数理解析研究所講究録
第721巻 1990年 87-101

p-分体のEuler Systemsについて

横浜市大　　市村 文男

この小文では、p分体の二つのEuler systems, 円単数とGaußの和, の内、前者に力点をおいて解説します。なお、講演の題目は、Euler systemについて, 岩澤main conj.の別証明の紹介、でしたが、原稿の題名は内容によりふさわしい上記のものに変えました。

§1. p分体のEuler systemsの応用対象

以下、p：奇素数, $K=\mathbb{Q}(\mu_p)$, $F=K^+=\mathbb{Q}(\cos 2\pi/p)$,
$\Delta=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, Δは自然に$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$と同一視する；
$\Delta=(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times : \tau_a \leftrightarrow a$. h_K, h_FをK, Fの類数とする。
次の類数公式(Kummer, Iwasawa)は良く知られている；

$$h_F=[E:C],$$

$$h_K^- = h_K/h_F = p\prod_{\substack{\chi\in\hat{\Delta}\\ \text{odd}}}\left(-\frac{1}{2}B_{1,\chi^{-1}}\right) = [\mathbb{Z}[\Delta]^- : \mathfrak{S}^-],$$

但し、E, CはFの単数群, 円単数群,

$$B_{1,\chi^{-1}} = \frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p-1} a\chi^{-1}(a) \quad (\text{Bernoulli数}),$$

$\mathbb{Z}[\Delta]^- = (1-\tau_{-1})\mathbb{Z}[\Delta]$,
$\mathfrak{S}^- = \mathbb{Z}[\Delta]^- \cap \mathbb{Z}[\Delta]\theta(p)$, $\theta(p) = \frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p-1} a\tau_a^{-1}$ (Stickelberger元),
$\chi \in \hat{\Delta}$ が odd (even) $\Leftrightarrow$ $\chi(\tau_{-1}) = -1$ $(+1)$ 。

以下、A を K の類群の p-part とする。一般に $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-加群 M に対して、$M^+ = (1+\tau_{-1})M$, $M^- = (1-\tau_{-1})M$, 又、$\chi \in \hat{\Delta}$ の時、$M(\chi) = e_\chi M$, $e_\chi = \frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)\tau_a^{-1}$ とおく。

類数公式により、次の事が期待される；

$$A^+ \underset{\Delta}{\cong} (E/C)(p), \quad A^- \underset{\Delta}{\cong} (\mathbb{Z}[\Delta]^-/\mathfrak{S}^-)(p) \quad 。$$

この期待について一般的に何もわかっていないが、これよりはるかに弱い次の事は、Mazur-Wiles により一変数保型形式の深い理論を用いて証明された；

<u>定理</u> (Mazur-Wiles, Kolyvagin) $\chi \in \hat{\Delta}$

(1) χ : even $\Rightarrow$ $\#A(\chi) = \#(E/C)(p)(\chi)$,

(2) χ : odd $\Rightarrow$ $\#A(\chi) = p^{\mathrm{ord}_p B_{1,\chi^{-1}}}$

Kolyvagin [1] は、(1),(2) を、円単数, Gaußの和の系を用いて極めて初等的な別証明を与えた。彼は、p 分体の"canonical element"をたくさん作りその素 ideal 分解を決める事によって類群を理解する仕方を与えたのである。

§2　古典的なcanonical elements

§2-1　円単数 $\zeta_p - 1$

§2-2　Gauβ和

ℓ を $\ell \equiv 1\ (p)$ なる素数，$\tilde{\lambda}$ を ℓ 上の $\mathbb{Q}(\mu_{\ell-1})$ の素ideal，$\lambda = \tilde{\lambda} \cap \mathbb{Q}(\mu_p)$，$\zeta_\ell$ を固定された1の原始 ℓ 乗根とする。$\omega = \omega_{\tilde{\lambda}}$ を $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ の Teichmüller character とする；

$$\omega : (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mu_{\ell-1}, \quad \omega(a) \equiv a \ (\mathrm{mod}\ \tilde{\lambda}) 。$$

Gauβ和 $S(\omega^{-\frac{\ell-1}{p}}) = \sum_{a=1}^{\ell-1} \omega^{-\frac{\ell-1}{p}}(a)\zeta_\ell^a$ は，$\mathbb{Q}(\mu_p\ \mu_\ell)$ の元で，Δ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p, \mu_\ell)/\mathbb{Q}(\mu_\ell))$ と同一視すると，$\tau_b \in \Delta$ に対して，

$$S(\omega^{-\frac{\ell-1}{p}})^{\tau_b - b} \in \mathbb{Q}(\mu_p)^\times$$

$$(S(\omega^{-\frac{\ell-1}{p}})^{\tau_b - b}) = \lambda^{(\tau_b - b)\theta(p)}$$

となる。この事から，$B_{1,\chi^{-1}}$ が $A(\chi)$ を消す事がわかる。しかし，χ=even の場合は，$B_{1,\chi^{-1}} = 0$ 故何も言っていない。

§2-3　Kummer-Thaine の仕事（[2]，[6]）

χ = even の場合に，$A(\chi)$ を理解するため，Gauβ和に相当するものを導入する。

ℓ は上と同じく $\ell \equiv 1\ (p)$ なる素数，$G_\ell = \mathrm{Gal}(F(\mu_\ell)/F)$，$\sigma_\ell$ をその固定された生成元，$N_\ell \in \mathbb{Z}[G_\ell]$ をノルムとする。

$$\left.\begin{aligned} \xi_\ell &= (1-\zeta_p\zeta_\ell)(1-\zeta_p^{-1}\zeta_\ell) \in F(\mu_\ell)^\times \\ \xi_1 &= (1-\zeta_p)(1-\zeta_p^{-1}) \in F^\times \end{aligned}\right\} \text{とおく。}$$

最初のポイントは、(円単数の distributive relation より、)

$$N_\ell \xi_\ell = (1-\zeta_p^{\ell})/(1-\zeta_p)\times(1-\zeta_p^{-\ell})/(1-\zeta_p^{-1})$$

となる事です。従って、$\ell \equiv 1 \pmod p$ 故、$N_\ell \xi_\ell = 1$。

∴ Satz 90 より、$\exists\, a_\ell \in F(\mu_\ell)^\times$ s.t. $\xi_\ell = a_\ell^{\sigma_\ell - 1}$。そこで

$\kappa_\ell = N_\ell a_\ell \ (\in F^\times / F^{\times \ell-1})$ とおきます。

Gauß 和の素 ideal 分解に対応する (κ_ℓ) の素 ideal 分解を記述するため、ℓ 上の F の素 ideal λ を固定し次の様に、Δ^+-加群としての同型

$$\varphi_\lambda : (\mathcal{O}_F/\ell\mathcal{O}_F)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell-1)\mathbb{Z}[\Delta^+], \quad (\Delta^+ = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}))$$

を定義します。

$\sigma \in \Delta^+$ に対して、$\tilde{\lambda}^\sigma$ を λ^σ 上の $F(\mu_\ell)$ の唯一つの素 ideal とする。Π を、$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^1$ で local par., $\tilde{\lambda}^\sigma$ $(\sigma \in \Delta^+, \sigma \neq 1)$ で単数となる $F(\mu_\ell)$ の元とする。この時、$F(\mu_\ell)/F$ で λ^σ 達は、totally tamely に分岐する事から

$$u = \Pi^{\sigma_\ell - 1} \in \bigoplus_\sigma (\mathcal{O}_{F(\mu_\ell)}/\tilde{\lambda}^\sigma)^\times = (\mathcal{O}_F/\ell\mathcal{O}_F)^\times$$

は、$(\mathcal{O}_F/\ell\mathcal{O}_F)^\times$ の $\mathbb{Z}/\ell-1[\Delta^+]$ 上の生成元となります。

ここで、φ_λ を $u \longrightarrow 1$ によって定義します。

以上の準備の下で、

$$(\kappa_\ell) \equiv \varphi_\lambda(\xi_1)\cdot\lambda \mod (\ell-1)I, \quad I = \{F \text{ の全 ideals}\}$$

が成り立ちます。但し、$\varphi_\lambda(\xi_1)$ は λ に乗法的に作用させる。

証明のポイントは、

$\mathfrak{z}_\ell \equiv 1 \mod. \ell$ 上の素 ideal，従って，$\xi_\ell \equiv \xi_1 \mod. \ell$ 上の素 ideal

となる事です。実際この事から，

$\varphi_\lambda(\xi_1) = \varphi_\lambda(\xi_\ell) = \varphi_\lambda(a_\ell^{\sigma_\ell - 1})$

となるが，φ_λ の定義から $\varphi_\lambda(a_\ell^{\sigma_\ell - 1})$ の係数は，κ_ℓ の λ での付値を与える事がわかります。

さて，上の素 ideal 分解で，特に $\ell \equiv 1 \mod h_F$ の時，$\varphi_\lambda(\xi_1)$ は λ の類 $\{\lambda\}$ を消す事がわかります。Thaine はこの事と次の§で述べるキーレンマ2を用いて，

χ : even の時，$\#(E/C)(p)(\chi)$ は $A(\chi)$ を消す

事を示した。（§3-2，Step I を参照。）

Gauß和の素 ideal 分解，(κ_ℓ) の素 ideal 分解は，ひとつひとつの ideal 類の annihilator を与えていますが，まだ類群全体を把握するには不十分です。そこで登場するのが Euler system です。

§3．P分体の Euler systems

§3-1　円単数の system

M : 任意の p 巾（§2-3の最後の様に h_F の p-部分を念頭において下さい），

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_M = \{$square free な自然数 $\prod \ell_j \mid \ell_j \equiv 1(p), \ell_j \equiv 1(M)\}$.

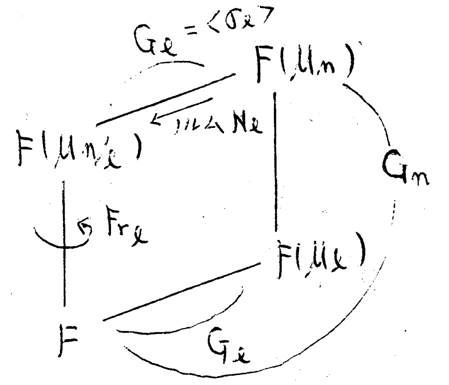
各 $n \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\xi_n = (1-\zeta_p \prod_{l|n} \zeta_l)(1-\zeta_p^{-1} \prod_{l|n} \zeta_l) \in F(\mu_n)^\times$$

とおく。

$\{\xi_n ; n \in \mathcal{S}\}$ が $F = \mathbb{Q}(\cos 2\pi/p)$ の "Euler system" です。

この性質を述べる前にいくつか記号を導入する。



$G_n = Gal(F(\mu_n)/F)$,

$G_l = Gal(F(\mu_l)/F) \hookrightarrow G_n$

N_l: ノルム $\in \mathbb{Z}[G_l]$ $(\subset \mathbb{Z}[G_n])$

$Fr_l \in Gal(F(\mu_{n/l})/F)$:

l 乗 Frobenius

次の基本的な性質を持っています；

ES 1. $n \neq 1 \Rightarrow \xi_n$: global unit

ES 2. $l | n \Rightarrow N_l \xi_n = \xi_{n/l}^{Fr_l - 1}$

ES 3 $l | n \Rightarrow \xi_n \equiv \xi_{n/l}$ (mod. l 上の素 ideal)。

最後の2つの性質は、§2-3で強調したものです。

ξ_n から F の元を作るために次の作用素を導入します；

$$D_l = \sum_{j=1}^{l-2} j \cdot \sigma_l^j \in \mathbb{Z}[G_l] \subset \mathbb{Z}[G_n]$$

$$D_n = \prod_{l|n} D_l \in \mathbb{Z}[G_n]$$, (σ_l は G_l の固定された生成元)。

作用素 D_l は、次の式をみたします。

(*) $(\sigma_l - 1) D_l = (l-1) - N_l$

この事から、$\kappa_\ell \equiv D_\ell \xi_\ell \mod F(\mu_\ell)^{\times \ell-1}$ がわかります。
つまり、D_ℓ は、§2-3で述べた、ξ_ℓ から κ_ℓ を作るためのやや煩らわしい操作を一挙にやってしまう役割を持っています。
(※)と、性質ES2を用いて、

<u>補題</u> $D_n \xi_n \in \left(F(\mu_n)^\times / F(\mu_n)^{\times M}\right)^{G_n}$

が容易に示されます。ところが、$F(\mu_n)$ が1の p 乗根を含まない事から、自然な写像 $F^\times/F^{\times M} \to \left(F(\mu_n)^\times / F(\mu_n)^{\times M}\right)^{G_n}$
が同型になります。従って、各 $n \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\kappa_n \equiv D_n \xi_n \mod F(\mu_n)^{\times M}$$

となる $\kappa_n \in F^\times/F^{\times M}$ が一意的に定まります。
§2-3で述べたKummer-Thaineの仕事の一般化として、Kolyvaginは次を示しました；

<u>キーレンマ1</u> (Kolyvagin) $n \in \mathcal{S}$

$$(\kappa_n) \equiv \sum_{\ell | n} \varphi_{\lambda_\ell}(\kappa_{n/\ell})\lambda_\ell \mod MI,$$

但し、λ_ℓ は ℓ 上の F の(ひとつの)素ideal。

証明は§2-3と基本的に同じで、ES1〜3をうまく用いて示されます。キーレンマ1は、ideal類の間の関係式を与えているわけですが、この関係式が十分たくさんある事を保証するのが、

<u>キーレンマ2</u> (Thaine, Rubin)

$\mathcal{C} \in A^+$ (= Fの類群のp-part),
$W \subset F^\times / F^{\times M}$, 有限生成 Δ^+-部分加群
$\psi : W \longrightarrow \mathbb{Z}/M[\Delta^+]$, Galois equiv. hom

が与えられた時、

$\exists^\infty$ 素ideal $\lambda \in \mathcal{C}$ s.t.

$$\begin{cases} \ell = \lambda \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{S} \quad (\ell \equiv 1\ (M)) \\ \exists\, \alpha = \alpha_\lambda \in \mathbb{Z}/M[\Delta^+] \ : \ \alpha \varphi_\lambda |_W \equiv \psi \mod M \end{cases}$$

証明はChebotarevの密度定理を巧妙に用いて示されますが、Euler systemとは直接には関係ないので解説は略します。

§3-2　応用(手品)

ここでは§1に述べた定理(1)を証明します。以下、χはeven char.とし、Δ-module Mの元mに対して$e_\chi \cdot m$を単にm^χと略記します。定理(1)を示すには、類数公式(§1)により、各χに対して

✡　$\# A(\chi) \mid \# (E/C)(p)(\chi)$

を示せば十分です。

$\chi = 1$の時は、$\mathbb{Q}$の類数$=1$, $\mathbb{Q}$の単数$=\pm 1$ 故、✡の両辺とも1となります。従って、以下、$\chi \neq 1$とします。

簡単のため、$A(\chi)=\langle \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2\rangle$ と仮定し、χ、$\#(E/C)(p)(\chi)$ を r_χ と略記します。

Step 1°

先ずキーレンマ2を用います。$W=(E/E^M)(\chi)$ とする。

$\chi\neq 1$ より、$(C/C^M)(\chi)$ は $\mathbb{Z}/M[\Delta](\chi)\ (\cong \mathbb{Z}/M)$ 上 free, cyclic で ξ_1^χ がその生成元になっています。定義から $\kappa_1=\xi_1$ となる。ψ として

$$\psi: W=(E/E^M)(\chi)\xrightarrow{r_\chi\text{乗}}(C/C^M)(\chi)\simeq \mathbb{Z}/M[\Delta](\chi)$$
$$\kappa_1^\chi \longleftrightarrow 1$$

をとります。キーレンマ2より、

$\exists$ 素 ideal $\lambda_1\in\mathfrak{L}_1$, $\exists\, \alpha\in\mathbb{Z}/M[\Delta]$

s.t. $\begin{cases} \ell_1=\lambda_1\cap\mathbb{Q}\in\mathcal{S}, \\ \alpha\,\varphi_{\lambda_1}|_W\equiv\psi \mod M \end{cases}$

従って、$\alpha\,\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^\chi)\equiv r_\chi\ \ (M)$.

一方キーレンマ1より、

$$(**)\qquad (\kappa_{\ell_1}^\chi)\equiv\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^\chi)\,\lambda_1 \mod M I.$$

$\#A(\chi)\mid M$ 故、$\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^\chi)$ が従ってその α 倍である r_χ が $\{\lambda_1\}=\mathfrak{L}_1$ を消す。

(注) 今の議論に依り、一般に $\#(E/C)(p)(\chi)$ が $A(\chi)$ を消す (Thaine) が示される。

Step 2° 無駄の排除

t を $\kappa_{\ell_1}^{\chi} \in F^{\times t}/F^{\times M}$ なる最大の p 巾 $(\mid M)$ とする。

(※) で、$r_\chi \mid M$, $\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^{\chi})$ は r_χ の"約数"故、$t \mid r_\chi$。

(※) より

$$(\kappa_{\ell_1}^{\chi\,1/t}) \equiv \frac{1}{t}\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^{\chi})\lambda_1 \mod \#A(\chi)\frac{r_\chi}{t}$$

$\therefore$ $\frac{1}{t}\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^{\chi})$, 従って $\frac{1}{t}\cdot d\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^{\chi}) = \frac{r_\chi}{t}$ が $\{\lambda_1\} = c_1$ を消す。

Step 3°

W, ψ を

$$\psi : W = \kappa_{\ell_1}^{\chi} F^{\times M}/F^{\times M} \ni \kappa_{\ell_1}^{\chi} \longrightarrow t \in \mathbb{Z}/M[\Delta](\chi)$$

で定める。キーレンマ2より

$\exists$ 素 ideal $\lambda_2 \in c_2$ $\exists \beta \in \mathbb{Z}/M[\Delta]$

s.t. $\begin{cases} \ell_2 = \lambda_2 \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{S} \\ \beta\varphi_{\lambda_2}|W \equiv \psi \mod M \end{cases}$

$\therefore$ $\beta\varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^{\chi}) \equiv t \mod M$

キーレンマ1より

$$(\kappa_{\ell_1\ell_2}^{\chi}) \equiv \varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^{\chi})\lambda_2 + \varphi_{\lambda_1}(\kappa_{\ell_2}^{\chi})\lambda_1 \mod MI$$

$\therefore$ $\varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^{\chi})$ が, 従って t が、$\{\lambda_2\} = c_2\ (\in A(\chi)/\langle c_1\rangle)$ を消す。以上の事から

$\#A(\chi) = (c_1$ の exponent$) \times (c_2 \in A(\chi)/\langle c_1\rangle$ の exponent$)$ は、

$r_\chi/t \times t = r_\chi$ の約数となる。これで ☆ が示された。

§3-3 Gauß和の system

以前と同じく、M : p の任意の巾,

$\mathcal{S} = \{\text{square free な自然数 } \prod l_j \mid l_j \equiv 1 \ (M)\}$ とする。

$n \in \mathcal{S}$ に対して、$r \equiv 1 \ (pn)$ なる素数をとる。

$\tilde{\gamma}$ を r 上の $\mathbb{Q}(\mu_{r-1})$ の素ideal, $\gamma = \tilde{\gamma} \cap K(\mu_n)$ とする。

$\omega = \omega_{\tilde{\gamma}} : (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mu_{r-1}$ を Teichmüller char. とし.

$$g(n, \tilde{\gamma}, \zeta_r) = \mathcal{G}(\omega^{-\frac{r-1}{pn}}) = \sum_{a=1}^{r-1} \omega^{-\frac{r-1}{pn}}(a)\, \zeta_r^{a} \in K(\mu_n, \mu_r)$$

とおく。但し、ζ_r は固定された 1 の原始 r 乗根。

$\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を $\mathrm{Gal}(K(\mu_n, \mu_r)/\mathbb{Q})$ の部分群とみます。

Δ の生成元 δ をひとつ固定し、各 $n \in \mathcal{S}$ に対して.

$$\begin{cases} \zeta^{\delta} = \zeta^{b_n} & \forall \zeta \in \mu_{pn} \\ b_n \equiv b_1 \ (pM) \end{cases}$$

で $b_n \in \mathbb{Z}$ を定める。この時.

$$\alpha(n, \gamma) = g(n, \tilde{\gamma}, \zeta_r)^{\delta - b_n}$$

は、$K(\mu_n)^{\times}$ の元で、n, γ にのみ依ります。

$$\{\alpha(n, \gamma) \mid n \in \mathcal{S},\ \gamma : K(\mu_n) \text{ の素ideal で } r = \gamma \cap \mathbb{Q} \equiv 1 \ (pn)\}$$

が Gauß和の"Euler system"です。

さて、円単数と Gauß和は非常に良く似た性質を持っています;

① distributive relation	①′
$\prod_{\zeta^\ell=1}(1-\zeta x)=1-x^\ell$	$\chi,\psi:(\mathbb{Z}/r)^\times\longrightarrow\mu_{r-1},\quad m\mid r-1$
	$\prod_{\chi^m=1}S(\chi\psi)=S(\psi^m)\times$ 簡単な項
② 合同条件	②′
$\zeta_\ell\equiv1\ \mathrm{mod.}\ \ell$ 上の素ideal	$0\le k\le r-2\ ,\ \pi=\zeta_r-1$
	$S(\omega^{-k})/\pi^k\equiv-\frac{1}{k!}\ \mathrm{mod}\ \tilde{\wp}$
③ $1-\zeta_n$: global unit	③′
($n\neq$ 素数巾)	($\lvert S(\chi)\rvert=\sqrt{r}$ 従って、)
	$S(\chi)$ は r の外で単数。

§2-3, §3-1, 2 の議論は性質①,②,③に基づいています。system $\{d(n,\wp)\}$ に対して①′,②′,③′を用いて同じ様な議論をする事に依って、定理(2)が証明されます。

§3-4 円分体の岩澤 Main Conjecture

A_n を $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ の類群の p-part, $A_\infty=\varprojlim_{norm}A_n$ とする。これは自然に Δ-加群とみなせます。

$\Gamma=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p))$ は、自然に $1+p\mathbb{Z}_p$ と同一視されますが、$\gamma=1+p$ をその生成元として固定します。$\mathbb{Z}_p$ 上の Γ の完備群環 $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]=\varprojlim\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}(\mu_p))]$ は $\gamma\longleftrightarrow1+t$ によって巾級数環 $\mathbb{Z}_p[[t]]$ と同型になる事が知られています。以後、両者を同一視します。

さて、A_∞ は Δ-加群とみなせますが、類数の有限性により、Λ上有限生成 torsion となります。一般に、有限生成な torsion Λ加群 M に対して次が知られています；

$$\exists g_j \in \Lambda,\ \exists \Lambda\text{-hom } f : M \longrightarrow \bigoplus_j \Lambda/(g_j)$$

s.t. $\ker f$, $\operatorname{coker} f$ は位数有限，

更に、$\operatorname{char}(M) = (\prod g_j)$ は、Mのみに依存する。

以下、$\chi' \in \hat{\Delta}$ を odd char., $\chi = \omega_p \cdot \chi'^{-1}$ を対応する even char. とします 但し、ω_p は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の Teichmüller char.。

以上の記号の下で、岩澤 Main Conj. (= Mazur-Wiles の定理) は、次の様に述べられます；

<u>Main Conj. (χ')</u>

$$\operatorname{char}(A_\infty(\chi')) = (L_p(s, \chi)),$$

但し、$L_p(s, \chi)$ は χで定まる p進L関数。

E_n, C_n を $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ の単数群，円単数群とします。U_n を $\mathbb{Q}(\mu_{p^n}) \otimes \mathbb{Q}_p$ の主単数群とし、E_n, C_n を $\mathbb{Q}(\mu_{p^n}) \otimes \mathbb{Q}_p$ へ埋め込み

$$\mathcal{E}_n = \overline{U_n \cap E_n}, \quad \mathcal{C}_n = \overline{U_n \cap C_n}$$

とおく。

$\mathcal{E} = \varprojlim \mathcal{E}_n$, $\mathcal{C} = \varprojlim \mathcal{C}_n$ をノルムについての射影極限とします。この時、$\mathcal{E}/\mathcal{C}$ は、Δ-加群及び Λ-加群とみなせるが、Λ上有限生成 torsion な事が知られています。

Main Conj. (χ') は、次の主張と同値な事が知られています。

<u>Main Conj. (χ)</u>

$$\mathrm{char}\, A_\infty(\chi) = \mathrm{char}\,((\mathcal{E}/\mathcal{C})(\chi))$$

K. Rubin [3] は、§3-1,2 に相当する議論をすべての $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})^+$ ($n \geq 1$) で積み重ねて、Main Conj. (χ) の極めて初等的な別証明を与えています。

なお、Main Conj. (χ') の、Gaußの和の systemを用いた別証明もすでにできているのかも知れません。

(注1) 以上の文章は、K. Rubin [3], [4] にもとづくものです。

(注2) §2-2 で、$\chi = 1, \omega_p$ の場合の記述に不正確な点があります。正確なstatementは、Washingtonの本のChap. 6 をごらん下さい。

(注3) 円単数と、虚2次体上のアーベル拡大の楕円単数は非常に良く似ています。Rubin [5] は、虚2次体 K を準同型環にもつ楕円曲線 E の $\mathfrak{p}$ (Kの素ideal, Eは$\mathfrak{p}$でgood red.) 巾分点を、Kにつけ加えてできる $\mathbb{Z}_p$ or $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 拡大に対する岩澤main conj. を楕円単数の system を用いて証明しました。

参考文献

[1] V. A. Kolyvagin : Euler system (プレプリント)

[2] E. Kummer : Über eine besondere Art, aus complexen Einheiten gebildeter Ausdrücke, Crelle 50 (1855)

[3] K. Rubin : The Main Conjecture, S. Lang の本 "Cyclotomic Fields" (G.T.M. 1989) の appendix

[4] K. Rubin : Kolyvagin's system of Gauss sums

[5] K. Rubin : The one variable main conjecture for elliptic curves with complex multiplications

([4], [5] : プレプリント)

[6] F. Thaine : On the ideal class groups of real abelian number fields, Ann. of Math., 128 (1988)