi_e(A) \equiv \sum_\sigma c_\sigma \sqrt{D}\, E_2(0)^\sigma \varphi(A) \pmod{8}.$$

右辺は，(9) により，$\varphi(A)$ に等しいから予想が成り立つことになる．

式 (8) の c_σ たちは次のように記述される．$\mathfrak{a}$ を k の整 ideal

で2と素なものとし，$x \in \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{a}} & \bar{\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{a} \end{pmatrix}$，$\det x = N(\mathfrak{a})$ なる x をとる．このとき，(8′)を得たときと同様の論法で，

$$U(t) = x^{-1}\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} x$$

について，$\left(U(t) \in SL_2(\mathcal{O}) \Leftrightarrow t \in \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}}\right)$

$$(10) \qquad \varphi_e(U(t)) = 4\,\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha^2 t}{N(\mathfrak{a})\sqrt{D}}\right), \quad t \in \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}}$$

がわかる．但し，α を $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}N(\mathfrak{a})$ のノルム最小の元(のひとつ)とする．一方，[S]で，

$$(11) \qquad \Phi(U(t)) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})}\left[t\,E_2(0, \mathfrak{a}^{-1}L) - \bar{t}\,E_2(0, \bar{\mathfrak{a}}^{-1}L)\right]$$

がわかっている．[注3)] さて，$\mathfrak{a}$ が次をみたせば $\alpha = \frac{1}{2}N(\mathfrak{a})$ ととれる：

$\mathfrak{a}$ の代表する絶対ideal類に属する任意の整ideal $\mathfrak{b}$，$(\mathfrak{b}, 2) = 1$ について，$N(\mathfrak{a}) \leq N(\mathfrak{b})$．

そこで，k の各絶対ideal類から，そのideal類に属する2と素な整idealのうちノルムが最小になるようなものをひとつずつとり，$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_h$ とする．さらに上の $\mathfrak{a}$ に対する x と同様なものを各 $\mathfrak{a}_j$ についてとり x_j とし，$U_j(t) = x_j^{-1}\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} x_j$ とおく $(1 \leq j \leq h)$．式(8)の両辺をこれら $U_j(t)$ の上で比べると，(10)，(11)から，$t \in \frac{\bar{\mathfrak{a}}_j}{\mathfrak{a}_j}$ について，

$$N(\mathfrak{a}_j)\,\mathrm{tr}\left(\frac{t}{\sqrt{D}}\right) = \sum_{\sigma \in G} c_\sigma \cdot \frac{1}{N(\mathfrak{a}_j)}\left[t\,E_2(0, \mathfrak{a}_j^{-1}L)^\sigma - \bar{t}\,E_2(0, \bar{\mathfrak{a}}_j^{-1}L)^\sigma\right]$$

これから，

$$(12) \qquad N(\mathfrak{a}_j)^2 = \sqrt{D}\sum_\sigma c_\sigma E_2(0, \mathfrak{a}_j^{-1}L)^\sigma = \sqrt{D}\sum_\sigma c_\sigma E_2(0, \bar{\mathfrak{a}}_j^{-1}L)^\sigma.$$

一般に，k の任意の整ideal $\mathfrak{a}$ について $E_2(0, \mathfrak{a}^{-1}L) \in H$ で，

(13) $$E_2(0,\mathfrak{a}^{-1}L)\,\mathcal{O}_H = \mathfrak{a}^2 E_2(0,L)\,\mathcal{O}_H .$$

さらに $(\mathfrak{a},2)=1$ なら,

(14) $$E_2(0,\mathfrak{a}^{-1}L) \equiv E_2(0,L) \pmod{\delta\mathcal{O}_H}$$

となることが見れる. よって, いま

$$T = \left(E_2(0,\mathfrak{a}_j^{-1}L)^{\sigma}\right) \quad (1\leq j\leq h,\ \sigma\in G)$$

としてその余因子行列を $\tilde{T}$ とする ($T\tilde{T} = \det T$) と, $T, \tilde{T}$ は $\mathcal{O}_H$-係数で, (12) から (すぐに見るように $\det T \neq 0$),

$$\sqrt{D}\,(c_\sigma)_{\sigma\in G} = (\det T)^{-1}\left(N(\mathfrak{a}_1)^2,\cdots,N(\mathfrak{a}_h)^2\right)\tilde{T} .$$

式 (13), (14) と $N(\mathfrak{a}_j)^2 \equiv 1 \pmod{\delta}$ から, $\det T$ と $(N(\mathfrak{a}_1)^2,\cdots,N(\mathfrak{a}_h)^2)\tilde{T}$ の各成分は $\delta^{h-1}(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_h)^2\mathcal{O}_H$ に入る.

いま k の導手 1 の量指標 ψ で,

$$\psi((\gamma)) = \bar{\gamma}^2, \quad \gamma\in k$$

なるものをひとつとると, いわゆる巡回行列式の議論から,

$$(\det T)\,\mathcal{O}_H = (\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_h)^2\,\omega^{-2h}L_H(\psi\circ N_{H/k},2)\,\mathcal{O}_H ,$$

$$\omega^{-2h}L_H(\psi\circ N_{H/k},2) \in H$$

がわかる. とくに $\det T \neq 0$. 以上から次がわかる:

$\delta^{1-h}\omega^{-2h}L_H(\psi\circ N_{H/k},2) \in \mathcal{O}_H$ で, これが 2 と素ならば, p. 13 の予想は正しい.

注. 1) この分解も (2) と同様な条件で特徴付けられる.

2) この ϑ は, 埋め込み $X \ni (z,v) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{D}}\,{}^tQ\begin{pmatrix} z & -v \\ -v & -\bar{z}\end{pmatrix}Q \in \mathfrak{h}_2$

=(2次のSiegel上半平面)により，$\mathfrak{h}_2$ 上の theta 関数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \exp\left[\pi i\, {}^t(n+n_1)\Omega(n+n_1)+2\pi i\, {}^t(n+n_1)n_2\right],\ \Omega\in\mathfrak{h}_2$$

$$\left(n_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\ n_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

をひきもどしたものに $\sqrt{D}$ をかけたものである．但し，$Q=\begin{pmatrix}1 & \frac{1+\sqrt{D}}{2}\\ 1 & \frac{1-\sqrt{D}}{2}\end{pmatrix}$．この埋め込みの像は，$Sp(2,\mathbb{Z})\cdot\left\{\begin{pmatrix}w_1 & 0\\ 0 & w_2\end{pmatrix};\ w_1,w_2\in\mathbb{H}\right\}$ と交わらないことが示せる．$\vartheta(\tau)\neq 0$ ($^\forall\tau\in X$) となるのは，このことの帰結である．

3) p.6 の $E_m(x)$ を $E_m(x,L)$ ともかく．

文献

[B] A. Borel, Cohomology of arithmetic groups, 1974年 Vancouver での世界数学者会議の報告集に所収.

[C] J. E. Cremona, Hyperbolic tessellation, modular symbols, and elliptic curves over complex quadratic fields. Compo. Math. 51 (1984), 275-323.

[EGM] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, On the group $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 56 の "Journe arithmetique" に所収.

[F] R. Fueter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen I, II, Teubner (Leipzig-Berlin), 1924, 1927.

[H] G. Harder, Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2, Invent. Math. 89 (1987), 37-118.

[I] H. Ito, A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of $\log\eta(z)$, J. Reine Angew. Math. 373 (1987), 148-165.

[I2] ——, Dedekind sums and quadratic residue symbols, Nagoya Math. J. 118 (1990) に出る予定.

[I3] ——, A note on Dedekind sums, 1988年 Banff (Canada) でのカナダ数論協会第1回会合の報告集に出る予定.

[MS] W. Meyer and R. Sczech, Über eine topologische und zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruchs Spitzenauflösung, Math. Ann. 240 (1979), 69-96.

[S] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, Invent. Math. 76 (1984), 523-551.

[S2] ——, Dedekind sums and power residue symbols, Compo. Math. 59 (1986), 89-112.

[S3] ——, Theta functions on the hyperbolic three space, 数研講究録 603 (1987), 9-20.

[W] A. Weil, Zeta functions and Mellin transform, 全集 [1968 a].

[Wes] U. Weselmann, Eisenstein-Kohomologie und Dedekindsummen für GL_2 über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, J. Reine Angew. Math. 389 (1988), 90-121.